П. С. МОДЕНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СПЕЦИАЛЬНОМУ КУРСУ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫСШАЯ ШКОЛА • 1960

П. С. МОДЕНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО СПЕЦИАЛЬНОМУ КУРСУ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Издание второе,
дополненное и исправленное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений

Государственное издательство
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

ЧАСТЬ I

Алгебра

Глава I. Тождественные преобразования 7

§ 1. Тождественные преобразования многочленов 7
§ 2. Условные тождества между многочленами 9
§ 3. Симметрические многочлены 11
§ 4. Делимость многочленов 11
§ 5. Разложение на множители 14
§ 6. Разные задачи на многочлены 16

Глава II. Алгебраические дроби 18

§ 1. Тождественные преобразования алгебраических дробей 18
§ 2. Условные тождества 20

Глава III. Радикалы и иррациональные выражения 24

§ 1. Тождественные преобразования иррациональных выражений 24
§ 2. Условные тождества. Преобразование равенств, содержащих иррациональные выражения 28

Глава IV. Общие свойства уравнений и неравенств 29

§ 1. Эквивалентность уравнений 29
§ 2. Доказательство неравенств 34
§ 3. Эквивалентность неравенств и смешанных систем 41

Глава V. Линейные уравнения и линейные неравенства 44

§ 1. Линейные уравнения 44
§ 2. Линейные уравнения, содержащие параметры 45
§ 3. Линейные неравенства 49
§ 4. Составление линейных уравнений 51
П. 1. Составление линейных уравнений с одним неизвестным 51
П. 2. Составление систем линейных уравнений с несколькими неизвестными 54

Глава VI. Уравнения и неравенства высших степеней 61

§ 1. Квадратный трехчлен 61
§ 2. Корни целой рациональной функции от одного аргумента 67
§ 3. Рациональные уравнения с одним неизвестным 71
§ 4. Рациональные уравнения с одним неизвестным, содержащим параметры . . 72
§ 5. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными 76
§ 6. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными, содержащие параметры 78
§ 7. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными 78
§ 8. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными, содержащие параметры 80
§ 9. Решение рациональных неравенств 82
§ 10. Иррациональные уравнения с одним неизвестным и смешанные системы . . 83
§ 11. Иррациональные уравнения с одним неизвестным, содержащие параметры . 85
§ 12. Системы, содержащие иррациональные уравнения 87
§ 13. Системы, содержащие иррациональные уравнения с параметрами 89
§ 14. Иррациональные неравенства 90
§ 15. Составление нелинейных уравнений 91
П. 1. Составление квадратных уравнений с одним неизвестным 91
П. 2. Составление нелинейных уравнений с одним неизвестным 94
П. 3. Составление систем нелинейных уравнений 95

§ 16. Составление неравенств 101
П. 1. Составление неравенств второй степени с одним неизвестным . . . 101
П. 2. Составление нелинейных неравенств 102

Глава VII. Показательная и логарифмическая функции над полем действительных чисел 104

§ 1. Доказательство различных равенств, содержащих показательную и логарифмическую функции 104
§ 2. Логарифмические и показательные уравнения с одним неизвестным 105
§ 3. Системы логарифмических и показательных уравнений 107
§ 4. Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции 109

Глава VIII. Исследование элементарных функций 110

§ 1. Область определения 110
§ 2. Возрастание, убывание, выпуклость вверх и вниз 110
§ 3. Наибольшие и наименьшие значения 114

Глава IX. Последовательности 116

§ 1. Арифметическая и геометрическая прогрессии 116
§ 2. Возвратные последовательности 120
§ 3. Произвольные последовательности 126

Глава X. Суммирование 129
Глава XI. Комбинаторика 133
Глава XII. Бином Ньютона 138
Глава XIII. Индукция 140
Глава XIV. Необходимость и достаточность 143
Глава XV. Разные задачи 148

ЧАСТЬ II

Геометрия

Раздел I

Планиметрия

Некоторые сведения о линиях второго порядка 171

§ 1. Эллипс 171
§ 2. Гипербола 174
§ 3. Парабола 177

Глава XVI. Задачи на вычисление 180

§ 1. Треугольник 180
§ 2. Многоугольники 185
§ 3. Окружность 186

Глава XVII. Задачи на доказательство 190

§ 1. Треугольник 190
§ 2. Многоугольники 205
§ 3. Окружность 208

Глава XVIII. Геометрические места точек 213

Глава XIX. Задачи на построение 215

§ 1. Метод геометрических мест 215
§ 2. Метод подобия 216
§ 3. Метод обратности 217
§ 4. Метод симметрии и спрямления 217
§ 5. Метод параллельного переноса 218
§ 6. Метод вращения 218
§ 7. Метод инверсии 219
§ 8. Алгебраический метод 219
§ 9. Сжатие, сдвиг, перспектива, гомологии (задачи на доказательство и построение) 220
§ 10. Смешанный отдел 229

Глава XX. Задачи, в решении которых применяются комбинированные методы . . . 235
Глава XXI. Разные задачи . . . 272

Раздел II

Стереометрия

Глава XXII. Задачи на вычисление . . . 274
§ 1. Прямые и плоскости в пространстве . . . 274
§ 2. Треугольная пирамида . . . 275
§ 3. Многоугольные пирамиды . . . 277
§ 4. Призмы . . . 279
§ 5. Куб . . . 280
§ 6. Многогранники . . . 282
§ 7. Сфера и ее части; комбинации сфер с прямыми и плоскостями . . . 282
§ 8. Сфера, вписанная в многогранник и описанная вокруг него . . . 283
§ 9. Цилиндр, конус, сфера в комбинации друг с другом, с плоскостями и многогранниками . . . 285
Глава XXIII. Геометрические места точек . . . 292
Глава XXIV. Задачи на доказательство . . . 296
Глава XXV. Разные задачи . . . 302
Глава XXVI. Планиметрия со стереометрией . . . 307

ЧАСТЬ III

Тригонометрия

Глава XXVII. Тождественные преобразования . . . 315
§ 1. Тождественные преобразования . . . 315
П. 1. Тождества . . . 315
П. 2. Условные тождества . . . 318
§ 2. Суммирование . . . 323
Глава XXVIII. Обратные тригонометрические функции . . . 327
Глава XXIX. Тригонометрические и трансцендентные уравнения и неравенства . . . 337
§ 1. Тригонометрические уравнения с одним неизвестным . . . 340
§ 2. Системы тригонометрических уравнений . . . 348
§ 3. Решение тригонометрических неравенств . . . 351
§ 4. Доказательство тригонометрических неравенств . . . 353
§ 5. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком аркфункций 356
§ 6. Трансцендентные уравнения . . . 358
§ 7. Исследование элементарных функций . . . 359
§ 8. Разные задачи . . . 361
Глава XXX. Геометрические задачи с применением тригонометрии . . . 364
§ 1. Тригонометрические соотношения между элементами треугольника . . . 364
§ 2. Решение треугольников . . . 371
§ 3. Задачи по планиметрии с применением тригонометрии . . . 378
§ 4. Применение тригонометрии к стереометрии . . . 397
П. 1. Плоскости, прямые, двугранные углы . . . 397
П. 2. Параллелепипед . . . 399
П. 3. Призма . . . 400
П. 4. Треугольная пирамида . . . 401
П. 5. Многоугольные пирамиды . . . 403
П. 6. Цилиндр . . . 405
П. 7. Конус . . . 406
П. 8. Сфера в комбинации с многогранниками, цилиндром и конусом . . . 409
Ответы . . . 415

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач по элементарной математике предназначен в первую очередь для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов и университетов.

Сборник состоит из трех частей:

часть I — Алгебра (главы I—XV);
часть II — Геометрия (главы XVI—XXVI);
часть III — Тригонометрия (главы XXVII—XXX).

В сборник включены задачи по всем основным разделам элементарной математики, а потому он может быть достаточно широко использован преподавателями математики средней школы, а также учащимися средней школы, интересующимися математикой.

Материал по алгебре и тригонометрии расположен в точном соответствии с единственными имеющимися сейчас учебниками С. И. Новоселова по специальным курсам алгебры и тригонометрии*. Названия глав и параграфов, а также порядок их следования в указанных теоретических курсах совпадают, в основном, с названиями глав и параграфов настоящего сборника. Таким образом, систематизация задач по алгебре и тригонометрии проведена в соответствии с теоретическими курсами.

Что касается геометрии, то здесь задачи систематизированы в два раздела — планиметрию и стереометрию. Задачи по планиметрии состоят из 6 глав: гл. XVI — задачи на вычисление, гл. XVII — задачи на доказательство, гл. XXIII — геометрические места точек, гл. XIX — задачи на построение, гл. XX — задачи, в решении которых применяются комбинированные методы, гл. XXI — разные задачи. Задачи на вычисление и доказательство разделены на три параграфа (§ 1 — треугольник, § 2 — четырехугольник, § 3 — окружность); классификация задач на построение та же, что и в книге «Сборник задач на построение» И. И. Александрова (Учпедгиз, 1934); большинство задач (§ 1—8, гл. XIX) заимствовано из этой книги.

Задачи по стереометрии систематизированы также по их типу: гл. XXII — задачи на вычисление, гл. XXIII — геометрические места точек, гл. XXIV — задачи на доказательство, гл. XXV — разные задачи, гл. XXVI — планиметрия со стереометрией. Задачи внутри гл. XXII систематизированы по виду фигур (§ 1 — прямые и плоскости в пространстве, § 2 — треугольная пирамида, § 3 — многоугольные пирамиды, § 4 — призмы, § 5 — куб и т. д.).

При подборе задач, при составлении указаний и решений к ним я стремился поместить возможно больше задач разнообразных типов и указать на методы их решения, не распространенные в имеющихся сборниках задач. К подобного рода задачам по алгебре относятся, например, задачи, помещенные в § 1 гл. III, где преобразование иррациональных выражений сочетается с понятием абсолютной величины числа. Сюда же следует отнести многие задачи гл. IV (§ 1 — эквивалентность уравнений, § 3 — эквивалентность неравенств и смешанных систем).

---

* С. И. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры. Изд.-во «Советская наука», 1956; С. И. Новоселов. Специальный курс тригонометрии. Изд.-во «Советская наука», 1957.

Новым понятием является полезное для решения задач понятие смешанной системы, введенное С. И. Новоселовым, которое очень удобно применять как инструмент исследования во многих задачах, связанных с решением уравнений (особенно иррациональных), систем уравнений и неравенств (гл. VI, § 10, 11, 12 и др.). Имеются и задачи нового типа. К ним относятся задачи на линейные неравенства (§ 3, гл. V). До некоторой степени новым можно считать выделение уравнений и систем, содержащих параметры. Здесь я старался в указаниях и решениях провести тщательные исследования, учитывая область изменения параметров, не ограничиваясь формальными преобразованиями, дающими верное решение лишь «вообще говоря». При решении задач, содержащих параметры, следует всегда учитывать влияние на результат области изменения параметров.

В гл. VIII даны элементарные приемы исследования элементарных функций; это позволяет решать единообразно многие задачи на наибольшие и наименьшие значения.

В главах XIII (индукция), XIV (необходимость и достаточность) и XV (разные задачи) читатель также найдет задачи, новые по постановке вопроса и методам их решения. В геометрии, в разделе I (планиметрия), даны сведения об измерении отрезков и углов как положительными, так и отрицательными числами. Здесь же сформулирована теорема Шаля (и для длин отрезков, и для величин углов), причем для случая величин углов продемонстрировано применение этой теоремы к решению задач; отсюда видна возможность решать конструктивные задачи геометрии общим методом, не опираясь на чертеж. Метод этот может быть очень широко применен в геометрии, он носит аналитический характер, причем решение не теряет своей геометричности. Общность достигается тем, что некоторые утверждения геометрии, искусственно разъединенные между собою, объединяются в одно понятие, или утверждение (таково, например, понятие степени точки относительно окружности). В указаниях к планиметрии даны образцы решения задач общими методами, мало распространенными в нашей учебной литературе (применение перспективы к решению планиметрических задач, различные искусственные приемы, носящие до известной степени характер общих методов, и т. д.). Ряд задач представляет собою набор нескольких связанных между собою вопросов; решение этих задач потребует от читателя умения провести небольшое самостоятельное исследование. У большинства таких задач имеются решения; эти решения даны почти всегда с подробными исследованиями; иногда к одной задаче даются различные методы решения: геометрический, алгебраический и с применением тригонометрии; результаты исследований сопоставляются. Здесь читателю следует обратить особое внимание на исследование задач с применением тригонометрии, так как при приложении тригонометрии к геометрии исследований обычно не проводят (это в основном относится к гл. XXX). Если задачи повышенной трудности * вызовут большие затруднения, то рекомендуется прочитать их решения; это, без сомнения, принесет пользу, так как, во-первых, решения составлены очень кратко и читателю остается над чем подумать самому, во-вторых, в решении задач указанного типа читатель познакомится с новыми приемами и методами.

В сборник включены задачи, связанные с такими понятиями, как гармоническая четверка точек, радикальная ось, пучок окружностей. Часть задач связана с понятием эллипса, гиперболы и параболы. Указанные понятия не имеют в задачах самостоятельного значения, а даются попутно с рассмотрением конструкций элементарной геометрии. С весьма общим методом решения задач — применением геометрических преобразований (движение, сжатие, сдвиг, перспектива, инверсия и т. д.) — читатель познакомится в § 9 гл XIX. Метод геометрических преобразований находит широкое применение и в задачах гл. XX (задачи, в решении которых применяются комбинированные методы).

---

* Геометрические задачи с применением тригонометрии (§ 3, №№ 99—125). Одной звездочкой помечены задачи повышенной трудности, двумя — наиболее сложные.

При составлении сборника широко использованы журналы и учебная литература, издаваемые в нашей стране примерно с 1850 г., а также несколько сотен иностранных журналов по вопросам элементарной математики. В значительной мере использован журнал «Математика в школе» за весь период его существования. Часть интересных задач по алгебре, планиметрии и стереометрии заимствована из сборников задач Пржевальского (Сборник задач по алгебре), Попруженко (Планиметрия) и Дзык (Стереометрия). Использованы и задачи по элементарной математике, которые предлагались в ряде стран (Франция, Англия, Германия, Италия, Польша, США, Португалия, Испания, Швеция, Китай и др.). В первую очередь я должен упомянуть здесь «Journal de mathématique élémentaire» и журнал «L'Education mathématique», а также «Mathematical Problem Papers» by T. B. W. Spencer; Alberto Foá «Lezioni di algebra con numerosissimi ezercizi.»

При окончательной обработке рукописи много ценных советов дал мне ее редактор С. И. Новоселов. Рукопись была прочитана членами кафедры высшей алгебры и элементарной математики Московского областного педагогического института — зав. кафедрой проф. И. К. Андроновым; членами кафедры: доц. Е. П. Шимбиревой, доц. Р. С. Черкасовым, доц. А. К. Окуневым, ст. преп. Н. И. Сырневым, которые дали мне очень много ценных советов. Выражаю большую благодарность зав. кафедрой проф. И. К. Андронову и всем членам кафедры за оказанную помощь. Много ценных советов я получил также от чл.-корр. АПН РСФСР П. А. Ларичева. Чертежи выполнены Н. А. Атабековым; им проделана очень большая работа: в ряде случаев Н. А. Атабеков предварительно изготовлял пространственные модели, а большинство стереометрических построений выполнены им в кабинетной проекции.

Первое издание сборника обсуждалось на школьной секции Московского математического общества; здесь были высказаны и некоторые деловые замечания, которые я учел при подготовке следующего издания.

Во втором издании книги мною были также учтены многие замечания и пожелания читателей, которым я весьма признателен. Прежде всего я дал краткие сведения *о линиях второго порядка*, необходимые для понимания формулировок некоторых задач и их решений, добавил одну главу (XXVI) — планиметрия со стереометрией — и ряд задач, интересных по методам их решения. Кроме того, были проверены все решения задач и исправлены неверные ответы. Большую работу в этом отношении проделал Д. Л. Векслер, который перерешал задачи сборника, дал ценные замечания и указал на необходимые исправления. Я приношу ему большую благодарность.

Создание высококачественного систематического сборника задач по элементарной математике для будущего учителя, а также для преподавателей математики средней школы — дело очень сложное, и я понимаю, что нужно еще много потрудиться над улучшением этой работы. Все критические замечания и пожелания прошу направлять по адресу: Москва, Подсосенский пер., д. 20, издательство «Высшая школа»; все эти замечания я приму с благодарностью.

Автор

Москва, 1960 г.

АЛГЕБРА

Глава I

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Тождественные преобразования многочленов

Доказать следующие тождества:

1. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(b+c)(c+a)(a+b)$.

2. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$.

3. $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+(x+yz)(y+zx)(z+xy)=$
$=(xyz+1)(x^2+y^2+z^2+2xyz-1)$.

4. $4[(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')]=$
$=[2(ac'+ca')-bb']^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')$.

5. $(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)-(ax+by+cz)^2=$
$=bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2$.

6. $(bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$.

7. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$.

8. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=$
$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$.

9. $(ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2+(cx-dy-az+bt)^2+$
$+(dx+cy-bz-at)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$.

10. $(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1=(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$.

11. $2(2x-a)^3-27a^2x=(x-2a)(4x+a)^2$.

12. $(x-y)(x+y)^3=x(x-2y)^3+y(2x-y)^3$.

13. $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)=$
$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

14. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$.

15. $(a^2-bc)^3+(b^2-ac)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)=$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$.

16. $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3=$
$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

17. $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3-$
$-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

18. $(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3+(3c-a-b)^3-$
$-3(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)=16(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

19. $$(na-b-c)^3+(nb-c-a)^3+(nc-a-b)^3-$$
$$-3(na-b-c)(nb-c-a)(nc-a-b)=$$
$$=(n+1)^2(n-2)(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

20*. $$a^3(b+c-a)^2+b^3(c+a-b)^2+c^3(a+b-c)^2+$$
$$+abc(a^2+b^2+c^2)+$$
$$+(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=$$
$$=2abc(bc+ca+ab).$$

21. $$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)=$$
$$=[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)](a+b)(b+c)(c+a).$$

22*. $(x+y+z)^3=(-x+y+z)^3+(x-y+z)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$

23. $xyz(x+y+z)^3-(yz+zx+xy)^3=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$

24*. $$4(x+y+z)^3-15[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2]-$$
$$-x(2x-y-z)^2-y(2y-z-x)^2-z(2z-x-y)^2=108xyz.$$

25*. $4(x^2+ax+a^2)^3-27a^2x^2(x+a)^2=(x-a)^2(2a+x)^2(2x+a)^2.$

26*. $$4[ab(x^2-y^2)+(a^2-b^2)xy]^2+[(a^2-b^2)(x^2-y^2)-4abxy]^2=$$
$$=(a^2+b^2)^2(x^2+y^2)^2.$$

27. $$[(x^2+y^2)^2+a^2x^2]^2-4a^2(x^2+y^2)^3=$$
$$=[(x^2+y^2+ay)^2-a^2(x^2+y^2)][(x^2+y^2-ay)^2-a^2(x^2+y^2)].$$

28*. $$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=$$
$$=12abc(a+b+c).$$

29. $$(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2+2a^2b^2c^2-a^4(b+c)^2-$$
$$-b^4(c+a)^2-c^4(a+b)^2=2(bc+ca+ab)^3.$$

30. $$(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2.$$

31. $$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

32. $$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

33*. $$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5=$$
$$=80xyz(x^2+y^2+z^2).$$

34*. $$25[(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7][(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3]=$$
$$=21[(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5]^2.$$

35*. $$(a+b+c+d)^5-(b+c+d)^5-(c+d+a)^5-(d+a+b)^5-$$
$$-(a+b+c)^5+(b+c)^5+(c+a)^5+(a+b)^5+(a+d)^5+(b+d)^5+$$
$$+(c+d)^5-a^5-b^5-c^5-d^5=60abcd(a+b+c+d).$$

36. $$(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2=$$
$$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3.$$

37. $$(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=$$
$$=2[(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+(x-y)^2(y-z)^2]=$$
$$=2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$$

38. $$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)=$$
$$=[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)](a+b)(b+c)(c+a)=$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

39*. $$[b^2c^2(a+d)+a^2d^2(c+b)](b-c)(a-d)+$$
$$+[c^2a^2(b+d)+b^2d^2(c+a)](c-a)(b-d)+$$
$$+[a^2b^2(c+d)+c^2d^2(a+b)](a-b)(c-d)=0.$$

40. $$a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3+\ldots$$
$$\ldots+(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n-1})a_n=(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n).$$

Произвести умножение следующих многочленов:

41. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

42. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$.

43. $(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd)$.

Упростить следующие выражения:

44. $$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+$$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

45. $(2a^2+3ab-b^2)^2-4(a^2-b^2)(a^2+3ab+2b^2)$.

46. $(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$.

47. $(abc+bcd+cda+dab)^2-(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$.

§ 2. Условные тождества между многочленами

Доказать, что:

1. Если $s=a+b+c$, то
$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

2. Если $a+b+c=0$, то

а) $a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)=c(c+b)(c+a)=abc$;

б) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

3. Если $a+b+c=0$, то

$a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$.

4*. Если $a+b+c=0$, то

а) $a^3+b^3+c^3=3abc$;

б) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=2(ab+bc+ca)^2=$
$=2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2$;

в) $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$;

г) $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=2\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{4}$;

д) $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2$.

5. Если $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$, то $xyz=0$.

6. Если $x=b^2+bc+c^2$ и $y=b^2c+c^2b$, то
$$4x^3-27y^2=(b-c)^2(2b^2+5bc+2c^2)^2.$$

7. Если $2s=a+b+c$, то

1) $a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)+$
$+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc$;

2) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$.

8. Если $a+b+c+d=A$, $a+b-c-d=B$,
$a-b+c-d=C$, $a-b-c+d=D$

и

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2),$$

то

$$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2).$$

9. Если $a+b+c+d=0$, то

а) $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2=$
$=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$;

б) $(a+b)(a+c)(a+d)=(b+c)(b+d)(b+a)=$
$=(c+d)(c+a)(c+b)=(d+a)(d+b)(d+c)$;

в) $ad(a+d)^2+bc(a-d)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2+$
$+ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0$;

г) $a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd$.

10. Если $yz+zx+xy=0$, то

$$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+y^4(z+x)^2+z^4(x+y)^2.$$

11. Если

$$y^2+yz+z^2=a^2,\quad z^2+zx+x^2=b^2,\quad x^2+xy+y^2=c^2,\quad yz+zx+xy=0,$$

то

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=0.$$

12. Если

$$X=ax+by+cz,\ Y=cx+ay+bz,\ Z=bx+cy+az,$$
$$A=ax+cy+bz,\ B=bx+ay+cz,\ C=cx+by+az,$$

то

$$(X-A)(X-B)(X-C)=(Y-A)(Y-B)(Y-C)=$$
$$=(Z-A)(Z-B)(Z-C)=XYZ-ABC.$$

13*. Если

$$u=x+y+z+a(y+z-2x),$$
$$v=x+y+z+a(z+x-2y),$$
$$w=x+y+z+a(x+y-2z),$$

то

$$27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)=u^3+v^3+w^3-3uvw.$$

14*. Если

$$X=ax+by+cz,\quad Y=ay+bz+cx,\quad Z=az+bx+cy,$$

то

а) $X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY=$
$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$;

б) $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

15*. Если

$$a_1^2+b_1^2=1,\quad a_2^2+b_2^2=1,\quad a_1a_2+b_1b_2=0,$$

то

$$a_1^2+a_2^2=1,\quad b_1^2+b_2^2=1,\quad a_1b_1+a_2b_2=0.$$

16.** Если

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,\quad a_2^2+b_2^2+c_2^2=1,\quad a_3^2+b_3^2+c_3^2=1,$$
$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0,\quad a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0,\quad a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0,$$

то

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\quad b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,\quad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,\quad a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0,\quad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0.$$

17*. Если

$$bc-p^2=A,\quad ac-q^2=B,\quad ab-r^2=C,$$
$$qr-ap=P,\quad pr-bq=Q,\quad pq-cr=R,$$

то

$$(abc+2pqr-ap^2-bq^2-cr^2)^2=ABC+2PQR-AP^2-BQ^2-CR^2.$$

§ 3. Симметрические многочлены

Выразить через основные симметрические многочлены следующие симметрические функции:

1. $x^3+y^3+z^3-3xyz.$

2. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2.$

3. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2.$

4*. $x^5y^2+x^2y^5+x^5z^2+x^2z^5+y^5z^2+y^2z^5.$

5. $(x+y)(y+z)(z+x).$

6. $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2).$

7. $(x+y)(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)(z+u).$

8. $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2.$

9. $(xy+zu)(xz+yu)(xu+yz).$

10*. $x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3.$

11*. $x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ldots+x_n^4.$

12.** $x_1^5+x_2^5+x_3^5+\ldots+x_n^5.$

§ 4. Делимость многочленов

1. Доказать, что многочлен

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

делится на $(b-c)(c-a)(a-b)$; найти частное.

2. Доказать, что многочлен

$$(b^2c^2+a^2d^2)(b-c)(a-d)+(c^2a^2+b^2d^2)(c-a)(b-d)+$$
$$+(a^2b^2+c^2d^2)(a-b)(c-d)$$

делится на

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d);$$

найти частное.

3. Доказать, что если n и k — целые положительные числа, причем n делится на k, то x^n-a^n делится на x^k-a^k; найти частное.

4. Доказать, что если n и k — целые положительные числа, n делится на k, причем в частном получается нечетное число, то x^n+a^n делится на x^k+a^k; найти частное.

5. Доказать, что если n и k — целые положительные числа, n делится на k, причем в частном получается четное число, то $x^n - a^n$ делится на $x^k + a^k$; найти частное.

6. Доказать, что $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$, где n — целое положительное число; найти частное.

7. Доказать, что $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, где n — целое положительное число, делится на $(x-1)^2$; найти частное.

8. Доказать, что многочлен

$$n^2x^{n+2} - (2n^2+2n-1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1,$$

где n — целое положительное число, делится на $(x-1)^3$; найти частное.

9. Доказать, что

$$x^n[z^2(x-y)^2 - y^2(z-x)^2] + y^n[x^2(y-z)^2 - z^2(x-y)^2] + \\ + z^n[y^2(z-x)^2 - x^2(y-z)^2],$$

где n — целое положительное число, делится на $(y-z)(z-x)(x-y)$; найти частное.

10. Доказать, что $a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)$, где n — целое положительное число, делится на $(b-c)(c-a)(a-b)$; найти частное.

11. Вычислить частные:

а) $\dfrac{x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$;

б) $\dfrac{x^4(y^3-z^3) + y^4(z^3-x^3) + z^4(x^3-y^3)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$.

12. Доказать, что $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ делится на $(x+1)^2$. Найти частное и выписать его члены, содержащие x^{2n-m} и x^{2n+m}.

13. Доказать, что

$$(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1},$$

где n — целое положительное число, делится на

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

14. Доказать, что при $n = 6k-1$, где k — целое положительное число $\geqslant 1$, выражение

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

делится на x^2+xy+y^2, а при $n = 6k+1$, где k — целое положительное число $\geqslant 1$, делится на $(x^2+xy+y^2)^2$.

15. Доказать, что

$$x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$$

делится на

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

16. Доказать, что

$$a^4(b^2+c^2-a^2)^3 + b^4(c^2+a^2-b^2)^3 + c^4(a^2+b^2-c^2)^3$$

делится на

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2.$$

17. Доказать, что

$$(x+y+z)^{2n}(y+z)^{2n} - (z+x)^{2n} - (x+y)^{2n} + x^{2n} + y^{2n} + z^{2n},$$

где n — целое положительное число, делится на

$$(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4.$$

18. Пусть $P(x, y)$ — симметрический многочлен относительно x и y и пусть он делится на $x-y$. Доказать, что тогда он делится и на $(x-y)^2$.

19. Доказать, что следующие многочлены:

а) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$;

б) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$;

в) $(n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$,

где n и m — целые положительные числа, делятся на $(x-1)^3$.

20. Доказать, что многочлен

$$x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2} + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1} - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1} - 1$$

делится на $(x-1)^5$ и не делится на $(x-1)^6$.

21. Доказать, что необходимым и достаточным условием делимости многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

на $(x-1)^k$ является соблюдение следующих условий:

$$\begin{gathered}
a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 = 0,\\
a_{n-1} + 2a_{n-2} + \ldots + na_0 = 0,\\
1 \cdot 2a_{n-2} + 2 \cdot 3a_{n-3} + \ldots + n(n-1)a_0 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k!\,a_{n-k} + (k+1)!\,a_{n-k-1} + \frac{(k+2)!}{2!}a_{n-k-2} + \ldots + \frac{n!}{(n-k)!}a_0 = 0.
\end{gathered}$$

22. Доказать, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0$$

не имеет кратных корней.

23. Доказать, что $x^{3p} + x^{3q+1} + x^{3r+2}$ делится на $x^2 + x + 1$, где p, q, r — целые положительные числа.

24. При каком условии $x^{2n} + x^n + 1$ делится на

$$x^2 + x + 1,$$

где n — целое положительное число.

25. При каком условии $(x+1)^n - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$, где n — целое положительное число.

26. При каком условии $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$, где n — целое положительное число.

27. При каком условии $(x+1)^n - x^n - 1$ делится на $(x^2 + x + 1)^2$, где n — целое положительное число.

28. При каком условии $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на $(x^2 + x + 1)^2$, где n — целое положительное число.

29. Доказать, что $(x+1)^n - x^n - 1$ ни при каком целом положительном n не делится на $(x^2 + x + 1)^3$.

30. Доказать, что если

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

делится на $x - 1$, то

$$a_0x^{kn} + a_1x^{k(n-1)} + \ldots + a_n$$

делится на $x^k - 1$.

31. Доказать, что многочлен

$$x^{3n} + (x^2 + x + 1)(1 - x^n)x^{n-1} - 1$$

делится на

$$x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1,$$

где n — целое положительное число.

32. Доказать, что многочлен

$$x^{pa}+x^{pb+1}+x^{pc+2}+\ldots+x^{pl+p-1}$$

делится на

$$x^{p-1}+x^{p-2}+x^{p-3}+\ldots+x+1,$$

где p, a, b, c, ..., l — целые положительные числа.

§ 5. Разложение на множители

Разложить на линейные множители относительно x, т. е. на множители первой степени относительно x, следующие выражения:

1. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12.$

2. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12.$

3. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2.$

4. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2.$

5. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$

6. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24.$

7. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$

8. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2.$

9. $x^3+9x^2+11x-21.$

10. $x^3-6x^2-x+30.$

11. $8x^3-36x^2+54x-27.$

12. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15.$

13. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5.$

14. $x^4-20x^3+150x^2-500x+625.$

15. $x^3+9x^2+23x+15.$

16. $x^3-x^2-21x+45.$

17. $9x^3-15x^2-32x-12.$

18. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6.$

19. $x^4-2x^3-11x^2+12x+36.$

20.** При каком необходимом и достаточном условии выражение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$

второй степени относительно x и y разлагается в произведение двух линейных множителей относительно x и y?

21. При каком необходимом и достаточном условии выражение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2$$

разлагается в произведение двух линейных и однородных множителей относительно x, y и z.

В следующих примерах следует разложить данные выражения, зависящие от двух и трех аргументов, в произведение множителей первой и второй степени относительно аргументов. Множители второй степени относительно аргументов должны быть лишь такими, дальнейшее разложение которых на множители первой степени уже невозможно (см. выше задачи 20 и 21).

22. $(1+x^2)y^2+2(x-y)(1+xy)+1.$

23. $(1+a^2+b^2-2a)^2-(4b-4ab)(1+a^2-b^2-2a).$

24. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

25. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

26. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

27. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

28. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$.

29. $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$.

30. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$.

31. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+abc(a+b+c)+$
$+(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$.

32. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

33. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.

34. $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)+$
$+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$.

35. $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$.

36. $a^2(b+c-2a)+b^2(c+a-2b)+c^2(a+b-2c)+$
$+2(c^2-a^2)(c-b)+2(a^2-b^2)(a-c)+2(b^2-c^2)(b-a)$.

37. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+a(a-b+c)(a+b-c)+$
$+b(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$.

38. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

39. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

40. $x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)+z(x+y)(x^2-y^2)$.

41. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$.

42. $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

43. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.

44. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.

45. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

46. $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$.

47. $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$.

48. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

49. $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+$
$+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$.

50. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$.

51. $a^2(b-c)(c+a-b)(a+b-c)+b^2(c-a)(a+b-c)(b+c-a)+$
$+c^2(a-b)(b+c-a)(c+a-b)$.

52. $a^3(b-c)(c-d)(d-b)-b^3(c-d)(d-a)(a-c)+$
$+c^3(d-a)(a-b)(b-d)-d^3(a-b)(b-c)(c-a)$.

53. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)+$
$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$.

54. $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-3abc$.

55. а) $x^{2n}-1$;

б) $x^{2n}+1$;

в) $x^{2n+1}-1$;

г) $x^{2n+1}+1$,

где n — целое положительное число. Произвести также разложение на множители 1-й и 2-й степени с действительными коэффициентами (множители второй степени с мнимыми корнями).

56. $$x^{10}+x^5+1.$$

§ 6. Разные задачи на многочлены

1. Разложить на линейные множители (т. е. на множители 1-й степени) относительно a, b, c, d выражение

$$(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2).$$

2. Представить произведение

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

в виде суммы трех квадратов рациональных функций от a, b, c.

3. Доказать, что

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0$$

при всех действительных значениях x.

4. Дано:

$$a+b+c=0,$$
$$a^2+b^2+c^2=1.$$

Вычислить

$$a^4+b^4+c^4.$$

5. Доказать, что в произведении

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется x в нечетных степенях.

6.** Доказать, что

$$\frac{x^m-1}{x-1}\cdot\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}\cdot\frac{x^{m-2}-1}{x^3-1}\cdots\frac{x^{m-p+1}-1}{x^p-1}$$

есть целая рациональная функция от x; m и p — целые положительные числа, причем $m\geqslant p$.

7.** Доказать тождества:

а) $x^n-C_n^1(x-1)^n+C_n^2(x-2)^n-\ldots+(-1)^nC_n^n(x-n)^n=n!$;

б) $x^p-C_n^1(x-1)^p+C_n^2(x-2)^p-\ldots+(-1)^nC_n^n(x-n)^p=0,$

где n и p — целые положительные числа и $p<n$.

8. Определить значения a и b, при которых

$$x^4+(a+b)x^3+(a-b)x^2+(a^2+2b-1)x+a+b+4$$

делится на $(x-1)^2$. Чему будет равно частное?

9. Доказать, что произведение

$$xy(3x+2)(5y+2)$$

есть разность квадратов двух многочленов относительно x и y с целыми коэффициентами.

10. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающуюся после раскрытия скобок и приведения подобных членов, в выражении

$$(1-3x+2x^2)^{743}(1+3x-2x^2)^{744}.$$

11. Пусть $F_n(x)=x^k-C_n^1(x+1)^k+C_n^2(x+2)^k-C_n^3(x+3)^k+\ldots$
$\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}(x+n-1)^k+(-1)^n(x+n)^k$.

Доказать, что

$$F_n(x+1)+F_{n+1}(x)=F_n(x).$$

12. Доказать, что если от деления целой рациональной функции $P(x)$ на $x-a$ в частном получается многочлен $Q(x)$, а в остатке R, то

$$S(Q)(1-a)=S(P)-R,$$

где $S(Q)$ — сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$, а $S(P)$ — сумма коэффициентов многочлена $P(x)$.

13.** Найти необходимое и достаточное условие, при котором

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$

было бы квадратом линейной однородной функции относительно x, y и z.

14*. Доказать, что если

$$(a-\lambda)x^2+(b-\lambda)y^2+(c-\lambda)z^2+2fyz+2gzx+2hxy$$

есть квадрат линейной однородной функции относительно x, y, z, то

$$\lambda f=af-gh,\quad \lambda g=bg-hf,\quad \lambda h=ch-fg.$$

15. Найти коэффициенты при x^n и x^{n-2} в произведении

$$(1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n)(x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n).$$

Глава II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. Тождественные преобразования алгебраических дробей

Упростить следующие выражения:

1. $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$.

2. $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$.

3. $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$.

4. $\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1-3\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\dfrac{1+x}{1-3x}}}$.

5. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^3-(x^2-1)^3}{x^3(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^3-1}{x^4-(x+1)^3}$.

6. $\dfrac{\dfrac{x-a}{1+ax}-\dfrac{x-b}{1+bx}}{1+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(1+ax)(1+bx)}}$.

7. $\left(\dfrac{x^2}{y^2}-2+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\dfrac{x^4y^4}{xy+y^2}\,\dfrac{\dfrac{x}{y}-1+\dfrac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^3}$.

8. $\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

9. $\dfrac{a+b}{ax+by}+\dfrac{a-b}{ax-by}+\dfrac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}-\dfrac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$.

10. $\dfrac{x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\dfrac{y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\dfrac{1}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{x^2+3y^2}{x^4-y^4}$.

11. $\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

12. $\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}+\dfrac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

13. $\dfrac{(a-x)(a-y)(a-z)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(b-x)(b-y)(b-z)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(c-x)(c-y)(c-z)}{(c-a)(c-b)}$.

14. $\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{\dfrac{b^2-c^3}{a}+\dfrac{c^2-a^2}{b}+\dfrac{a^2-b^2}{c}}{\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}}$.

18. $\dfrac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$.

19. $\dfrac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$.

20. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+1\right)^2}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-1}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a}{b}+1}:\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}+1}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1}$.

21. $\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)}$.

22. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

23. $\dfrac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}$.

24. $\dfrac{(a+b+c)(cb-a^2)+(bc+ca+ab)(a-b)+(bc+ca+ab)(a-c)}{cb-a^2+b(a-b)+c(a-c)}$.

25. $\dfrac{(a+b+c)(bc-a^2)+(a^2+b^2+c^2)(a-b)+(a^2+b^2+c^2)(a-c)}{bc-a^2+b(a-b)+c(a-c)}$.

26. $\dfrac{m(b^2c^3-b^3c^2)+m^2(b^3c-bc^3)+m^3(bc^2-b^2c)}{a(b^2c^3-b^3c^2)+a^2(b^3c-bc^3)+a^3(bc^2-b^2c)}$.

27. $\dfrac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}$.

28. $\dfrac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$.

29. $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$.

30. $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$.

31. $\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$.

32. $\dfrac{1}{1-\left[\dfrac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}\cdot\dfrac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}$.

33. $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$.

34. $\dfrac{(1-10x^2+5x^4)(5-30x^2+5x^4)+(5x-10x^3+x^5)(20x-20x^3)}{(5x-10x^3+x^5)^2+(1-10x^2+5x^4)^2}$.

35. $\left(\dfrac{y^2-yz+z^2}{x}+\dfrac{x^2}{y+z}-\dfrac{3}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}}{\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}}+(x+y+z)^2.$

36. $a(x+y)+\dfrac{\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a-y}+\dfrac{x}{(a-x)^2}-\dfrac{y}{(a-y)^2}}{\dfrac{1}{(a-y)(a-x)^2}-\dfrac{1}{(a-x)(a-y)^2}}.$

37. $\dfrac{\left[1+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right]\left[1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right]}{\left[1-\dfrac{c^3}{(a+b)^3}\right]\left(1+\dfrac{c}{a+b}\right)}.$

38. $\dfrac{\dfrac{a+2b}{ab^4}-\dfrac{2a+b}{a^4b}}{\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)-\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)}.$

39. $\dfrac{\left(x^n-1-\dfrac{7-x^n}{3+x^n}\right)\dfrac{4}{x^{n+2}+3x^2}}{\dfrac{6x^{2n}-24}{x^{2n+3}+6x^{n+3}+9x^3}\cdot\dfrac{2x}{3x^n+6}}.$

40. $\dfrac{\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+x^2+2x^3}}.$

41*. $\dfrac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^n}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^n}{(c-a)(c-b)},$

где n — целое положительное число.

42. $\dfrac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\dfrac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\ldots$
$\ldots+\dfrac{a_n}{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})(a_1+a_2+\ldots+a_n)}.$

43. Найти сумму n дробей

$$\frac{2x-a}{x^2-ax+a^2},\quad \frac{4x^3-2a^2x}{x^4-a^2x^2+a^4},\quad \frac{8x^7-4a^4x^3}{x^8-a^4x^4+a^8},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \frac{2^n x^{2^n-1}-2^{n-1}x^{2^n-1-1}a^{2^n-1}}{x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^n-1}+a^{2^n}}.$$

44. Упростить произведение

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\ldots\left(x^{2^{n-1}}+\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right).$$

45. Упростить произведение

$$(a^2-ax+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)\ldots(a^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+x^{2^n}).$$

§ 2. Условные тождества

1. Вычислить

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right),$$

если $x+y+z=0$.

2. Доказать, что

$$m_1+m_2+m_3=m_1m_2m_3,$$

где

$$m_1=\frac{a+b}{a-b},\quad m_2=\frac{c+d}{c-d},\quad m_3=\frac{ac-bd}{ad+bc}.$$

3. Доказать, что если

$$a^2+b^2=(a+b-c)^2,$$

то

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

4. Доказать, что если $a_0x_1^4+a_1x_1^3+a_2x_1^2+a_3x_1+a_4=0$, $4a_0x_1^3+3a_1x_1^2+2a_2x_1+a_3\neq 0$, $12a_0x_1^2+6a_1x_1+2a_2\neq 0$ и x_2, x_3, x_4 — три других корня уравнения $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$, то

$$\frac{1}{x_1-x_2}+\frac{1}{x_1-x_3}+\frac{1}{x_1-x_4}=0.$$

5. Доказать, что если

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

6. Доказать, что если

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)},$$

где

$$x\neq y,\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0,\ yz\neq 1,\ xy\neq 1,$$

то

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

7. Дана функция

$$y=ax+b.$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — произвольные (и попарно различные) значения x, а y_1, y_2, y_3 — соответствующие значения y. Доказать, что

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}.$$

8. Дана функция

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

причем $ad-bc\neq 0$. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные (и попарно различные) значения x, а y_1, y_2, y_3, y_4 — соответствующие значения y. Доказать, что тогда

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}:\frac{y_4-y_1}{y_3-y_4}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x_4-x_1}{x_3-x_4}.$$

9. Дано: $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ и

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0.$$

Доказать, что тогда

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Верно ли обратное положение?

10. Доказать, что если

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c},$$

то

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}.$$

11. Доказать, что если $a+b=1$, то

$$\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

12. Упростить выражение

$$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}$$

при условии, что

$$ab=cd.$$

13. Упростить выражение

$$\frac{abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{ab+cd}$$

при условии, что $a+b=c+d$.

14*. Доказать, что если

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

то две из этих дробей равны 1, а третья -1.

15*. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$\left(\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}+\frac{c^2}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}+\frac{a-b}{c^2}\right)=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3.$$

16. Доказать, что если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}},$$

где n — целое положительное число.

17. Доказать, что если

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

то

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1,$$

где n — целое положительное число.

18. Даны соотношения

$$x'=a_1x+b_1y+c_1y'=a_2x+b_2y+c_2.$$

Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) — произвольные пары значений x и y, такие, что $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2\neq 0$, а (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3') — соответствующие им значения x' и y' $(x_1'=a_1x_1+b_1y_1+c_1$, $y_1'=a_2x_1+b_2y_1+c_2$, $x_2'=a_1x_2+b_1y_2+c_1$ и т. д.).

Доказать, что дробь

$$\frac{x_1'y_2'+x_2'y_3'+x_3'y_1'-x_1'y_3'-x_2'y_1'-x_3'y_2'}{x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2}$$

выражается лишь через a_1, b_1, a_2, b_2 и найти это выражение.

19. Даны соотношения:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z,\ y' = a_2x + b_2y + c_2z,\ z' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Пусть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) — произвольные тройки значений x, y, z, такие, что $x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 \neq 0$, а (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2), (x'_3, y'_3, z'_3) — соответствующие значения x', y', z'.

Доказать, что дробь

$$\frac{x'_1y'_2z'_3 + x'_2y'_3z'_1 + x'_3y'_1z'_2 - x'_1y'_2z'_3 - x'_2y'_1z'_3 - x'_3y'_2z'_1}{x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1}$$

выражается лишь через a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 и найти это выражение.

Глава III

РАДИКАЛЫ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Доказать следующие равенства:

1. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$

2. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.$

3. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$

4. $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$

5. $\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}.$

6. $\frac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}.$

7. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{5}).$

8. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}.$

9. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}.$

10. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}.$

11. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}.$

12. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$

13. $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=2.$

14. Доказать, что если

$$x=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}},\quad \frac{a+b}{a-b}>0,\ p \text{ и } q \text{ рациональны, то}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{x^p}+\frac{1}{x^q}\right)=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}.$$

Уничтожить иррациональность в знаменателе;

15. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

16. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

17. $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

18. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

19. $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

20. $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$.

21. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

Упростить следующие выражения:

22. $\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}$.

23. $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^p\left(q-\frac{1}{p}\right)^q}$, $p>0,\ q>0,\ pq>1$.

24. $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$, $p>0,\ q>0,\ pq>1$.

25. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$,

где

$$x=\frac{a^2+b^2}{2ab},\quad a>0,\ b>0,\ a\neq b.$$

26. $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$, $a\neq 0$.

27. $\dfrac{1+(a+\sqrt{a^2-1})^2\,(b+\sqrt{b^2-1})^2}{(a+\sqrt{a^2-1})\,(b+\sqrt{b^2-1})}$, $a>1,\ b>1$.

28. $\left(\dfrac{2x^2+1+x\sqrt{4x^2+3}}{2x^2+3+x\sqrt{4x^2+3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

29. $\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$, $n>2$.

30. $\dfrac{1-ab+\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+b^2}}{1-ab+\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}}$.

31. $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}x^2-2ax+a\sqrt{b}$, где $x=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$,

$a>0,\ b>0,\ a\neq b$.

32. $\dfrac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, где $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a>0,\ b>0$.

33. $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, где $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$.

34. $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+bx+c}$, где $x=-\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a-b}}$, $b^2>ac$, $a>b$.

35. $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$, где $x=\dfrac{2a}{b+\dfrac{1}{b}}$, $a>0$.

36*. $\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$,

где

$$x=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{2mn}{m-n}},\quad a>1,\quad m\neq n,\quad m\neq 0,\quad n\neq 0.$$

37. $(x^{-1}+a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}}-b^{-1}x^{\frac{1}{n}}$,

где

$$x=ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}-b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1},\quad a>0,\ b>0.$$

38. $\left[\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$,

где

$$x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}},$$

причем

$$a>0,\quad n>m>0.$$

39. $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

где

$$x=\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\quad b>a>0.$$

40. $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$,

где

$$x=\frac{2mn}{n^2+1},$$

причем $m>0$, $0<n<1$.

41*. Упростить выражение

$$\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$x=4(a-1).$$

Рассмотреть два случая:
а) $1<a<2$; б) $a>2$.

42. $\left[(x+a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}}+(x+a)^{-\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}}-2\right]^{-\frac{1}{2}}$,

где

$$x=a\frac{m^3+n^3}{m^3-n^3},$$

причем $m>n>0$.

43.
$$\left[\frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(b+x)^{-\frac{1}{2}}+(a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2},$$

где
$$x=\sqrt{ab},$$
причем $a>b>0$.

44.
$$(1+x^{-1})^{-2}+(1-x^{-1})^{-2},$$

где
$$x=(1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}},$$
причем $n>1$.

45.
$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}},$$

где
$$x=\frac{1}{4}z^2+\frac{(a-b)^2}{4z^2}-\frac{a+b}{2};$$
числа a и b — действительны и $z\geqslant|a-b|^{\frac{1}{2}}$.

46.
$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}},$$

где
$$x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}} \text{ и } 0<a<b<2a.$$

47.
$$\left[\sqrt[3]{(n^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\sqrt[3]{(n^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right]^{-2},$$

где $n>1$.

48.
$$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

где
$$x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1} \quad \text{и} \quad k>1.$$

49.
$$\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right):\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)^{-1},$$

где
$$0<a<1.$$

50.
$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}},$$

где
$$x=\sqrt{ab}, \quad a>b>0.$$

51.
$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}},$$

где x — действительное число, причем $|x|\geqslant 2$.

52. Вычислить
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где
$$2p=a+b+c,$$
$$a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2},$$
$$b=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2},$$
$$c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Преобразовать результат к функции, рациональной относительно x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3.

53. Вычислить

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где

$$2p = a+b+c,$$

$$a = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2},$$

$$b = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2},$$

$$c = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Преобразовать результат к виду $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, где P, Q и R — рациональные функции от x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3. Получить отсюда (при $z_1 = z_2 = z_3 = 0$) результат предыдущей задачи.

§ 2. Условные тождества. Преобразование равенств, содержащих иррациональные выражения

1. Доказать, что если

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}} = a,$$

то

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Избавиться от иррациональности в следующих равенствах:

2. $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+c = 0.$

3. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+b = 0.$

4. $p\sqrt[3]{a^2}+q\sqrt[3]{a}+r = 0.$

5.** $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e} = 0.$

6. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$

7. $(xy)^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = a^2,\ a>0,\ x>0,\ y>0.$

8. $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = a^2.$

9. $(x^2+y^2)^2 = \left[(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}\right]\left[(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}\right].$

10. Доказать, что если

$$(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}+(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}+(x-y)\sqrt[3]{1-z^3} = 0,$$

то

$$(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3) = (1-xyz)^3.$$

Глава IV

ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Эквивалентность уравнений

1. Верно ли утверждение, что уравнения

$$f(x)=0 \text{ и } f(x)\varphi(x)=0$$

эквивалентны. Привести пример, когда

а) эти уравнения эквивалентны;

б) все корни уравнения $f(x)=0$ являются корнями уравнения $f(x)\varphi(x)=0$, но не все корни уравнения $f(x)\varphi(x)=0$ являются корнями уравнения $f(x)=0$;

в) все корни уравнения $f(x)\varphi(x)=0$ являются корнями уравнения $f(x)=0$, но не все корни уравнения $f(x)=0$ являются корнями уравнения $f(x)\varphi(x)=0$.

2. Могут ли уравнения $f(x)=0$ и $f(x)\varphi(x)=0$ не иметь общих корней?

3. Могут ли уравнения

$$f(x)=0 \text{ и } f(x)+\varphi(x)=\varphi(x)$$

быть неэквивалентными?

4. Даны два уравнения: $f_1(x)=f_2(x)$, $f_1(x)+f_3(x)=f_2(x)+f_3(x)$. Какое из этих уравнений есть следствие другого (мы говорим, что уравнение $B=0$ есть следствие уравнения $A=0$, если все корни уравнения $A=0$ являются корнями уравнения $B=0$)?

5. Какое из уравнений:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_3(x)}{f_4(x)} \text{ и } f_1(x)f_4(x)=f_2(x)f_3(x),$$

есть следствие другого? При каком условии эти уравнения будут эквивалентны?

6. Даны два уравнения:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_3(x)}{f_4(x)}$$

и

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1(x)+f_3(x)}{f_2(x)+f_4(x)}.$$

а) При каком условии второе уравнение есть следствие первого?

б) При каком условии первое уравнение есть следствие второго?

в) При каком условии эти уравнения эквивалентны?

7. Даны три уравнения:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_3(x)}{f_4(x)},$$

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f_1(x)-f_2(x)}=\frac{f_3(x)+f_4(x)}{f_3(x)-f_4(x)},$$

$$\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_1(x)+f_2(x)}=\frac{f_3(x)-f_4(x)}{f_3(x)+f_4(x)}.$$

Доказать, что из первого уравнения следует либо второе, либо третье (либо и то и другое).

8. Будут ли эквивалентны уравнения

$$f(x)=0 \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)}=0.$$

9. Будут ли эквивалентны уравнения

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{\varphi(x)}=0 \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)\varphi(x)}=0.$$

10. Будут ли уравнения

$$\frac{\sqrt{f_1(x)}}{\sqrt{f_2(x)}}=\frac{\sqrt{f_3(x)}}{\sqrt{f_4(x)}}$$

и

$$\frac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}}=\frac{\sqrt{f_3(x)}-\sqrt{f_4(x)}}{\sqrt{f_3(x)}+\sqrt{f_4(x)}}$$

эквивалентны (над полем действительных чисел)?

11. Верно ли утверждение, что уравнения

$$\frac{\sqrt{f_1(x)}}{\sqrt{f_2(x)}}=\frac{\sqrt{f_3(x)}}{\sqrt{f_4(x)}}, \quad \frac{\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}=\frac{\sqrt{f_3(x)}+\sqrt{f_4(x)}}{\sqrt{f_3(x)}-\sqrt{f_4(x)}}$$

эквивалентны (над полем действительных чисел).

12. Верно ли утверждение, что уравнения

$$\frac{\sqrt[3]{f_1(x)}}{\sqrt[3]{f_2(x)}}=\frac{\sqrt[3]{f_3(x)}}{\sqrt[3]{f_4(x)}}$$

и

$$\frac{\sqrt[3]{f_1(x)}-\sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{f_1(x)}+\sqrt[3]{f_2(x)}}=\frac{\sqrt[3]{f_3(x)}-\sqrt[3]{f_4(x)}}{\sqrt[3]{f_3(x)}+\sqrt[3]{f_4(x)}}$$

эквивалентны (над полем действительных чисел).

13. Будут ли следующие уравнения эквивалентны (над полем действительных чисел). Установить также, при каких условиях они эквивалентны:

а) $f(x)=1$, $\log f(x)=0$;

б) $f(x)=\varphi(x)$, $\log f(x)=\log\varphi(x)$;

в) $f(x)=\varphi(x)$, $\log[f(x)-\varphi(x)+1]=0$;

г) $f(x)=0$, $\sqrt[3]{f(x)}=0$;

д) $f(x)\varphi(x)=a$, $f(x)=\dfrac{a}{\varphi(x)}$;

е) $f(x)=0$, $\arcsin f(x)=0$;

ж) $f(x)=0$ $\operatorname{arctg} f(x)=0$;

з) $f(x)=0$, $f(x)\cdot 2^{f(x)}=0$;

и) $f(x)=0$; $f(x)\cdot 2^{\varphi(x)}=0$;

к) $\log\sqrt{f(x)}=0$, $f(x)=1$;

л) $f(x)\varphi(x)=1$, $\log|f(x)|+\log|\varphi(x)|=0$;

м) $\log x^2=0$, $2\log x=0$;

н) $\log x^2=0$, $2\log|x|=0$;

о) $\log x^3=0$, $3\log x=0$;

п) $\log\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|=0$, $\log|f(x)|-\log|\varphi(x)|=0$;

р) $\log|f(x)\varphi(x)|=0$, $\log|f(x)|+\log|\varphi(x)|=0$;

с) $\log[f(x)\varphi(x)]=0$, $\log|f(x)|+\log|\varphi(x)|=0$;

т) $\log \sqrt{x} = 0$, $\frac{1}{2} \log x = 0$;

у)* $\operatorname{tg}[f(x) + \varphi(x)] = 0$, $\operatorname{tg} f(x) + \operatorname{tg} \varphi(x) = 0$;

ф) $x = 0$, $\operatorname{tg}(\sin x) = 0$;

х) $f(x) = 0$, $\sin \operatorname{tg} f(x) = 0$;

ц) $f(x) = \varphi(x)$, $\operatorname{arc\,tg} f(x) = \operatorname{arc\,tg} \varphi(x)$.

14. Какое из двух уравнений каждой пары есть следствие другого (над полем действительных чисел)?

а) $f(x) = 0$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$;

б) $f(x) = 0$, $\sin f(x) = 0$;

в) $f(x) = 1$, $f^2(x) = 1$;

г) $f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} f(x) = 1$.

15. Уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней. Пусть $\varphi(x) = 0$ — какое-нибудь уравнение. При каком условии уравнения

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) = 0$$

будут эквивалентны?

16. Дано уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x}.$$

Возведем обе его части в квадрат:

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})^2 = x.$$

а) Могут ли быть «утеряны» корни в результате этого преобразования?

б) Могут ли появиться «посторонние» корни?

17. Рассмотрим два уравнения:

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

и

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x). \tag{2}$$

а) Могут ли быть «утеряны» корни в результате перехода от уравнения (1) к уравнению (2)?

б) Могут ли быть «приобретены» посторонние корни?

в) Рассмотреть примеры:

а) $\operatorname{arc\,sin} x = 2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{2}}$,

б) $x = 2x$.

18. Какое из уравнений

$$f(x) = \varphi(x), \quad \operatorname{arc\,sin} f(x) = \operatorname{arc\,sin} \varphi(x)$$

есть следствие другого? При каком условии эти уравнения эквивалентны?

19. Будут ли эквивалентны уравнения

$$\cos f(x) = 0$$

и

$$\operatorname{arc\,cos}[\cos f(x)] = 1?$$

20. Будут ли эквивалентны уравнения

$$\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1 - f^2(x)} = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1 - \varphi^2(x)}$$

и

$$f(x) = \varphi(x)?$$

21. Будут ли эквивалентны уравнения

$$\arccos\sqrt{1+f^2(x)} = \arccos\sqrt{1+\varphi^2(x)} \quad \text{и} \quad f(x)=\varphi(x)?$$

22. Будут ли эквивалентны (над полем действительных чисел) системы уравнений?

$$x+y=0,\ x^2+y^2=2$$

и

$$\sin(x+y)=0,\ x^2+y^2=2.$$

23. Будут ли эквивалентны системы уравнений?

$$x+y=0,\ x^2+y^2=5$$

и

$$\sin(x+y)=0,\ x^2+y^2=5.$$

24. При каком условии системы уравнений

$$f_1=0,\ f_2=0,\ f_3=0$$

и

$$f_1-f_2=0,\ f_2-f_3=0,\ f_3-f_1=0,$$

где f_1, f_2 и f_3 — функции от любого числа переменных, будут эквивалентны?

25. Будут ли эквивалентны (над полем действительных чисел) следующие системы уравнений?

$$f^2(x)+\varphi^2(y)=1,\ \sin[\pi f(x)\varphi(y)]=1$$

и

$$f(x)=\varphi(y),\ |f(x)+\varphi(y)|=\sqrt{2}.$$

26. Имеются два уравнения с двумя неизвестными:

$$f(x,\ y)=0,\ \varphi(x,\ y)=0.$$

Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 — какие-нибудь числа. При каком достаточном условии система уравнений

$$a_1f(x,\ y)+b_1\varphi(x,\ y)=0,\ a_2f(x,\ y)+b_2\varphi(x,\ y)=0$$

будет эквивалентна (над полем комплексных чисел) заданной системе?

27. Рассмотрим три уравнения с тремя неизвестными:

$$f(x,\ y,\ z)=0,\ \varphi(x,\ y,\ z)=0,\ \psi(x,\ y,\ z)=0.$$

Пусть a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 — какие-нибудь числа; при каком достаточном условии система уравнений

$$\begin{aligned}
&a_1f(x,\ y,\ z)+b_1\varphi(x,\ y,\ z)+c_1\psi(x,\ y,\ z)=0,\\
&a_2f(x,\ y,\ z)+b_2\varphi(x,\ y,\ z)+c_2\psi(x,\ y,\ z)=0,\\
&a_3f(x,\ y,\ z)+b_3\varphi(x,\ y,\ z)+c_2\psi(x,\ y,\ z)=0
\end{aligned}$$

будет эквивалентна (над полем комплексных чисел) заданной системе?

28.** Доказать, что уравнения

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

и

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a>c>0$, $b=\sqrt{a^2-c^2}$, эквивалентны (над полем действительных чисел), т. е. любое решение $x=x_0$, $y=y_0$ первого уравнения будет решением и второго уравнения и обратно.

29.** Доказать, что уравнения

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$$

и

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $c>a>0$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$, эквивалентны (над полем действительных чисел).

30. Доказать, что уравнения

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

и

$$y^2=2px,$$

где $p>0$, эквивалентны (над полем действительных чисел).

31. Дано, что уравнения

$$ax^2+bxy+cy^2+d=0$$

и

$$x^2+y^2-1=0$$

эквивалентны (над полем действительных чисел).
Доказать, что тогда $b=0$, $a=c=-d\neq 0$.

32. Дано, что уравнения

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

и

$$x^2+y^2-1=0$$

эквивалентны (над полем действительных чисел). Доказать, что тогда

$$b=d=e=0,\quad a=c=-f\neq 0.$$

33. Дано, что уравнение

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

эквивалентно уравнению

$$xy=1$$

(над полем комплексных чисел).
Доказать, что в таком случае

$$a=c=d=e=0,\quad \text{а}\quad b=-f\neq 0.$$

34. При каком необходимом и достаточном условии уравнение

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

эквивалентно уравнению

$$y=kx+l$$

(над полем комплексных чисел)?

35. Доказать, что из уравнения

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2-2f_1f_3-2f_2f_3-2f_3f_1=0$$

следует одно из уравнений

$$\sqrt{|f_3|}=\pm\sqrt{|f_1|}\pm\sqrt{|f_2|}.$$

36. Доказать, что уравнения

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z},$$
$$(z-x-y)^3=27xyz$$

эквивалентны (над полем действительных чисел).

§ 2. Доказательство неравенств

Доказать следующие неравенства (n — целое положительное число):

1. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n > 1.$

2. $(2n-1)!! < n^n, \quad n > 1.$

3. $n! > n^{\frac{n}{2}}, \quad n > 2.$

4. $n! > 2^{n-1}, \quad n > 2.$

5. $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad n > 1.$

6. $\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(2 - \frac{2n-1}{n}\right) > \frac{1}{n!}, \quad n > 1.$

7.** $2^{n(n+1)} > (n+1)^{n+1}\, n^n \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \dots \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \frac{1}{n}, \quad n > 1.$

8. $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n, \quad n > 1.$

9. $(n!)^3 < \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]^n, \quad n > 1.$

10. $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \qquad n > 2.$

11. $\sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n-1]{n}, \qquad n > 2.$

12. $(2n-1)! < n^{2n-1}, \qquad n > 1.$

13. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

14. $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$

15. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$

16. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$

17. $\log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$

18*. $2^n \cdot n! < n^n, \qquad n > 5.$

19*. $3^n \cdot n! > n^n.$

20.** $(2n)! < [n(n+1)]^n, \qquad n > 1.$

21. $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$

22. $(2n)! < \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{2n}.$

23. $1 + n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} < 2^n, \qquad n > 1.$

24.** $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \dots n^n \leqslant \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

25*. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$

26. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}.$

27. Найти наибольшее значение

$$\sqrt[n]{n},$$

где n — целое положительное число.

28. Какое из двух чисел больше,

$$\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ или } 6?$$

29. Доказать, что при достаточно большом n сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

может быть больше любого заданного числа.

30. Какое из двух чисел больше:

а) $300!$ или 100^{300}?

б) $200!$ или 100^{200}?

31. Дан ряд чисел:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots,$$

в котором первые два числа равны 1, а каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}<2.$$

32. Доказать, что если $a>0$, $b>0$ и $a\neq b$, то

$$a^6+b^6>a^5b+b^5a.$$

33. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$, то

$$2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2.$$

Доказать следующие неравенства; установить, при каком условии имеет место знак равенства.

34. $ab+ac+bc\leqslant a^2+b^2+c^2$.

35. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geqslant 6abc$.

36. Доказать, что если $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$, то

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>2(a^3+b^3+c^3).$$

Доказать, что если a, b, c, d — положительные неравные друг другу числа (задачи 37—40), то

37. $a^3+b^3+c^3>3abc$.

38. $(a+b+c+d)^4>256abcd$.

39. $a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc>4abcd$.

40. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$.

41. Доказать, что если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

42. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ и $a+b>c$, то

$$a^3+b^3+c^3+3abc>2(a+b)c^2.$$

43. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$;

б) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

при каком условии имеет место знак равенства?

44. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $a > b$, то

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a.$$

Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ (задачи 45—58), то

45. $3(bc + ca + ab) < (a + b + c)^2$.

46. $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9$.

47. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > abc(a + b + c)$.

48. $(bc + ca + ab)^2 > 3abc(a + b + c)$.

49. $a^4 + b^4 + c^4 > abc(a + b + c)$.

50. $abc > (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

51. $2(a^3 + b^3 + c^3) > ab(a + b) + bc(b + c) + ca(a + c)$.

52. $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} > \frac{3}{2}$.

53. $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a + b + c)(ab + bc + ca)$.

54. $a^2 + 2ab + 3b^2 > 0$.

55. $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$.

56. $8(a^3 + b^3 + c^3) > 3(b + c)(c + a)(a + b)$.

57. $27abc < (a + b + c)^3 < 9(a^3 + b^3 + c^3)$.

58. $\frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a} + \frac{2}{a + b} > \frac{9}{a + b + c}$.

Доказать, что если a, b, c — целые положительные числа, причем $a \neq b$, $b \neq c$ и $c \neq a$ (задачи 59—61), то

59. $a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} > \frac{1}{3}(a + b + c)$.

60. $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}\right)^{a+b+c} > a^a b^b c^c$.

61. $(b + c)^a (c + a)^b (a + b)^c < \left[\frac{2}{3}(a + b + c)\right]^{a+b+c}$

62. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

63. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

При каком условии имеет место знак равенства?

64. Доказать, что $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$ (a и b — действительные числа).

65. Если $a > b > 0$, то

$$\frac{(a - b)^2}{8a} < \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a - b)^2}{8b}.$$

66. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) > 6abc.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

67. Доказать, что если a, b и c — целые положительные числа, причем $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$, то

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\leqslant 1.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

68. Доказать, что

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64ab(a+b)^2,$$

где $a>0$, $b>0$.

69. Дано

$$a>0,\quad b>0,\quad \left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2<1;$$

доказать, что в таком случае, если одно из чисел, a или b, больше 1, то другое меньше 1.

70. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

71. Доказать, что если a и b не равны нулю одновременно, то

$$5a^2-6ab+5b^2>0.$$

72. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, то

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\frac{a^n+b^n}{2},$$

где n — целое положительное число.

При каком условии имеет место знак равенства?

73. Доказать, что если $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, то

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}>\frac{a+b+c}{3}.$$

74. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $a\neq b$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}.$$

75. Доказать, что если числа a, b, c, d положительны, то

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}.$$

76. Доказать, что

$$8(a^4+b^4)\geqslant(a+b)^4,$$

где a и b — любые действительные числа; при каком условии имеет место знак равенства?

77. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\geqslant 0.$$

78. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $a\neq b$, то

$$\sqrt[n+1]{ab^n}<\frac{a+bn}{n+1}.$$

79. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, $a_4>0$, то

$$a_1a_2^2a_3^3a_4^4\leqslant\left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{19}\right)^{10}.$$

80. Если a_1, a_2, a_3, a_4 — положительные числа, то

$$4a_1a_2a_3a_4\leqslant a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4.$$

81. Доказать, что если a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы треугольника, то

$$c^3 > a^3 + b^3.$$

82. Доказать, что если

$$1 \leqslant a \leqslant b + c < a + 1 \quad \text{и} \quad b \leqslant c,$$

то $a > b$.

83. Доказать, что

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|a|}.$$

84. Доказать, что если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$, то

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > 1 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

85. Доказать, что если $x > 1$, а n — целое положительное число, то

$$x^n - 1 \geqslant n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

86. Доказать, что

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leqslant 3.$$

87. Доказать, что

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2.$$

88. При каких значениях a система неравенств

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

выполнена при всех действительных значениях x?

89*. Дано n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доказать, что сумма квадратных корней из всех произведений этих чисел, взятых попарно, не больше, чем

$$\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

90*. Доказать, что если все числа a_k и b_k положительны, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

91*. Доказать, что если $0 < x < 1$, то

$$\frac{1 + x + \frac{x^2}{8}}{1 + \frac{x}{2}} - \sqrt{1+x} < \frac{x^4}{2^7}.$$

92. Доказать, что если $1 + a > 0$, то $(1+a)^n > 1 + an$, где n — целое положительное число, большее 1.

93.** Доказать, что если абсолютная величина числа a меньше 1, то

$$1 + \frac{a}{n} - a^2 \leqslant \sqrt[n]{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{n},$$

иначе говоря, $1 + \frac{a}{n}$ есть приближенное значение корня $\sqrt[n]{1+a}$ с избытком, причем ошибка не превосходит a^2.

94. Доказать, что если a — число по абсолютной величине меньше 1, то

$$1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} \leqslant \sqrt{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{2},$$

т. е. $1 + \frac{a}{2}$ есть приближенное значение корня $\sqrt{1+a}$ с избытком и с ошибкой, не превышающей $\frac{a^2}{8}$.

95. Доказать, что

$$a+\frac{b}{2a}>\sqrt{a^2+b}>a+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^3},$$

если $0<b<a^2$.

96. Доказать, что если

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{n},$$

то

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant\frac{1}{n}.$$

97. Доказать, что если

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a,$$
$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=b,$$
$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=\frac{3abn-2a^3}{n^2},$$

то

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4\geqslant\frac{a^4}{n^3}$$

и

$$b\geqslant\frac{a^2}{n}.$$

98. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_n>0$, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

99. Доказать, что если $b_1+b_2+\ldots+b_n\neq 0$, то дробь

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

заключена между наименьшей и наибольшей из дробей

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}.$$

100. Доказать, что если a_1, a_2, ..., a_n положительны, то среднее арифметическое

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

заключено между наибольшим из чисел a_1, a_2, ..., a_n и наименьшим из них.

101. Доказать, что если числа a_1, a_2, ..., a_n положительны, то среднее геометрическое из этих чисел, т. е. $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, заключено между наибольшим и наименьшим из чисел a_1, a_2, ..., a_n.

102. Доказать, что если числа a_1, a_2, ..., a_n положительны, то среднее гармоническое этих чисел, т. е. число p, определяемое из равенства

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right),$$

заключено между наибольшим и наименьшим из чисел a_1, a_2, ..., a_n.

103. Доказать, что среднее гармоническое из положительных чисел не более их среднего геометрического, причем знак равенства имеет место только при равенстве всех чисел между собой.

104. Доказать, что, каковы бы ни были числа a_1, a_2, ..., a_n, среднее квадратичное из этих чисел, т. е.

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

заключено между наибольшим и наименьшим из чисел

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|.$$

105. Доказать неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны между собой.

106. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то отношение их среднего арифметического к среднему гармоническому не меньше 1.

107. Доказать неравенство

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

108. Доказать неравенство

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

109. Доказать неравенство

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

110. Доказать неравенство

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|.$$

111. Доказать, что если сумма n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна s, то произведение $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ имеет наибольшее значение, если $\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n}$, где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — данные целые положительные числа. Найти это наибольшее значение. Доказать то же положение, считая, что m_k — данные положительные рациональные числа.

112. Доказать, что если произведение n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно данному числу p, то их сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ будет наименьшей, если

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Найти это наименьшее значение.

113. Доказать, что если $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C, D — заданные числа, причем среди чисел A, B, C хотя бы одно не равно нулю, то

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \geqslant \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где x_0, y_0, z_0 — также данные числа. При каких значениях x, y и z имеет место знак равенства?

114. Доказать, что если

$$x_1=a_1+\lambda l_1, \quad y_1=b_1+\lambda m_1, \quad z_1=c_1+\lambda n_1;$$
$$x_2=a_2+\mu l_2, \quad y_2=b_2+\mu m_2, \quad z_2=c_2+\mu n_2,$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 — данные числа, причем

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2 \neq 0, \quad l_2^2+m_2^2+n_2^2 \neq 0$$

и

$$(m_1n_2-m_2n_1)^2+(l_2n_1-l_1n_2)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2 \neq 0,$$

то

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|(x_2-x_1)(m_1n_2-m_2n_1)+(y_2-y_1)(l_2n_1-l_1n_2)+(z_2-z_1)(l_1m_2-l_2m_1)|}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(l_2n_1-l_1n_2)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}}.$$

При каких значениях λ и μ будет иметь место знак равенства?

115. Доказать, что если $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, l, m, n$ — данные числа, а числа x, y, z определяются соотношениями

$$x = x_1 + lt,$$
$$y = y_1 + mt,$$
$$z = z_1 + nt,$$

где t — произвольное число, то

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{[n(y_1 - y_0) - m(z_1 - z_0)]^2 + [l(z_1 - z_0) - n(x_1 - x_0)]^2 + [m(x_1 - x_0) - n(y_1 - y_0)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

При каком значении t имеет место знак равенства?

§ 3. Эквивалентность неравенств и смешанных систем

1. Доказать, что неравенство

$$|x - a| < \varepsilon$$

эквивалентно неравенствам

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

2. Доказать, что неравенство

$$x^2 + y^2 < a^2,$$

где $a > 0$, эквивалентно системе неравенств

$$-a < x < a, \quad -\sqrt{a^2 - x^2} < y < \sqrt{a^2 - x^2}$$

или системе неравенств

$$-a < y < a, \quad -\sqrt{a^2 - y^2} < x < \sqrt{a^2 - y^2}.$$

3. Доказать, что система неравенств

$$f_1 > 0, \quad f_2 > 0$$

эквивалентна системе

$$f_1 + f_2 > 0, \quad f_1 f_2 > 0.$$

4. Доказать, что при условии

$$x' = x + y, \quad x'y' = y$$

система неравенств

$$0 < x' < 1, \quad 0 < y' < 1$$

эквивалентна системе неравенств

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

5. Доказать, что при условии

$$x' = x + y + z, \quad x'y' = y + z, \quad x'y'z' = z$$

система неравенств

$$0 < x' < 1, \quad 0 < y' < 1, \quad 0 < z' < 1$$

эквивалентна системе неравенств

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad x + y + z < 1.$$

6. Доказать эквивалентность следующих двух систем неравенств:

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$
$$-\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2},$$
$$-1 < x < 1$$

и

$$-\sqrt{1-x^2-z^2} < y < \sqrt{1-x^2-z^2},$$
$$-\sqrt{1-z^2} < x < \sqrt{1-z^2},$$
$$-1 < z < 1.$$

7. Будут ли эквивалентны неравенства?

а) $f(x) > 0$ и $\operatorname{arctg} f(x) > 0$;

б) $f(x) > 0$ и $\operatorname{tg} f(x) > 0$.

8. Доказать, что если выполнена система неравенств

$$z \neq x, \quad 0 < z < x + y, \quad 0 < y < 1 - x, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

то будет выполнена одна из следующих систем:

$$0 < x < 1, \quad 0 < z < x, \quad 0 < y < 1 - x, \tag{2}$$

или

$$0 < x < 1, \quad z - x < y < 1 - x, \quad x < z < 1 \tag{3}$$

и обратно: если выполнена любая из этих систем, то будет выполнена начальная система. Доказать также, что если выполнена одна из систем (2) или (3), то другая не будет выполнена (т. е. что системы (2) и (3) противоречивы).

9. Даны системы неравенств:

$$z \neq y, \quad 0 < z < x + y, \quad 0 < y < 1 - x, \quad 0 < x < 1; \tag{1}$$
$$z - y < x < 1 - y, \quad 0 < y < z, \quad 0 < z < 1; \tag{2}$$
$$0 < x < 1 - y, \quad z < y < 1, \quad 0 < z < 1. \tag{3}$$

Доказать, что из системы (1) следует либо система (2), либо (3) и обратно: из системы (2) следует (1), из (3) следует (1); доказать также, что системы (2) и (3) противоречивы.

10. Даны шесть систем неравенств:

$$0 < z < x^2 + y^2, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x < 1; \tag{1}$$
$$0 < y < 1, \quad 0 < z < x^2, \quad 0 < x < 1; \tag{2}$$
$$\sqrt{z - x^2} < y < 1, \quad x^2 < z < x^2 + 1, \quad 0 < x < 1; \tag{3}$$
$$0 < z < 1, \quad 0 < y < \sqrt{z}, \quad \sqrt{z - y^2} < x < 1; \tag{4}$$
$$0 < z < 1, \quad \sqrt{z} < y < 1, \quad 0 < x < 1; \tag{5}$$
$$1 < z < 2, \quad \sqrt{z - 1} < y < 1, \quad \sqrt{z - y^2} < x < 1. \tag{6}$$

а) Доказать, что из системы (1) при условии $z \neq x^2$ следует одна из систем (2) и (3) и обратно: если выполнена хотя бы одна из систем (2) или (3), то будет выполнена система (1) и условие $z \neq x^2$; доказать, что системы (2) и (3) противоречивы.

б) Доказать, что из системы (1) при условии $z \neq y^2$, $z \neq 1$ следует одна из систем (4), (5) или (6) и обратно: если выполнена любая из этих систем, то будет выполнена система (1).

Доказать также, что системы (4), (5) и (6), взятые попарно, противоречивы.

11. Будут ли системы

$$xyz > 0, \quad yz + zx + xy > 0, \quad x + y + z > 0$$

и

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

эквивалентны?

12. Доказать, что при условии $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, $f_3 > 0$ уравнение

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} = \sqrt{f_3}$$

эквивалентно смешанной системе

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2f_2f_3 - 2f_3f_1 - 2f_1f_2 = 0, \quad f_3 \geqslant f_1 + f_2.$$

13. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2} = \sqrt{f_3} - \sqrt{f_4}$$

эквивалентно следующей смешанной системе:

$$(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 - 2f_1f_2 - 2f_1f_3 - 2f_1f_4 - 2f_2f_3 - 2f_2f_4 - 2f_3f_4)^2 = 64f_1f_2f_3f_4,$$

$$f_1 \geqslant 0, \quad f_2 \geqslant 0, \quad f_3 \geqslant 0, \quad f_4 \geqslant 0, \quad (f_1 - f_2)(f_3 - f_4) \geqslant 0,$$

$$(f_1 + f_2 - f_3 - f_4)(f_1f_2 - f_3f_4) > 0,$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 - 2f_1f_2 - 2f_1f_3 - 2f_1f_4 - 2f_2f_3 - 2f_2f_4 - 2f_3f_4 < 0.$$

14. Доказать, что если

$$x = a\cos u\cos v, \quad y = a\sin u\cos v, \quad z = a\sin v \tag{1}$$

и если

$$0 < u < v < \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

то

$$\left.\begin{array}{c} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ 0 < x < a, \\ 0 < y < \sqrt{ax - x^2}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Обратно: если выполнены соотношения (3), то найдутся значения u и v, удовлетворяющие соотношениям (2), для которых x, y и z определяются формулами (1).

Глава V

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Линейные уравнения

Исследовать следующие системы уравнений:

1.
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 0.$$

2.
$$x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 0,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1.$$

3.
$$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1,$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

4.
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7.$$

5.
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0,$$
$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 0,$$
$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 6x_5 = 0,$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0.$$

6.
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 3,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 16x_5 + 8x_6 = 13,$$
$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 18x_6 = 33,$$
$$8x_1 + 15x_2 + 21x_3 + 42x_4 + 40x_5 + 28x_6 = 49,$$
$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 12x_5 + 6x_6 = 10,$$
$$x_1 + 2x_2 + 11x_4 + 8x_5 + 12x_6 = 23.$$

7.
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n = 1,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n = 2,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 2x_n = 3,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \ldots + 2x_n = 4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_{n-1} + nx_n = n.$$

8.
$$1+x_1+x_2+\ldots+x_n=0,$$
$$1+2x_1+2^2x_2+\ldots+2^nx_n=0,$$
$$1+3x_1+3^2x_2+\ldots 3^nx_n=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1+nx_1+n^2x_2+\ldots+n^nx_n=0.$$

9.
$$x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+\ldots+x_1=n,$$
$$x_n+2x_{n-1}+3x_{n-2}+\ldots+nx_1=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$
$$x_n+3x_{n-1}+6x_{n-2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x_1=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n+nx_{n-1}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}x_1=\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

10.
$$x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+\ldots+2x_{100}=1,$$
$$x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5+\ldots+4x_{100}=2,$$
$$x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5+\ldots+6x_{100}=3,$$
$$x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5+\ldots+8x_{100}=4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5+\ldots+199x_{100}=100.$$

§ 2. Линейные уравнения, содержащие параметры

Исследовать следующие системы уравнений:

1.
$$x+2y+(a+3)z=8,$$
$$2x+3y+(a+4)z=12,$$
$$3x+(6a+5)y+7z=20.$$

2.
$$x+y+z=6,$$
$$ax+4y+z=5,$$
$$6x+(a+2)y+2z=13.$$

3.
$$(a+1)x+y+z=a+1,$$
$$x+(a+1)y+z=a+3,$$
$$x+y+(a+1)z=-2a-4.$$

4.
$$ax+y-z=1,$$
$$x+ay-z=1,$$
$$-x+y+az=1.$$

5.
$$ax-by=0,$$
$$a^2x-by=ab.$$

6.
$$2x+3y-4z=5,$$
$$2ax+3by+(b-5a)z=2a+3b,$$
$$bx+3ay+(a-b)z=a+4b.$$

7.
$$ax+y+z=1,$$
$$x+ay+z=a,$$
$$x+y+az=a^2.$$

8.
$$ax+y+z+t=1,$$
$$x+ay+z+t=a,$$
$$x+y+az+t=a^2,$$
$$x+y+z+at=a^3.$$

9.
$$\begin{aligned} ax+y+z&=4,\\ x+by+z&=3,\\ x+2by+z&=4. \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} ax+by+cz+dt&=0,\\ bx-ay+dz-ct&=0,\\ cx-dy-az+bt&=0,\\ dx+cy-bz-at&=0, \end{aligned}$$

где a, b, c, d, — действительные числа, не равные нулю одновременно.

11.
$$\begin{aligned} kx+y+z&=a,\\ x+ky+z&=b,\\ x+y+kz&=c. \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=a^3,\\ x+by+b^2z&=b^3,\\ x+cy+c^2z&=c^3. \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} x&=by+cz+du,\\ y&=ax+cz+du,\\ z&=ax+by+du,\\ u&=ax+by+cz. \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x+ay+a^2z+a^3t+a^4&=0,\\ x+by+b^2z+b^3t+b^4&=0,\\ x+cy+c^2z+c^3t+c^4&=0,\\ x+dy+d^2z+d^3t+d^4&=0. \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x+y+z+a(y+z)+a^2z+a^3&=0,\\ x+y+z+b(y+z)+b^2z+b^3&=0,\\ x+y+z+c(y+z)+c^2z+c^3&=0. \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ ax+by+cz&=0,\\ bcx+cay+abz&=1. \end{aligned}$$

17.
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}=\frac{x}{c}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

18.
$$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ \frac{a^2x}{a-d}+\frac{b^2y}{b-d}+\frac{c^2z}{c-d}&=0,\\ \frac{ax}{a-d}+\frac{by}{b-d}+\frac{cz}{c-d}&=d(b-c)(c-a)(a-b). \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} \frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}&=1,\\ \frac{x}{a+\mu}+\frac{y}{b+\mu}+\frac{z}{c+\mu}&=1,\\ \frac{x}{a+\nu}+\frac{y}{b+\nu}+\frac{z}{c+\nu}&=1. \end{aligned}$$

где
$$a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a,\ \mu\neq\nu\neq\lambda,\ \lambda\neq\mu.$$

20.
$$\begin{aligned} \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=u\left(1+\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{u}\left(1-\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=v\left(1+\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{v}\left(1-\frac{x}{a}\right), \end{aligned}$$

где $u\neq v$.

21.
$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{x}{a}\right),$$
$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$
$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{x}{a}\right),$$
$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{v}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

22.
$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2u,$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{z}{u},$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2v,$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{z}{v},$$

где $u \neq v$.

23.
$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2u,$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{z}{u},$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{z}{v},$$
$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=2v.$$

24. При каком значении a система уравнений
$$2x_1-x_2+x_3+x_4=1,\quad x_1+2x_2-x_3+4x_4=2,$$
$$x_1+7x_2-4x_3+11x_4=a$$
совместна.

25. Найти все значения λ, при которых следующая система уравнений совместна:
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,$$
$$\lambda x_1-3x_2+5x_3-x_4+3x_5=1,$$
$$\lambda^2 x_1-x_2+3x_3+2x_5=2.$$

26. Найти все значения λ, при которых следующая система уравнений совместна:
$$3x-2y+z+2t=3,$$
$$9x-6y+2z+3t=7,$$
$$6x-4y+3z+7t=8,$$
$$\lambda x-4y+z+t=4.$$

27. При каком условии система уравнений
$$x+y+z=a+b+c,$$
$$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2,$$
$$bx+cy+az=a^2+b^2+c^2,$$
$$cx+ay+bz=4ab$$
совместна? Предполагая это условие выполненным, решить систему.

Исследовать следующие системы уравнений:

28.
$$x_2+x_3+\ldots+x_n=a_1,$$
$$x_3+x_4+\ldots+x_1=a_2,$$
$$x_4+x_5+\ldots+x_2=a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=a_n.$$

29*.
$$a_1 = a_0 + x_1,$$
$$a_2 = a_0 + 2x_1 + x_2,$$
$$a_3 = a_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_0 + nx_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_2 + \dots + x_n.$$

30.**
$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1,$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0,$$
$$a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + \dots + a_n^2x_n = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + a_3^{n-1}x_3 + \dots + a_n^{n-1}x_n = 0,$$

где числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n — попарно различны.

31*.
$$x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n = 2a,$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 - \dots - x_n = 4a,$$
$$-x_1 - x_2 + 7x_3 - \dots - x_n = 8a,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (2^n - 1)x_n = 2^n a.$$

Выписать и решить систему при $n = 4$.

32.**
$$-x_n + 3x_1 - x_2 = a_1,$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = a_2,$$
$$-x_2 + 3x_3 - x_4 = a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$-x_{n-2} + 3x_{n-1} - x_n = a_{n-1},$$
$$-x_{n-1} + 3x_n - x_1 = a_n.$$

33.
$$ax_1 + ax_2 + \dots + ax_{n-1} + bx_n = c_n,$$
$$ax_1 + ax_2 + \dots + bx_{n-1} + ax_n = c_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$bx_1 + ax_2 + \dots + ax_{n-1} + ax_n = c_1,$$

где $a \neq b$.

34.**
$$(3 + 2a_1)x_1 + (3 + 2a_2)x_2 + \dots + (3 + 2a_n)x_n = 3 + 2b,$$
$$\left(1 + 3a_1 + 2a_1^2\right)x_1 + \left(1 + 3a_2 + 2a_2^2\right)x_2 + \dots + \left(1 + 3a_n + 2a_n^2\right)x_n = 1 + 3b + 2b^2,$$
$$a_1\left(1 + 3a_1 + 2a_1^2\right)x_1 + a_2\left(1 + 3a_2 + 2a_2^2\right)x_2 + \dots + a_n\left(1 + 3a_n + 2a_n^2\right)x_n = b\left(1 + 3b + 2b^2\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1^{n-3}\left(1 + 3a_1 + 2a_1^2\right)x_1 + a_2^{n-3}\left(1 + 3a_2 + 2a_2^2\right)x_2 + \dots + a_n^{n-3}\left(1 + 3a_n + 2a_n^2\right)x_n = b^{n-3}\left(1 + 3b + 2b^2\right),$$
$$a_1^{n-2}(1 + 3a_1)x_1 + a_2^{n-2}(1 + 3a_2)x_2 + \dots + a_n^{n-2}(1 + 3a_n)x_n = b^{n-2}(1 + 3b).$$

35. Найти условия, которым должны удовлетворять данные числа a_1, a_2, a_3 и a_4, чтобы система уравнений
$$x_1 + x_2 = a_1a_2,\ x_1 + x_3 = a_1a_3,\ x_1 + x_4 = a_1a_4,$$
$$x_2 + x_3 = a_2a_3,\ x_2 + x_4 = a_2a_4,\ x_3 + x_4 = a_3a_4$$
была совместна. Найти при этом значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4.

36. Доказать, что если любое решение уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

является решением уравнения

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = 0,$$

то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т. е. существует число $k \neq 0$, при котором

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2,\ \ldots,\ b_n = ka_n.$$

Сформулировать и доказать обратное положение.

37. Доказать положение, изложенное в предыдущей задаче, в случае уравнений вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = p,\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = q.$$

38. Исследовать систему уравнений

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n},\quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

39. Исследовать систему уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,\quad a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

§ 3. Линейные неравенства

Решить следующие неравенства:

1. $2x + 5 > 0.$

2. $-x + 4 < 0.$

3. $-2x - 3 > 0.$

Решить следующие системы неравенств:

4. $x + 5 > 0,\ x - 3 < 0.$

5. $2x + 1 < 0,\ x + 3 > 0.$

6. $x - 1 > 0,\ x + 2 < 0,\ 3x + 2 > 0.$

Решить следующие неравенства:

7. $ax + b > 0.$

8. $(a^2 - 2a - 3)x + a^2 > 0.$

9. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — два решения линейного неравенства

$$Ax + By + C > 0, \tag{1}$$

т. е.

$$Ax_1 + By_1 + C > 0,\ Ax_2 + By_2 + C > 0.$$

Доказать, что тогда $(px_1 + qx_2,\ py_1 + qy_2)$, где $p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1$ также будет решением неравенства (1).

10. Пусть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) — три решения неравенства

$$Ax + By + Cz + D > 0.$$

Доказать, что тогда $(px_1 + qx_2 + rx_3,\ py_1 + qy_2 + ry_3,\ pz_1 + qz_2 + rz_3)$, где $p > 0,\ q > 0,\ r > 0,\ p + q + r = 1$, также будет решением данного неравенства.

11. Доказать, что если

$$Ax_1 + By_1 + C > 0,\quad Ax_2 + By_2 + C < 0,$$

то найдутся числа p и q такие, что $p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1$ и

$$A(px_1 + qx_2) + B(py_1 + qy_2) + C = 0.$$

12. Доказать, что если

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq Ax_2+By_2+Cz_2+D,$$

то найдутся числа p и q такие, что $p+q=1$ и

$$A(px_1+qx_2)+B(py_1+qy_2)+C(pz_1+qz_2)+D=0.$$

13. Пусть (x_1, y_1, z_1) — решение уравнения

$$A_1x+B_1y+C_1z=0, \tag{1}$$

не являющееся решением уравнения

$$A_2x+B_2y+C_2z=0, \tag{2}$$

а (x_2, y_2, z_2) — решение уравнения (2), не являющееся решением уравнения (1). Пусть в уравнениях (1) и (2) коэффициенты при неизвестных не пропорциональны. Пусть p_1 и q_1 — такие числа, что $(p_1x_1+q_1x_2, p_1y_1+q_1y_2, p_1z_1+q_1z_2)$ — решение уравнения

$$(A_1+A_2)x+(B_1+B_2)y+(C_1+C_2)z=0,$$

а p_2 и q_2 — такие числа, что $(p_2x_1+q_2x_2, p_2y_1+q_2y_2, p_2z_1+q_2z_2)$ — решение уравнения

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)z=0.$$

Доказать, что если p_1 и q_1 имеют одинаковые знаки, то p_2 и q_2 имеют противоположные знаки и наоборот. Найти сумму

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}.$$

14. Даны три уравнения с двумя неизвестными:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2}$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0. \tag{3}$$

Известно, что уравнения (1) и (2) имеют единственное решение (x_1, y_1), уравнения (2) и (3) имеют единственное решение (x_2, y_2) и уравнения (3) и (1) имеют единственное решение (x_3, y_3).
Известно также, что

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1>0,$$
$$A_2x_2+B_2y_2+C_2>0,$$
$$A_3x_3+B_3y_3+C_3>0.$$

Доказать, что тогда

$$A_1(px_1+qx_2+rx_3)+B_1(py_1+qy_2+ry_3)+C_1>0,$$
$$A_2(px_1+qx_2+rx_3)+B_2(py_1+qy_2+ry_3)+C_2>0,$$
$$A_3(px_1+qx_2+rx_3)+B_3(py_1+qy_2+ry_3)+C_3>0,$$

где

$$p>0,\ q>0,\ r>0,\ p+q+r=1,$$

и обратно: если

$$A_1x+B_1y+C_1>0,\quad A_2x+B_2y+C_2>0,\quad A_3x+B_3y+C_3>0,$$

то x и y можно представить в виде

$$x=px_1+qx_2+rx_3,$$
$$y=py_1+qy_2+ry_3,$$

где $p>0$, $q>0$, $r>0$, $p+q+r=1$. Обобщить это положение на случай четырех линейных уравнений с тремя переменными.

§ 4. Составление линейных уравнений

П. 1. Составление линейных уравнений с одним неизвестным

1. Со станции вышел пассажирский поезд, проходящий v *км/час*. Через t час. с той же станции, по тому же направлению вышел скорый поезд, проходящий $v_1 (v_1 > v)$ *км/час*. Через сколько часов после своего выхода скорый поезд догонит пассажирский?
2. Предприятие за первый год после открытия дало 2450 руб. дохода и потребовало 4100 руб. расхода; затем доход ежегодно увеличивался на 600 руб., а расход уменьшался на 500 руб. Через сколько лет сумма всех расходов со дня открытия предприятия покроется доходом за это время?
3. Самолет летел сначала со скоростью 180 *км/час*. Когда ему осталось пролететь на 320 *км* меньше, чем он пролетел, он изменил скорость и закончил рейс со скоростью 250 *км/час*, причем средняя скорость его на всем пути оказалась равной 200 *км/час*. Какое расстояние пролетел самолет?
4. Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 40 *км/час*, и видит, что мимо окна в противоположном направлении в течение 3 сек. проходит встречный поезд, имеющий длину 75 *м*. Какова скорость встречного поезда?
5. От пристани отошел речной пароход и одновременно от нее же отправился по берегу пешеход. Пройдя 24 *км*, пароход повернул обратно и через некоторое время снова оказался с пешеходом в одном пункте, именно в 8 *км* от пристани. Определить собственную скорость парохода, если скорость пешехода и скорость течения реки равны 4 *км/час*.
6. В 8 час. вечера были зажжены две свечи одинаковой длины. Одна сгорает за 5 час., другая — за 4 час. Через некоторое время свечи были потушены, причем оказалось, что от первой свечи остался огарок в 4 раза длиннее, чем от второй. Когда были потушены свечи?
7. Пешеход идет со скоростью 5 *км/час*, останавливаясь на отдых через каждые 4 *км*. Продолжительность каждой остановки, кроме четвертой, — 10 мин. Четвертая остановка — 1 час. Какое расстояние прошел пешеход, если, отправившись в путь в 4 час. утра, он пришел на место к полудню?
8. Отец предполагал распределить некоторую сумму денег между своими тремя сыновьями в отношении 7 : 6 : 5. Затем он изменил свое решение и ту же сумму разделил в отношении 6 : 5 : 4. Кто из сыновей получит больше в результате второго деления? Кто меньше? Известно, что один из сыновей в результате деления (второго) получил на 12 руб. больше другого. Сколько получил каждый?
9. Один сплав содержит два металла в отношении $m : n$, другой сплав из тех же металлов содержит эти металлы в отношении $p : q$. Сколько килограммов первого сплава надо добавить к s *кг* второго, чтобы количества металлов в новом сплаве относились бы как $a : b$?
10. Имеется два сплава — меди и серебра. В первом сплаве отношение веса меди к весу серебра равно p, во втором q. В каком отношении надо взять вес первого сплава к весу второго, чтобы в новом сплаве, который получится при переплавлении взятых сплавов в один, отношение веса меди к весу серебра было бы равно r? При каком условии решение возможно?
11. Морская вода содержит 5% по весу соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 *кг* морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%.
12. Одна бочка содержит 12 ведер спирта и 20 ведер воды, другая — 9 ведер спирта и 4 ведра воды. Сколько ведер нужно перелить из первой бочки во вторую, чтобы получить в ней смесь, содержащую спирт и воду поровну (по объему)?
13. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m и n *кг*, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных

кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

14. Некоторый сплав состоит из двух металлов; отношение частей металлов 1 : 2; другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

15. В 500 *кг* руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 *кг* примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, процент содержания железа в оставшейся руде повысился на 20. Определить, какое количество железа осталось еще в руде.

16. Два самолета летят в одном направлении по прямой со скоростями v и w, причем $v > w$. Первый самолет пролетает над городом A в момент $t > 0$, второй — над городом B в момент $T > t$, считая от некоторого общего начала отсчета времени. Когда самолеты сойдутся, если известно, что расстояние между A и B равно d?

17. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 24 час., если бы делали ее все одновременно. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый приступивший к работе затратил на нее время, в пять раз большее, чем последний?

18. Имеется два сосуда: A и B, каждый вместимостью 20 *л*. Сосуд A наполнен спиртом, а сосуд B пустой. Из сосуда A отливают некоторое количество литров спирта в сосуд B, а затем дополняют сосуд B водой; этой смесью дополняют сосуд A. Затем из сосуда A отливают в сосуд B $6\frac{2}{3}$ *л*. После этого оба сосуда содержат одинаковое количество спирта. Сколько литров спирта отлили из сосуда A в сосуд B в первый раз?

19. Для наполнения резервуара была сначала открыта первая труба, через которую каждую минуту поступает 600 *л* 30-процентного раствора спирта; затем, через 45 мин., вступила в действие вторая труба, дающая в минуту 800 *л* 40-процентного раствора спирта. Через сколько времени в резервуаре получится 35-процентный раствор спирта?

20. Два завода: A и B, взялись выполнить заказ за 12 дней. Через два дня завод A был закрыт на ремонт и в дальнейшем над выполнением заказа работал только завод B. Зная, что производительность завода B составляет $66\frac{2}{3}\%$ от производительности завода A, определить, через сколько дней будет выполнен заказ?

21. На метеорологической станции было замечено, что в июне средняя суточная температура ежедневно повышалась на 0,25°. Средняя температура за весь июнь (т. е. среднее арифметическое из 30 наблюдений) оказалась равной 16,125°. Какая средняя суточная температура была 20 июня?

22. Два пункта: A и B, отстоят друг от друга на расстоянии 120 *км* и находятся на реке, которая течет с постоянной скоростью 3 *км/час*. Из пункта B против течения вышел теплоход с постоянной скоростью относительно воды 15 *км/час*. Некоторое время спустя из пункта A по течению вышел катер и встретил теплоход в середине пути AB. Если бы катер вышел на 2 часа раньше, то он встретил бы теплоход на расстоянии в 40 *км* от пункта C. С какой скоростью двигался катер?

23. Кусок льда имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Если опустить его в воду, добавив к нему груз 75 *кг*, то в воду погрузится 0,95 его объема. Определить высоту куска льда с точностью до одного миллиметра, зная, что плотность льда равна 0,92 и что сторона квадрата, лежащего в основании, равна 1,2 *м*.

24. Завод расположен на пути между двумя городами: A и B; он потребляет лед, который может быть закуплен либо в A, либо в B. В A цена льда a руб. за одну тонну, взятую в A; в B цена льда составляет b руб. за одну тонну, взятую в B. Стоимость транспорта составляет p руб. за *т/км*; предполагается, что потеря в весе, происходящая от таяния льда, составляет n тысячных веса на 1 *км* пути. Расстояние между городами A и B равно d. Определить расстояние завода от города A, если цена за одну тонну льда, доставленного на завод, одинакова, из какого бы города A или B лед ни был доставлен.

25. Две группы туристов направляются одновременно из пункта A в пункт B, находящийся в s *км* от A. Первая группа сначала идет пешком со скоростью v *км/час*. Вторая группа едет на автомобиле со скоростью u *км/час*. Последняя, проехав некоторую часть пути, продолжает далее двигаться пешком, со скоростью v *км/час*. Автомобиль же возвращается до встречи с первой группой, которая с этого момента продолжает путь на автомобиле и прибывает в B одновременно со второй группой. Определить время, затраченное каждой группой на путь от A до B.

26. Имеется 4 сосуда раствора спирта; объемы первых трех относятся как 2 : 3 : 5, а содержание в них чистого спирта по объему 80%, 72% и 50%. Четвертый сосуд содержит 5,34 *л* чистого спирта и 0,66 *л* воды. Смесь спирта из всех четырех сосудов содержит 35% воды по объему.

1°. Найти вместимость трех первых сосудов.

2°. Сколько надо добавить к смеси спирта, чтобы получить раствор спирта, содержащий 7 объемов спирта на 1 объем воды?

27. Из общего количества товара a % его было продано с прибылью в p %, а из оставшейся части b % было продано с прибылью q %. С какой прибылью следует продать всю остальную часть товара, чтобы общий процент прибыли составлял r %?

28. Прирост продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом за первый год составлял p %, а за второй год — q %. Какой прирост продукции (в процентах) должен быть за третий год, чтобы средний годовой прирост продукции за три года был равен r %?

29. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% от назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

30. Поезд, направляющийся на станцию A, был задержан на станции B на 1 час. 42 мин. При дальнейшем движении скорость поезда была увеличена на 20%, а затем на последнем перегоне, составляющем 0,1 расстояния AB, — на 25%. В результате поезд прибыл на станцию B без опоздания. Определить, за какое время при нормальных условиях поезд проходит расстояние AB.

31. Инженер завода приезжает ежедневно поездом на вокзал в 8 час. утра. К этому моменту к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 час. утра и пошел навстречу машине, встретил ее и приехал на завод на 20 мин. раньше, чем обычно. Определить показание часов в момент встречи инженера с автомобилем. Скорость движения автомобиля считать постоянной.

32.* Сколько раз в сутки стрелки часов образуют между собою прямые углы?

33.* Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые 2 сек., вторые — через каждые 3 сек. Всего было насчитано 13 ударов (сливающиеся удары воспринимаются как один). Сколько времени на первых часах?

34. Пловец плыл против течения Невы. Возле Республиканского моста он потерял пустую флягу. Проплыв еще 20 мин. против течения, он заметил свою

потерю и вернулся, чтобы догнать флягу; догнал он ее возле моста Лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 *км*?

П. 2. Составление систем линейных уравнений с несколькими неизвестными

1. Поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 сек., а мимо моста, длиной в a *м*, — в t_2 сек. Определить скорость и длину поезда.
2. Два туриста выходят одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Если бы первый вышел на один час раньше, а второй на полчаса позже, они встретились бы на 18 мин. раньше. Если бы первый вышел на полчаса позже, а второй — на час раньше, то место их встречи передвинулось бы на 2800 *м*. Какова скорость каждого туриста?
3. В двух мешках находится 140 *кг* муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?
4. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 час. 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста составляет: в гору 4 *км/час*, по ровному месту 5 *км/час* и под гору 6 *км/час*, а расстояние от A до B по указанной дороге равно 9 *км*?
5. Латунь состоит из меди и цинка. Сколько содержится меди и цинка в 124 *кг* латуни, если 89 *кг* меди теряют в воде 10 *кг*, 7 *кг* цинка — 1 *кг*, а 124 *кг* латуни — 15 *кг*?
6. Сосуд снабжен двумя кранами: через первый кран вода вливается, через второй — выливается. Если оба крана открыты одновременно, то каждый час в сосуде убывает a *л* воды. Во сколько часов через первый кран пройдет b *л* воды, если известно, что через второй кран выливается на c *л* больше, чем вливается через первый, при условии, что второй кран будет открыт на d час. дольше первого, а первый будет открыт e час?
7. Скорый поезд выходит в час дня из города A и направляется в город B со скоростью 60 *км/час*; 15 мин. спустя из A выходит вслед за ним пассажирский поезд, который идет со скоростью 40 *км/час*. Поезд, вышедший из B, направляется в A со скоростью 50 *км/час* и встречает скорый поезд после одного часа пути, а пассажирский — спустя 20 мин. после этого. В котором часу вышел поезд из B?
8. Дорога от A до B, длиной 11,5 *км*, идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 час. 54 мин., а на обратную дорогу затратил 3 час. 6 мин. Скорость его ходьбы в гору — 3 *км/час*, по ровному месту — 4 *км/час*, под гору — 5 *км/час*. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту?
9. Поезд вышел со станции A по направлению B в 13 час. В 19 час. он должен был остановиться из-за снежного заноса. Через 2 час. путь удалось расчистить, и, чтобы нагнать опоздание, машинист повел поезд по оставшейся части пути со скоростью, превышающей скорость поезда до остановки на 20%. В результате поезд пришел в B с опозданием лишь на 1 час. На следующий день поезд, шедший из A в B по тому же расписанию, остановился на 150 *км* дальше от A, чем первый поезд. Простояв 2 час., он тоже пошел со скоростью на 20% выше прежней, но нагнал лишь полчаса и опоздал в B на 1 час. 30 мин. Какое расстояние между A и B?
10. Дорога от A до B сперва поднимается в гору на протяжении 3 *км*, потом идет по ровному месту на протяжении 5 *км* и после того опускается под гору до самого пункта B на протяжении 6 *км*. Посыльный, отправившись из A в B и пройдя полпути, обнаружил, что забыл взять один пакет. Он

тотчас повернул обратно и по прошествии 3 час. 36 мин. после своего выхода из A вернулся в A. Затем, выйдя из A вторично, он прошел весь путь до B за 3 час. 27 мин. и обратный путь в A за 3 час. 51 мин. С какой скоростью шел посыльный в гору, по ровному месту и под гору, если считать эти скорости постоянными?

11. Сплав весом P *кг* из двух металлов теряет в воде A *кг*. Такой же вес P *кг* первого из двух составляющих металлов теряет в воде B *кг*, а второго — C *кг*. Найти вес составляющих сплав металлов и исследовать возможность решения задачи в зависимости от величин P, A, B, C.

12. Сосуд, наполняемый последовательно двумя жидкостями, плотности которых равны d и D, весит соответственно q и Q *кг*, включая сюда и вес самого сосуда. Найти вес сосуда и его объем. Найти условия возможности задачи.

13. Производительность станка A составляет $m\%$ от суммы производительностей станков B и C, а производительность станка B составляет $n\%$ от суммы производительностей станков A и C. Какой процент составляет производительность станка C по отношению к суммарной производительности станков A и B?

14. В магазине имеется s *м* сукна двух сортов: ценой a руб. за 1 *м* и ценой b руб. за 1 *м*. Сукно первого сорта было продано с прибылью в $p\%$, сукно второго сорта — с прибылью в $q\%$, причем общее количество прибыли оказалось равным c руб. Сколько метров сукна каждого сорта имелось в магазине?

15. Заяц находится от собаки на расстоянии 80 своих прыжков. В то время как он делает 3 прыжка, собака успевает сделать только 2, но собака продвигается одним своим прыжком на столько же, на сколько заяц двумя. Сколько прыжков сделает заяц, пока собака его догонит?

16. Два человека, A и B, идут вместе по дороге, ведущей из пункта C в пункт D. В пункте E мимо них проходит трамвай, соединяющий пункты C и D. В этот момент A возвращается назад, а B продолжает идти в D. Трамвай приходит в D и после n-минутной остановки возвращается обратно в C. В пункте T он встречается с B, который останавливает его, садится на него и прибывает в C одновременно со своим спутником A. Пешеходы идут со скоростью v_1. Трамвай идет со скоростью v_2. Расстояние между C и D равно d. Определить расстояние от пунктов E и T до пункта C.

17. Точки A и B движутся по прямой навстречу друг другу. В начальный момент расстояние между ними было равно 1265 *м*. Точка A каждый час проходит на 10 *м*, а точка B на 3 *м* больше, чем в предыдущий. Сколько метров проходят точки A и B в первый час и сколько в последний, если известно, что они встречаются через 5 час. и что за эти 5 час. точка A проходит на 55 *м* больше точки B?

18. 36 *г* цинка в воде весят 31 *г*, а 23 *г* свинца — 21 *г*. Сплав цинка и свинца весом 292 *г* в воде весит 261 *г*. Сколько цинка и сколько свинца содержится в сплаве?

19. Одна железная руда содержит 72% железа, другая — 58%. Некоторое количество первой руды смешивается с некоторым количеством второй и получают руду, содержащую 62% железа. Если бы для смеси взяли каждой руды на 15 *кг* больше, чем было взято, то получилась бы руда, содержащая 63,25% железа. По скольку килограммов руды было взято первоначально для составления первой смеси?

20. Частное от деления целого числа p на целое число q равно 4, а остаток равен 30. Если сложить делимое, делитель, частное и остаток, то полученная сумма будет равна 574. Найти делимое и делитель.

21. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из рабочих (работая один) может закончить ее за 40 дней. Во сколько дней каждый из них, работая один, может выполнить эту работу?

22. Несколько человек устраивают экскурсию. Если каждый из них внесет на расходы 12 руб. 50 коп., то не хватит 100 руб., если же каждый внесет по 16 руб., то останется сверх стоимости экскурсии 12 руб. лишних. Сколько человек устраивают экскурсию и сколько стоит экскурсия?

23. Три тела движутся по одному и тому же направлению и начинают свое движение от одной и той же точки со скоростями, соответственно равными 4, 5 и 6 *см/сек*. Второе тело двинулось с места на 2 час. позже первого. Через сколько времени после момента отправления первого тела должно тронуться третье, чтобы одновременно со вторым догнать первое?

24. Два пешехода одновременно вышли из одного города в другой. Первый проходит в час на 1 *км* больше второго и прибывает в город на 3 час. раньше. Если бы каждый из них проходил в час на 1 *км* больше, то первый прибыл бы в город только на 2 час. раньше второго. Найти расстояние между городами и узнать, сколько километров в час проходил каждый пешеход.

25. Велосипедист совершил поездку из A в B и обратно. Путь состоял из ровных (горизонтальных) участков, подъемов и спусков. На ровных участках он ехал со скоростью 12 *км/час*, на подъемах — 8 *км/час*, а на спусках — 15 *км/час*. Из A в B велосипедист ехал 5 час., а из B в A — 4 час. 39 мин. Определить общую длину подъемов и спусков, если горизонтальная часть пути составляет 28 *км*.

26. Велосипедист выехал из A в B и ехал с постоянной скоростью 20 *км/час*. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ *км*, его нагнал автомобиль, вышедший из A на 15 мин. позднее и шедший тоже с постоянной скоростью. После того как велосипедист проехал еще 25 *км*, он встретил автомобиль, уже возвращавшийся из B, где он стоял полчаса. Найти расстояние между A и B.

27. Рост одного кристалла — 4% к его весу (за 1 год), рост другого — 5% в год. Известно, что прирост в весе первого кристалла за 3 месяца равен приросту веса второго кристалла за 7 месяцев.

1°. Каково отношение весов кристаллов?

2°. Если каждый кристалл весил бы на 1500 *г* больше, то отношение их весов равнялось бы $\frac{38}{15}$. Каковы веса этих кристаллов?

28. Имеется два сосуда с водой. Температура воды в первом сосуде в течение 1 мин. понижается на $q°$, а во втором — на $n°$. Если сосуды подогревать на плитке, то температура воды в течение 1 мин. в первом сосуде повышается на $p°$, во втором — на $m°$. Желая нагреть воду в обоих сосудах до одинаковой температуры и располагая только одной плиткой, поставили на нее сначала первый сосуд, затем по истечении некоторого времени сняли его с плитки и поставили на нее второй сосуд. Через некоторое время вода в обоих сосудах достигла требуемой одинаковой температуры. Определить общее время нагревания обоих сосудов, если известно, что температура воды (перед началом нагревания первого сосуда) в первом сосуде была на $a°$, а во втором на $b°$ ниже требуемой.

29. Сосуды A и B одинакового веса содержат различное количество воды. Вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой. Если всю воду из B вылить в A, то вес A будет в 8 раз больше, чем вес B. Зная, что воды в B было больше на 50 *г*, чем в A, определить вес сосудов и первоначальное количество воды в каждом.

30. Два туриста вышли одновременно — один из A в B, другой из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в a *км* от B; второй раз в b *км* от A через n час. после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих туристов.

31. Было собрано и засушено некоторое количество грибов двух видов. Известно, что свежие грибы первого вида содержат $a\%$ воды, а второго вида — $b\%$ воды. Сушеные грибы как первого, так и второго вида содержат $p\%$ воды. Сколько грибов того и другого вида было собрано и сколько получено после сушения, если всего было собрано c *кг* грибов, а количество сушеных грибов первого вида получилось в q раз больше количества сушеных грибов второго вида.

32. Число лет отца на 5 больше суммы лет всех трех его сыновей. Через 10 лет отец будет вдвое старше старшего сына, через 20 лет он будет вдвое старше второго сына, через 30 лет он будет вдвое старше младшего сына. Сколько в настоящее время лет отцу и каждому из трех его сыновей?

33. Велосипедист едет по ровному месту со скоростью u *км/час*, в гору со скоростью v *км/час* и под гору со скоростью w *км/час*. Сколько километров ровного пути, подъема и спуска содержит дорога в a *км* длиной, если велосипедисту нужно t час. для того, чтобы проехать ее в одну сторону, и T час., чтобы проехать ее обратно.

34. Надо вырыть ров в 12 дней; A и B, проработав 6 дней, пригласили C, с которым через 6 дней окончили всю работу. Промежуток времени, в который A один мог бы вырыть ров, относится к промежутку времени, в который B мог бы один вырыть ров, как 2 : 3, а промежуток времени, в который A и C вместе могли бы вырыть ров, относится к промежутку времени, в который B и C могут вырыть ров, работая вместе, как 7 : 8. Во сколько дней каждый из них, работая отдельно, мог бы вырыть ров?

35. Вода может втекать в бассейн через четыре трубы. Если открыты трубы *1*, *2*, *3*, то бассейн наполняется за d час., при открытии труб *2*, *3*, *4* — за a час., при открытии труб *3*, *4*, *1* — за b час., а при открытии труб *4*, *2*, *1* — за c час. Определить время наполнения бассейна при открытии каждой из труб в отдельности.

36. К резервуару присоединено три трубы; через первую и вторую из них вода вливается, а через третью — выливается. Если через $\frac{1}{2}$ час. после совместной работы первых двух труб начинает работать третья, то резервуар наполняется за $1\frac{1}{2}$ часа совместной работы всех трех труб. Если после 2 час. работы третьей трубы начинает работать вторая, то резервуар опорожняется за 3 часа их совместной работы. При совместной работе первой и третьей труб резервуар наполняется за $3\frac{1}{2}$ час. Определить производительность каждой трубы.

37. Вместимость трех бочек с водой составляет 1440 *л*. Две из этих бочек наполнены, третья пустая. Чтобы наполнить пустую бочку, понадобится все содержимое первой бочки и $\frac{1}{5}$ содержимого второй или же все содержимое второй бочки и $\frac{1}{3}$ содержимого первой. Определить емкость каждой бочки.

38. За сколько дней каждый из трех рабочих отдельно может выполнить некоторую работу, если первый и второй выполняют ее в c дней, второй и третий — в a дней, а третий и первый — в b дней?

39. Имеется двузначное число такое, что после перестановки его цифр снова получается двузначное число; большее из этих чисел вычитают из меньшего и в полученной разности опять переставляют цифры, в результате чего опять получается двузначное число. Найти сумму этого последнего двузначного числа с предыдущим (т. е. с тем, из которого оно получено перестановкой цифр).

40. В резервуаре, наполненном водой, открыли четыре крана. Через 2 час., когда вылилась четвертая часть имевшейся в нем воды, первый кран был закрыт. Через 4 час. после этого, когда вылилась еще одна четвертая часть

всей воды, был закрыт второй кран. Через 6 час. после этого, когда было вылито $\frac{3}{4}$ всей воды, был закрыт третий кран. После этого через 10 час. из резервуара вылилась вся вода. Во сколько часов выльется из резервуара вся вода, если будет все время открыт один первый кран? Один второй? Один третий? Один четвертый?

41. В сосуде имеется три крана. Через первый и второй краны вода вливается, через третий выливается. Один первый кран может наполнить сосуд за 10 час., а один второй — за 15 час. При совместном действии всех трех кранов из полного сосуда выливается вся вода за 30 час. Сосуд был полон, когда открыли первый и третий краны. Через 1 час после их открытия первый кран был закрыт, но открыт второй, а еще через 1 час закрыли и третий кран и вновь открыли первый. Через сколько часов после закрытия крана два первых крана наполнят сосуд?

42. Почтальон, идя безостановочно из пункта A через пункт B в пункт C, проходил от A до B по 3,5 *км/час.* и от B до C по 4 *км/час.* Чтобы успеть за столько же времени вернуться из C в A, идя по той же дороге, он должен был бы проходить по 3,75 *км* в час в течение всего пути. Однако, дойдя на обратном пути до B, он задержался в этом пункте на 14 мин. и, чтобы успеть в назначенное время вернуться в A, должен был от B до A проходить уже по 4 *км/час.* Найти расстояние между A и B, B и C.

43. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжал свой путь в B, а велосипедист доехал до A, повернул назад и тоже поехал в B. Пешеход, выйдя из A, пришел в B на t час. позже велосипедиста. Сколько времени прошло до встречи, если известно, что скорость пешехода в k раз меньше скорости велосипедиста. При каком условии задача имеет решение?

44. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии a *км* от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второго велосипедиста, пройдя k-ю часть расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

45. Река течет от пункта P к пункту Q, расстояние между которыми равно 12 *км*. Скорость течения постоянна. A выезжает на лодке из Q в 12 час. дня по направлению к P; B отправляется также из Q в P 5 мин. спустя и нагоняет A в 1 *км* от Q. После того как B доплыл до P и повернул обратно к Q, он встретил A в 2 *км* от P. Через 35 мин. после того, как A приплыл в P, B приплывает обратно в Q. Найти время, когда A плыл мимо B, и скорость течения реки.

46. Пассажирский поезд идет из A в B и после 5 мин. остановки в B идет далее в C. Спустя 14 мин. после того как он покинул B, ему встречается скорый поезд, скорость которого вдвое больше скорости пассажирского поезда. Скорый поезд выехал из C в тот момент, когда пассажирский поезд был, не доезжая B, на расстоянии 25 *км* от A. Кроме того, известно, что скорому поезду нужно 2 час., чтобы пройти расстояние CB, и что если он из A сразу возвратится, то прибудет в C на 45 мин. позже прибытия пассажирского поезда. Сколько километров в час делает каждый поезд и как удалены друг от друга пункты A, B, C?

47. Пассажирский поезд, идя по железной дороге от A к C, останавливается на 7 мин. на станции B, находящейся между A и C. Через 2 мин. после отхода пассажирского поезда из B он встречается с курьерским поездом, который отошел из C в A в тот момент, когда пассажирский находился в 56 *км* по другую сторону от B. Курьерский поезд идет вдвое скорее пассажирского и совершает путь от C до B в полтора часа, но если бы он, достигнув A, тотчас отошел обратно в C, то прибыл бы туда через 3 мин.

после пассажирского поезда. Найти расстояния от A до B и от B до C и скорость каждого поезда.

48. (Задача Л. Н. Толстого). Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полдня работы разделились: одна половина осталась на первом лугу и к вечеру его докосила, а другая половина перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что оставшуюся часть работы выполнил один косец в течение следующего дня?

49. A и B отправляются одновременно из пункта C в пункт D и обратно. A, возвращаясь, встречает B в 180 $м$ от D и приходит в C тремя минутами ранее B. Но если бы он, придя в C, тотчас опять пошел в D, то встретил бы B, пройдя расстояние, равное одной шестой пути между C и D. Найти расстояние между C и D и время, в течение которого оно было пройдено A и B.

50. Два встречных поезда — один пассажирский, идущий из A в B, и другой скорый, идущий из B в A, были задержаны на промежуточной станции C на 2 часа. Увеличив скорости обоих поездов на 25%, машинисты привели их соответственно в B с опозданием на 48 мин. и в A с опозданием на 1 час. 36 мин. Определить первоначальные скорости поездов, если скорость скорого на 20 $км$ в час больше скорости пассажирского и расстояние AB равно 360 $км$. Определить также расстояние между станциями A и C.

51. Два завода получили заказы на одно и то же число машин. Первый начал работать на 20 дней, а кончил на 5 дней раньше второго. К моменту, когда оба завода выполнили вместе одну треть всего данного им заказа, первый завод выпустил в 4 раза больше машин, чем второй. Всего первый завод работал x дней, выпуская по m машин в день, а второй — y дней, выпуская по n машин в день. Найти те из величин x, y, m, n и те из отношений $x : y$ и $m : n$, которые по условиям задачи могут быть определены.

52. Бригада косцов и конная косилка скосили два луга. Косилка начала работу на 1 час 30 мин. позднее косцов. После того как был скошен первый луг, косцы и косилка немедленно перешли на второй луг. Со второго луга косцы ушли на 30 мин. раньше, чем кончила работу косилка. Известно, что первый луг втрое больше второго, на втором лугу косилка скосила вдвое больше, чем косцы, а на обоих лугах вместе косцы скосили столько же, сколько и косилка. В час бригада косцов скашивает u $га$, а косилка — v $га$. Всего бригада косцов работала x часов, а косилка — y часов. Найти те из величин u, v, x, y и отношения $u : v$ и $x : y$, которые могут быть найдены из условий задачи.

53. Из двух труб наполняются два бассейна, из которых второй вдвое больше первого. При наполнении первого бассейна вторая труба открывается на 26 мин. позднее первой, а закрываются обе трубы одновременно. В первый бассейн из первой трубы наливается в 4 раза больше воды, чем из второй. Затем те же две трубы наполняют второй бассейн, причем трубы начинают работать одновременно, кончает же работу вторая труба на 11 мин. позднее первой. В оба бассейна вместе из первой трубы наливается столько же воды, сколько и из второй. Первая труба подает в мин. a $л$ и всего работает x мин., а вторая подает в мин. b $л$ и работает y мин. Определить те из величин a, b, x, y и те из отношений $a : b$ и $x : y$, которые по условиям задачи могут быть найдены.

54. Автомобиль отправляется из города A в город B в 8 час. утра. В городе B он останавливается на 3 час., после чего возвращается в город A. Мотоцикл выезжает из города B в 9 час. утра в город A и встречает автомобиль в точке, которая вдвое ближе к B, чем к A. Доехав до города A, мотоцикл немедленно направляется обратно в город B, куда и приезжает одновременно с возвращением автомобиля в город A. Мотоцикл делает v_1 $км/час$ и всего находится в пути t_1 час., автомобиль делает v_2 $км/час$

и всего находится в пути t_2 час. Найти те из величин v_1, v_2, t_1, t_2 и те из отношений $v_1 : v_2$ и $t_1 : t_2$, которые могут быть определены из условий задачи.

55. Некоторое количество денег было разложено на n кучек. После этого из первой кучки переложили во вторую $\frac{1}{n}$-ю часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $\frac{1}{n}$-ю часть оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее $\frac{1}{n}$-ю часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвертую и т. д. Наконец, из n-й кучки $\frac{1}{n}$-ю часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало A руб. Сколько денег в каждой кучке было до перекладывания (рассмотреть случай $n = 5$)?

56. Некоторую сумму денег следует выдать нескольким лицам. Первое лицо должно получить сначала a рублей и еще $\frac{1}{n}$-ю часть того, что остается после этой предварительной выдачи. После того как выдана первая часть, второе лицо должно получить $2a$ руб. и еще $\frac{1}{n}$-ю остатка. После уплаты первых двух частей третье лицо должно получить $3a$ руб. и $\frac{1}{n}$-ю часть остатка. Наконец, последнее q-е лицо получает qa руб. Какова первоначальная сумма денег и каково количество лиц, если известно, что все лица получили одинаковые суммы?

57.** В магазине один покупатель купил 47,5 *м* тесьмы, дал в кассу 25 руб. и получил сдачу. Другой покупатель вслед за первым взял 83 *м* такой же тесьмы, дал в кассу 100 руб. и получил сдачу. Выяснилось, что кассир допустил ошибку: первому покупателю он сдал столько рублей, сколько ему полагалось копеек, и столько копеек, сколько полагалось рублей; такая же ошибка была допущена и в отношении второго покупателя. Выяснилось, кроме того, что с обоих покупателей вместе кассир получил за тесьму столько денег, сколько стоила проданная им тесьма, поэтому для исправления ошибки первый покупатель передал второму 64 руб. с копейками. Сколько стоит 1 *м* тесьмы?

58. Некто N жил в XIX в. Суммы цифр года его рождения и смерти одинаковы. Число прожитых им лет начинается цифрой 8. Определить год рождения N.

59. Некто N родился в XIX в. В 1901 г. сумма цифр числа лет, прожитых им, равнялась сумме цифр года его рождения. В каком году родился N?

Глава VI

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

§ 1. Квадратный трехчлен

Решить следующие уравнения:

1. $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0.$

2. $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0.$

3. $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} + 2 = 0.$

4. $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2-a^2}.$

5. $\frac{x-a}{x-b} - \frac{x-b}{x-a} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = 0.$

6. $\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1, \quad b \neq c, \ c \neq a, \ a \neq b.$

7. $(a^2+b^2+c^2)x^2 + 2(a+b+c)x + 3 = 0.$

8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}.$

9. $(c+a-2b)x^2 + (a+b-2c)x + b + c - 2a = 0.$

10. $\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} = \frac{(a+b)^2}{ab}, \quad ab \neq 0.$

11. $a(a+1)x^2 + x - a(a-1) = 0.$

12. $a(a+2)x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0.$

13. $(a^2+a-2)x^2 + (2a^2+a+3)x + a^2 - 1 = 0.$

14. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad ab \neq 0.$

15. $\frac{a+b}{x+b} + \frac{a+c}{x+c} = 2\frac{a+b+c}{x+b+c}.$

Найти все значения параметра a, при которых корни следующих уравнений действительны, и определить знаки корней (задачи 16—19).

16. $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0.$

17. $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0,$

18. $3ax^2 - 2(3a-2)x + 3(a-1) = 0.$

19. $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0.$

20. Доказать, что уравнение

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1,$$

где a и b — действительные числа, не равные нулю одновременно, имеет лишь действительные корни.

21. В уравнении

$$(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$$

определить k так, чтобы один из корней был вдвое более другого.

22. Определить все значения a, при которых уравнения

$$x^2+ax+1=0, \quad x^2+x+a=0$$

имеют хотя бы один общий корень.

23. Определить значение a таким образом, чтобы один из корней уравнения

$$x^2-\frac{15}{4}x+a^2=0$$

был квадратом другого.

24. Найти все действительные значения a, при которых трехчлен

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

будет положителен при всех действительных значениях x.

25. Корни x_1 и x_2 уравнения

$$x^2-3ax+a^2=0$$

таковы, что

$$x_1^2+x_2^2=1{,}75.$$

Определить величину a.

26. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2+kx+1=0.$$

Найти все значения k, при которых справедливо неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2>1.$$

27. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-cx-c=0,$$

где c — действительное число ($c\neq 0$), то

$$x_1^3+x_2^3+x_1^3x_2^3>0.$$

28. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-ax+a-1=0,$$

где a — действительное число. Найти значение a, при котором величина выражения

$$x_1^2+x_2^2$$

будет наименьшей.

29. Корни уравнения

$$mx^2+nx+n=0 \qquad (m\neq 0,\ n\neq 0)$$

относятся как $p:q$. Доказать, что тогда при соответствующем выборе знаков перед радикалами

$$\pm\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}\pm\sqrt{\frac{n}{m}}=0.$$

30. Найти все значения a, при которых корни уравнения

$$(1+a)x^2-3ax+4a=0$$

действительны и каждый из корней больше 1.

31. Доказать, что если между коэффициентами уравнений

$$x^2 + px + q = 0$$

и

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0,$$

где p, q, p_1, q_1 — действительные числа, существует соотношение

$$pp_1 = 2(q + q_1),$$

то, по крайней мере, одно из уравнений имеет действительные корни.

32. В каком промежутке должно изменяться число a, чтобы оба корня уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

были заключены между 2 и 4?

33. Дано уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$.

1°. При каком необходимом и достаточном условии корни x_1 и x_2 этого уравнения будут заключены между числами p и q $(p < q)$?

2°. При каком необходимом и достаточном условии один из корней лежит между числами p и q, а другой не лежит между этими числами?

34. Дано уравнение второй степени

$$(t + 2)x^2 - 2tx - t = 0.$$

1°. Исследовать, при каких действительных значениях t корни действительны и каковы их знаки.

2°. Определить t так, чтобы корни были симметричны относительно точки $x = 1$.

3°. Вычислить значения t, при которых уравнение имеет двойной корень, и найти этот двойной корень.

4°. Показать, что если корни уравнения действительны и различны, то они гармонически сопряжены относительно двух фиксированных точек; найти эти точки.

35. Даны два уравнения:

$$x^2 + 2x + a = 0,$$

$$(1 + a)(x^2 + 2x + a) - 2(a - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Доказать, что при действительных значениях a корни второго уравнения будут мнимыми, если корни первого уравнения действительные и неравные, и наоборот, если корни второго уравнения при действительном значении a мнимые, то корни первого действительные и неравные.

36. Расположить в порядке возрастания корни двух уравнений (a — действительное число):

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad x^2 + ax - 1 = 0.$$

37. Доказать, что если корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

действительны, то корни уравнения

$$x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)px + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 q = 0$$

действительны (p, q и a — действительные числа).

38. Доказать, что если уравнение

$$x^2+px+q=0$$

имеет различные действительные корни (p и q — действительные числа), то уравнения

$$x^2+(p+2a)x+q+ap=0, \quad 3x^2+2(p+a)x+q+ap=0,$$

где a — любое действительное число, также имеют действительные различные корни.

39. Найти действительные значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения

$$2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$$

будут удовлетворять условию

$$x_1<a<x_2.$$

40. Для каких действительных значений a уравнение

$$(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$$

имеет один корень, больший 3, а другой — меньший 2?

41. Для каких действительных значений a корни уравнения

$$4x^2-2x+a=0$$

оба заключены между -1 и $+1$?

42. Найти все действительные значения a, при которых оба корня уравнения

$$(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0$$

заключены между 0 и -2.

43. При каких действительных значениях a корни уравнения

$$(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3=0$$

будут действительны и какими неравенствами они будут связаны с -1 и $+1$ в зависимости от различных значений a?

44. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

Вычислить через a, b и c следующие выражения:

а) $x_1^2+x_2^2$; *г)* $x_1^5+x_2^5$;

б) $x_1^3+x_2^3$; *д)* $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$.

в) $x_1^4+x_2^4$;

45. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

Вычислить в зависимости от a, b, c следующие выражения:

а) $4x_1x_2^2-x_1^3+2x_1x_2+4x_1^2x_2-x_2^3$;

б) $\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}$;

в) $\dfrac{(3x_1+1)(3x_2+1)}{(2x_1-9)(2x_2-9)}$;

г) $\dfrac{1}{(ax_1+b)^2}+\dfrac{1}{(ax_2+b)^2}$.

46. Для каких значений a разность корней уравнения

$$2x^2-(a+1)x+a+3=0$$

равна 1?

47. При каком значении a один из корней уравнения

$$x^2-7x+2a=0$$

будет вдвое более одного из корней уравнения

$$x^2-5x+a=0?$$

48. При каких значениях a уравнения

$$(1-2a)x^2-6ax-1=0,$$
$$ax^2-x+1=0$$

имеют общий корень?

49. Найти все значения a (в том числе и комплексные), при которых уравнение

$$x^2+(a+1)x+a^2=0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

50.** Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-6x+1=0,$$

то $x_1^n+x_2^n$ при любом целом n является целым числом и никогда не делится на 5.

51*. Сколько существует уравнений вида $x^2-px-q=0$, где p и q — натуральные числа, положительный корень которых меньше данного натурального числа r?

52*. Доказать, что трехчлен

$$x^2+5x+16$$

ни при каком целом x не делится на 169.

53*. Найти, какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять действительные коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, чтобы выражение

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2$$

было квадратом многочлена первой степени относительно x. Показать, что в этом случае корень многочлена равен любой из тех дробей

$$-\frac{a_1}{b_1},\quad -\frac{a_2}{b_2},\quad -\frac{a_3}{b_3},$$

у которой знаменатель не равен нулю.

Верны ли выводы, если для a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 допускать и комплексные значения?

54. При каком действительном значении x выражение

$$(ax+b)^2+(cx+d)^2,$$

где a, b, c, d — действительные числа, имеет наименьшее значение. Найти это наименьшее значение.

55. Доказать, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

мнимые.

56. При каком необходимом и достаточном условии

$$(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$$

будет квадратом многочлена первой степени относительно x. Показать, что если $(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$ и $(a+cx)^2+(a'+c'x)^2$ — квадраты многочленов первой степени относительно x, причем $a^2+a'^2\neq 0$, то тем же свойством обладает функция

$$(b+cx)^2+(b'+c'x)^2.$$

Верны ли выводы, если для a, a', b, b', c, c' допускать комплексные значения?

57. I. Рассмотрим семейство квадратных трехчленов

$$F(x)=x^2-sx+p=0,$$

где s и p — действительные числа.

Введем на плоскости (H) две взаимно-перпендикулярные оси координат Os и Op. Каждому квадратному трехчлену $F(x)$ в плоскости (H) соответствует точка с координатами s и p (и обратно).

1°. Найти геометрическое место точек M таких, чтобы уравнение $F(x)=0$ имело двойной корень. Найти геометрическое место точек M таких, чтобы один из корней уравнения $F(x)=0$ был равен $+1$. Тот же вопрос, если корень равен -1. Указать в зависимости от положения точки M в плоскости (H) число корней уравнения $F(x)=0$, заключенных между -1 и $+1$.

2°. Найти геометрическое место точек M в плоскости (H) таких, что один из корней уравнения $F(x)=0$ равен данному числу a. Указать на этом геометрическом месте точку A, соответствующую трехчлену $(x-a)^2$, и точку T, соответствующую трехчлену $x(x-a)$. Найти огибающую прямых AT, если a изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

3°. Пусть A, B, P — точки, соответствующие трехчленам $(x-a)^2$, $(x-b)^2$, $(x-a)(x-b)$, где a и b — два данных действительных числа. Построить точки A и B, исходя из положения точки P. Найти геометрическое место точек M, соответствующих трехчлену $(x-c)(x-d)$ такому, что если на оси координат отметить точки с координатами a, b, c, d, то две последние разделят гармонически отрезок, ограниченный двумя первыми (a и b — постоянные, c и d — переменные).

II. Рассмотрим в плоскости (H) две точки с координатами

$$s=11,\quad p=22 \quad \text{и} \quad s=7,\quad p=10;$$

каждой из них соответствует трехчлен $F(x)=x^2-sx+p$. Составим рациональную дробь y, у которой числитель — первый трехчлен, а знаменатель — второй. Определить целые значения x, при которых y будет также целым.

III. Рассмотрим теперь функцию

$$f(x)=\cos^2 x-s\cos x+p,$$

где x изменяется на сегменте $[0,\ \pi]$.

Каждой такой функции, как и ранее, поставим в соответствие точку $M(s,\ p)$ плоскости (H).

1°. Исследовать функцию $f(x)$ на возрастание и убывание в зависимости от положения точки M в плоскости (H).

2°. Построить на одном и том же графике кривые, соответствующие следующим случаям:

а) $s=-4$, $p=6$;
б) $s=-2$, $p=6$;
в) $s=1$, $p=6$;
г) $s=2$, $p=6$;
д) $s=4$, $p=6$.

3°. Пусть M_0 и M — точки плоскости (H), соответствующие функциям

$$f_0(x)=\cos^2 x - s_0\cos x + p_0,$$
$$f(x)=\cos^2 x - s\cos x + p.$$

Найти наибольшее значение выражения $|f(x)-f_0(x)|$. Обозначим этот максимум через $D(M_0, M)$; рассмотреть несколько случаев в зависимости от знаков $s-s_0$ и $p-p_0$.

4°. Предположим, что M_0 — фиксированная точка, а M — переменная. Определить геометрическое место точек M при условии, что $D(M_0, M)=$ $=\text{const}$. Пусть A — точка с координатами $s=p=2$, а B — точка с координатами $s=p=-2$. Найти геометрическое место точек M таких, что

$$D(M, A)=D(M, B).$$

§ 2. Корни целой рациональной функции от одного аргумента

Найти рациональные корни многочленов:

1. $x^3-6x^2+15x-14$.

2. $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$.

3. $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

4. $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$.

5. $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$.

6. $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$.

7. $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

8. Доказать, что если все коэффициенты целой рациональной функции $f(x)$ — целые числа и уравнение $f(x)=1$ имеет четыре попарно различных целых корня:

$$x=x_1,\quad x=x_2,\quad x=x_3,\quad x=x_4,$$

то при целом значении x, $f(x)$ не может быть равно -1.

Решить следующие уравнения (найти все корни, в том числе и комплексные):

9. $x^6=1$.

10. $(x^2+x)^4=1$.

11*. Доказать, что если $x^7=1$ и $x\neq 1$, то

$$x^4+x^2+x=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

12. Доказать, что если -1, x_1, x_2, ..., x_n — корни уравнения $x^{n+1}+1=0$, то $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)=1$.

13. Привести уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$$

к двучленному уравнению, а затем решить его.

Решить следующие уравнения:

14. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$.

15. $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0$.

Решить следующие уравнения и найти, при каких действительных значениях параметра a уравнения имеют действительные корни; выделить эти действительные корни и указать также мнимые корни:

16. $(a - 1)x^4 - 4x^2 + a + 2 = 0$.

17. $(a - 3)x^4 - 2(3a - 4)x^2 + 7a - 6 = 0$.

18*. При каких действительных значениях a уравнение

$$ax^4 - (a - 3)x^2 + 3a = 0$$

имеет один корень, меньший чем -2, и три корня, больших чем -1?

19. При каком условии (p и q — действительные числа):

а) все корни уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ действительные;

б) все корни этого уравнения мнимые;

в) два корня мнимых, а два действительных;

г) все корни «чисто» мнимые.

Вывести необходимые и достаточные условия, доказав необходимость и достаточность.

20. Доказать, что если корни биквадратного уравнения

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

(p и q — действительные числа) составляют арифметическую прогрессию, то либо все члены этой прогрессии — действительные числа, либо все — «чисто» мнимые.

21. При каком условии корни биквадратного уравнения

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

действительны и удовлетворяют следующим условиям?

а) все они заключены в интервале $(-a, a)$, где a — данное положительное число;

б) все они заключены вне этого интервала;

в) одна пара корней заключена внутри этого интервала, другая — вне его.

Решить следующие уравнения:

22. $x^6 + 5x^3 - 24 = 0$.

23. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

24. $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0$.

25. $(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0$.

26. $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 4$.

27. $x^4 + 4x - 1 = 0$.

28. $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$,

29. $x^4 + (x - 4)^4 = 32$.

30. $x^5 + (6 - x)^5 = 1056$.

31. $(x^2 + 1)^2 = 4(2x - 1)$.

32. $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$.

33. $x^4 + 4a^3x = a^4$.

34. $(x^2 - 16)(x - 3)^2 = 9x^2$.

35. $x^4 - 12x + 323 = 0$.

36. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$ (подстановка $6x+5=z$).

37. $(x+a)^6+(x+2a)^6+(x+3a)^6=2a^6$.

38. $(ax-1)^3+(a+1)^3x^2=0$.

39. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

40. $x^3+(1-m^2)x+m=0$.

41. $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5$.

42. $(1+x+x^2)^2=\frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$.

43. $x^4+x^3+x+1=4x^2$.

44. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

45. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$.

46. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.

47. $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$.

48. $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$.

49. $abx(x+a+b)^3-(ax+bx+ab)^3=0$.

50. $x^3-3x=a^3+\frac{1}{a^3}$.

51. $x^3+(b^2-2)x=2bx^2-2b$.

52.** $x^3-\frac{3x}{ab}+\frac{a+b}{a^2b^2}=0$.

53. $9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(1-x)=4x\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

54. $x^6+(c-b)x^3-bc=0$.

55. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=\frac{9}{2}$, $(4x^2+7x=y)$.

56*. $(a+x)^8+(a^2+x^2)^4=a^4x^4$, $a\neq 0$.

57. $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30$.

58. $(1+x)^4=2(1+x^4)$.

59*. Доказать, что если все корни уравнения $x^3+px+q=0$ действительны, то $p<0$ (p и q — действительные числа).

60. Доказать, что уравнение

$$x^2+px+q=0$$

не может иметь рациональных корней, если p и q — целые нечетные числа.

61*. Дано уравнение

$$x^4-7x^3+1=0.$$

Не решая его, составить уравнение третьей степени, корни которого были бы квадратами корней данного уравнения. Имеет ли данное уравнение мнимые корни?

62. Вопрос предыдущей задачи для уравнения

$$x^5+x^3+x^2+2x+3=0.$$

Решить также вопрос: имеет ли это уравнение мнимые корни?

63. Составить уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения

$$x^3+px+q=0.$$

64.** Составить уравнение (шестой степени), корни которого равны x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_4, x_2+x_3, x_2+x_4, x_3+x_4, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения

$$x^4+x^3-1=0.$$

65. Составить уравнение третьей степени, корни которого равны x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3+2x-1=0.$$

66. Составить уравнение третьей степени, корни которого

$$\frac{x_1}{-x_1+x_2+x_3},\quad \frac{x_2}{x_1-x_2+x_3},\quad \frac{x_3}{x_1+x_2-x_3},$$

где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-x^2-3=0$.

67. Доказать, что если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3+px+q=0,$$

то

$$x_2^2+x_2x_3+x_3^2=x_3^2+x_3x_1+x_1^2=x_1^2+x_1x_2+x_2^2.$$

68. При каком условии уравнение

$$x^5+px^4+q=0$$

имеет двойной корень?

69. При каком значении λ уравнение

$$3x^4+4x^3-6x^2-12x+\lambda=0$$

имеет кратный корень. Каков этот корень и какова его кратность?

70. При каких значениях a, b, c уравнение

$$x^6+ax^4+10x^3+bx+c=0$$

имеет корень кратности 4?

71. Стороны треугольника служат корнями уравнения

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Доказать, что $p^2>4q$.

72. Один из корней уравнения

$$x^3-6x^2+ax-6=0$$

равен 3. Решить уравнение.

73. Числа α и β ($\alpha\neq\beta$) являются корнями уравнения

$$x^3+px+q=0$$

и удовлетворяют равенству $\alpha\beta+\alpha+\beta=0$.
Найти соотношение между p и q и выразить третий корень через α и β.

74. Уравнения

$$x^3+p_1x+q_1=0,$$
$$x^3+p_2x+q_2=0,$$

где $p_1\neq p_2$ имеют общий корень. Найти этот корень, а также остальные корни обоих уравнений.

75. Определить коэффициенты p и q так, чтобы многочлен

$$6x^4-7x^3+px^2+3x+2$$

делился бы без остатка на x^2-x+q.

76. Решить уравнение

$$x^{4n}-4x^n-1=0,$$

где n — целое положительное число.

77. Решить уравнение

$$x^n-nax^{n-1}-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}-\ldots-a^n=0.$$

Решить уравнения:

78*. $(x+1)^n-(x-1)^n=0.$

79*. $(x+i)^n-(x-i)^n=0.$

80*. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi.$

81*. $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0.$

82**. $\cos\varphi+C_n^1\cos(\varphi+\alpha)\,x+C_n^2\cos(\varphi+2\alpha)\,x^2+\ldots$

$\ldots+C_n^n\cos(\varphi+n\alpha)\,x^n=0,\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$

83. Доказать, что все корни уравнения

$$a(x-b)^n+c(x-d)^n=0,$$

где a, b, c, d — комплексные числа, расположены или на окружности, или на прямой (числу $u+iv$, где u и v действительны, ставим в соответствие точку с координатами u, v).

§ 3. Рациональные уравнения с одним неизвестным

Решить следующие уравнения:

1. $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0.$

2. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x-6}.$

3. $\frac{1}{x-1}+\frac{11}{x-11}=-\frac{9}{9-x}+\frac{10}{x-10}.$

4. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{10}{9}.$

5*. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=1.$

6. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{x+1}{x-1}.$

7. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0.$

8. $\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+2}+\frac{21}{x-3}=\frac{5}{x+1}+\frac{4}{x-2}+\frac{21}{x+3}.$

9. $\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}.$

10. $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-4}{x+4}.$

11. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4.$

12*. $\frac{24}{x^2-2x}=\frac{12}{x^2-x}+x^2-x.$

13*. $\frac{1+x^5}{(1+x)^5}=0{,}088.$

14. $x(x+4)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+4\right)=0.$

15. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$

16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$

17. $x^2+\frac{25x^2}{(5+2x)^2}=\frac{74}{69}$.

18. $\frac{x^3+3}{(x+3)^3}=\frac{26}{343}$.

19*. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$.

20. $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

21*. $\frac{(x^2+x+1)^3}{(x+1)^2(x^3+1)}=\frac{49}{45}$.

22*. $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{625}{112}$.

23*. $\frac{(x-1)^2x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{9}$.

24**. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\frac{x^2+36}{x^2-36}$.

25*. $\frac{1}{5}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}$.

26**. $31\left(\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}\right)$.

27. $x^4=\frac{11x-6}{6x-11}$.

28*. $x^5=\frac{133x-78}{133-78x}$.

29*. $x^6=\frac{257x^3-68}{68x^3-257}$.

30. $\frac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\frac{1}{x}$.

31. $x^3+\frac{1}{x^3}=6\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

§ 4. Рациональные уравнения с одним неизвестным, содержащие параметры

Найти все значения a, при которых следующие уравнения будут неэквивалентны:

1. $\frac{a^2+2x}{x-a}=\frac{x-a}{x+a}$ и $(a^2+2x)(x+a)=(x-a)^2$.

2. $\frac{a+x}{ax^2}=\frac{1}{x(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)}$ и $(a+x)(a-1)=ax+x^2$.

3. $\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1$ и $ax^2-2a(x-1)=(a^2+1)(x-1)$.

4. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}$

и

$$6(x-a)^2-13x(x-a)+6x^2=0.$$

При каком необходимом и достаточном условии между параметрами a, b, c, ... следующие уравнения будут эквивалентны?

5. $$\frac{3a+2b+3x}{3b+2a-3x}\cdot\frac{a+2b-2x}{b+2a+2x}=\frac{x+2a-b}{x-2b+a}$$

и

$$(3a+2b+3x)(a+2b-2x)(x-2b+a)=$$
$$=(x+2a-b)(3b+2a-3x)(b+2a+2x).$$

6. $$\frac{x+2a-b}{x+2b-a}\cdot\frac{x+a}{x+b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{2x+2a-b}{2x+2b-a}$$

и

$$b(x+a)(x+2a-b)(2x+2b-a)=a(x+b)(x+2b-a)(2x+2a-b).$$

7. $$\frac{(2a+b-x)^2}{(b+x)^2}=\frac{(3a+b-x)(3a+2b-2x)}{(b+2x)(x+2b)}$$

и

$$(2a+b-x)^2(b+2x)(x+2b)=(b+x)^2(3a+b-x)(3a+2b-2x).$$

8. $$\frac{3a-x}{3b-x}\,\frac{3x-b}{3x-a}=\frac{9a-b}{9b-a}\,\frac{8x+3a-3b}{8x-3a+3b},$$
$$9b-a\neq 0,\quad 9a-b\neq 0$$

и

$$(3a-x)(3x-b)(9b-a)(8x-3a+3b)=$$
$$=(3b-x)(3x-a)(9a-b)(8x+3a-3b).$$

9. $$\frac{(x+a-b)^2+36a^2}{(x-a+b)^2+36b^2}=\left(\frac{7a-b+x}{7b-a+x}\right)^2$$

и

$$[(x+a-b)^2+36a^2](7b-a+x)^2=[(x-a+b)^2+36b^2](7a-b+x)^2.$$

10. $$\frac{(a-2x)^2+(2b-x)^2}{(b-2x)^2+(2a-x)^2}=\frac{(a+2b-3x)^2}{(b+2a-3x)^2}$$

и

$$[(a-2x)^2+(2b-x)^2](b+2a-3x)^2=[(b-2x)^2+(2a-x)^2](a+2b-3x)^2.$$

11. $$\frac{b+c}{bc-x}+\frac{c+a}{ca-x}+\frac{a+b}{ab-x}=\frac{a+b+c}{x},$$

где

$$a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad c\neq 0,$$

и

$$x(b+c)(ca-x)(ab-x)+x(c+a)(bc-x)(ab-x)+$$
$$+x(a+b)(bc-x)(ca-x)=(a+b+c)(bc-x)(ca-x)(ab-x).$$

12. $$\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}$$

(где все числители отличны от нуля) и

$$(a+c)(x+2a)(x+a+b)+(b+c)(x+2b)(x+a+b)=$$
$$=(a+b+2c)(x+2a)(x+2b).$$

13. $$\frac{(x+a)(x+a+b)}{(x+c)(x+c+b)}=\frac{(x-a)(x-a-b)}{(x-c)(x-c-b)}$$

и

$$(x+a)(x+a+b)(x-c)(x-c-b)=(x+c)(x+c+b)(x-a)(x-a-b).$$

14. $$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0, \quad a\neq 0,\ b\neq 0$$

и

$$(x+a)^2(x-b)^2+(x+b)^2(x-a)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)(x^2-a^2)(x^2-b^2)=0.$$

15. $$\frac{(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(x-a)^2-(x-a)(x-b)+(x-b)^2}=\frac{19}{7}$$

и

$$6(x-a)^2-13(x-a)(x-b)+6(x-b)^2=0.$$

16. $$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}$$

и

$$(x+a)(x+b)(x-ma)(x-mb)=(x-a)(x-b)(x+ma)(x+mb).$$

17. $$\frac{a(c-d)}{x+a}+\frac{d(a-b)}{x+d}=\frac{b(c-d)}{x+b}+\frac{c(a-b)}{x+c}$$

(где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$, $a\neq b$, $c\neq d$) и

$$a(c-d)(x+d)(x+b)(x+c)+d(a-b)(x+a)(x+b)(x+c)=$$
$$=b(c-d)(x+a)(x+d)(x+c)+c(a-b)(x+a)(x+b)(x+d).$$

18. $$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3 \quad (\text{где } a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$$

и

$$a(x+b)(x+c)+b(x+c)(x+a)+c(x+a)(x+b)=$$
$$=3(x+a)(x+b)(x+c).$$

19. $$\frac{a}{b+c-x}+\frac{b}{c+a-x}+\frac{c}{a+b-x}+3=0,$$
$$a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad c\neq 0$$

и

$$a(c+a-x)(a+b-x)+b(b+c-x)(a+b-x)+$$
$$+c(b+c-x)(c+a-x)+3(b+c-x)(c+a-x)(a+b-x)=0.$$

20. $$\frac{(a-2x)^3+(2a-x)^3}{(b-2x)^3+(2b-x)^3}=\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^3$$

и

$$[(a-2x)^3+(2a-x)^3](b-x)^3=[(b-2x)^3+(2b-x)^3](a-x)^3.$$

21. $$\left(\frac{a+b}{x}+\frac{a+x}{b}+\frac{b+x}{a}+2\right)\left(\frac{x}{a+b}+\frac{b}{a+x}+\frac{a}{b+x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

(где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$)

и

$$PQ=\frac{5}{2}abx(a+b)\cdot(a+x)\cdot(b+x).$$

где

$$P=(a+b)ab+(a+x)ax+(b+x)bx+2abx,$$
$$Q=x(a+x)(b+x)+b(a+b)(b+x)+a(a+b)(a+x)+$$
$$+\frac{1}{2}(a+b)(a+x)(b+x).$$

22. $$\frac{x^3+a^3}{(x+a)^3}+\frac{x^3+b^3}{(x+b)^3}+\frac{x^3+c^3}{(x+c)^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x-a}{x+a}\cdot\frac{x-b}{x+b}\cdot\frac{x-c}{x+c}=\frac{3}{2}$$

и

$$(x^2-ax+a^2)(x+b)^2(x+c)^2+(x^2-bx+b^2)(x+a)^2(x+c)^2+$$
$$+(x^2-cx+c^2)(x+a)^2(x+b)^2+\frac{3}{2}(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)=$$
$$=\frac{3}{2}(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2.$$

Решить следующие рациональные уравнения, содержащие параметры:

23. $$\frac{a^2+2x}{x-a}=\frac{x-a}{x+a}.$$

24. $$\frac{a+x}{ax^2}=\frac{1}{x(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)}.$$

25. $$\frac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1.$$

26. $$\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}.$$

27*. $$\frac{3a+2b+3x}{3b+2a-3x}\cdot\frac{a+2b-2x}{b+2a+2x}=\frac{x+2a-b}{x-2b+a}.$$

28*. $$\frac{x+2a-b}{x+2b-a}\cdot\frac{x+a}{x+b}=\frac{a}{b}\,\frac{2x+2a-b}{2x+2b-a}.$$

29*. $$\left(\frac{2a+b-x}{b+x}\right)^2=\frac{3a+b-x}{b+2x}\,\frac{3a+2b-2x}{2b+x}.$$

30*. $$\frac{3a-x}{3b-x}\,\frac{3x-b}{3x-a}=\frac{9a-b}{9b-a}\,\frac{8x+3a-3b}{8x-3a+3b}.$$

31**. $$\frac{(x+a-b)^2+36a^2}{(x-a+b)^2+36b^2}=\frac{(7a-b+x)^2}{(7b-a+x)^2}.$$

32*. $$\frac{(a-2x)^2+(2b-x)^2}{(b-2x)^2+(2a-x)^2}=\frac{(a+2b-3x)^2}{(b+2a-3x)^2}.$$

33*. $$\frac{b+c}{bc-x}+\frac{c+a}{ca-x}+\frac{a+b}{ab-x}=\frac{a+b+c}{x},$$

где $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$.

34*. $$\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b},$$

где $a+c\neq0$, $b+c\neq0$, $a+b+2c\neq0$.

35*. $$\frac{(x+a)(x+a+b)}{(x+c)(x+c+b)}=\frac{(x-a)(x-a-b)}{(x-c)(x-c-b)}.$$

36*. $$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0,$$
$$a\neq0,\quad b\neq0.$$

37. $$\frac{(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(x-a)^2-(x-a)(x-b)+(x-b)^2}=\frac{19}{7}.$$

38. $$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}.$$

39. $$\frac{a(c-d)}{x+a}+\frac{d(a-b)}{x+d}=\frac{b(c-d)}{x+b}+\frac{c(a-b)}{x+c},$$

где $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$, $d\neq0$.

40. $$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3,$$

где $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$.

41. $$\frac{a}{b+c-x}+\frac{b}{c+a-x}+\frac{c}{a+b-x}+3=0,$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

42. $$\frac{(a-2x)^3+(2a-x)^3}{(b-2x)^3+(2b-x)^3}=\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^3.$$

43**. $$\left(\frac{a+b}{x}+\frac{a+x}{b}+\frac{b+x}{a}+2\right)\left(\frac{x}{a+b}+\frac{b}{a+x}+\frac{a}{b+x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2},$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$.

44**. $$\frac{x^3+a^3}{(x+a)^3}+\frac{x^3+b^3}{(x+b)^3}+\frac{x^3+c^3}{(x+c)^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x-a}{x+a}\cdot\frac{x-b}{x+b}\cdot\frac{x-c}{x+c}=\frac{3}{2}.$$

45. $$\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a-x)^2+(x-b)^2}=\frac{41}{20}(a-b)^2.$$

46. $$\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^4+(x-b)^4}=\frac{211}{97}(a-b).$$

47. $$\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2}=\frac{a^4+b^4}{(a+b)^2},\quad a+b\neq 0.$$

48*. $$\frac{a-x}{(x-b)^2}+\frac{x-b}{(a-x)^2}=\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2},\quad a\neq 0,\ b\neq 0.$$

49**. $$\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2+\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^2+2\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+a)(x+b)(x+c)}=1.$$

50**. $$\frac{(x+a+b)^5+(x+c+d)^5}{(x+a+c)^5+(x+b+d)^5}=\lambda.$$

51. $$\frac{(x+a+b)^5+(x+c+d)^5}{(x+a+c)^5+(x+b+d)^5}=\frac{(a+b-c-d)^2}{(a-b+c-d)^2},\quad a-b+c-d\neq 0.$$

52. $$\frac{(n-1)(a^4+a^2x^2+x^4)}{(n+1)(a^4-a^2x^2+x^4)}=\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{ax}{a^2-x^2}\right)^2,\quad n\neq 0,\quad n\neq 1.$$

§ 5. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными

Решить следующие системы уравнений:

1. $$x+y=\frac{21}{8},\quad \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{35}{6}.$$

2. $$x^2+y+1=0,\quad x+y^2+1=0.$$

3. $$x^2+y^2=0,\quad x+y=1.$$

4. $$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$$

5. $$x^3-y^3=19(x-y),\quad x^3+y^3=7(x+y).$$

6. $$x+y+xy=7,\quad x^2+y^2+xy=13.$$

7. $$x^2+3=2xy,\quad 6x^2-11y^2=10.$$

8. $$x^2-xy+y^2=7,\quad x+y=5.$$

9. $$x^2+y^2=17,\quad x+xy+y=9.$$

10. $$x^2+y^2+x+y=32,\quad 12(x+y)=7xy.$$

11. $$(x-y)(x^2-y^2)=16,\quad (x+y)(x^2+y^2)=40.$$

12. $$xy(x+y)=30,\quad x^3+y^3=35.$$

13. $$x^3=5x+y,\quad y^3=x+5y.$$

14. $$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{36},\quad xy^2-x^2y=324.$$

15. $(x^2+1)(y^2+1)=10,\quad (x+y)(xy-1)=3.$

16. $\frac{x}{y}(x^2+y^2)=6,\quad \frac{y}{x}(x^2-y^2)=1.$

17. $(x-y)(x^2+y^2)=447,\quad xy(x-y)=210.$

18. $x^3-y^3=26,\quad x^4-y^4=20(x+y).$

19. $x^3+x^3y^3+y^3=12,\quad x+xy+y=0.$

20. $(5x-1)(3y+2)=(2x+1)(9y-2),$
$(3x+2)(2y-9)=-(x+2)(y+9).$

21. $x^3+y^3+xy(x+y)=13,\quad x^2y^2(x^2+y^2)=468.$

22. $x^4-x^2+y^4-y^2=612,\quad x^2+xy+y^2=39.$

23. $\frac{xy}{x-3}=\frac{9}{2},\quad x+y=12.$

24. $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2},\quad x^2-y^2=3.$

25. $y^4+xy^2-2x^2=0,\quad x+y=6.$

26. $x^2y+xy^2=30,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}.$

27. $x^2+y^2-4x-3y+5=0,\quad 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0.$

28. $xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=13,\quad xy-\frac{1}{xy}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=12.$

29. $x^2-y^2+3y=0,\quad x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0.$

30. $x+y+xy=19,\quad xy(x+y)=84.$

31. $xy=15,\quad x+y+x^2+y^2=42.$

32. $xy(x+y)=20,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4}.$

33. $x^2+y^2+2(x+y)=23,\quad x^2+y^2+xy=19.$

34. $x^4-x^2y^2+y^4=1153,\quad x^2-xy+y^2=33.$

35. $(x+y)(xy+1)=18xy,\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2.$

36. $x^3=31x^2-4y^2,\quad y^3=31y^2-4x^2.$

37. $\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{31}{7},\quad x^2+xy+y^2=3.$

38*. $16x^2+26xy+34y^2-30x-90y+85=0,$
$11x^2+46xy+14y^2-60x-30y+20=0.$

39*. $x^3y+x^3y^2+2x^2y^2+x^2y^3+xy^3=30,$
$x^2y+xy+x+y+xy^2=11.$

40*. $\frac{x+y}{1+xy}=\frac{5}{4},\quad \frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4}=\frac{257}{32}.$

41*. $(x^2+y^2)(x+y)=15xy,\quad (x^4+y^4)(x^2+y^2)=85x^2y^2.$

42*. $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}\cdot\frac{1+xy+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{49}{81},\quad \frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)^2}\cdot\frac{1-xy+x^2y^2}{(1-xy)^2}=9.$

43. Найти действительные решения системы

$$\frac{(1+x+x^2)(1+y+y^2)}{(1-x+x^2)(1-y+y^2)}=\frac{13}{3},\quad \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}=\frac{25}{12}.$$

§ 6. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными, содержащие параметры

Решить и исследовать следующие системы уравнений:

1. $x^2 - xy + ay = 0, \quad y^2 - xy - 4ax = 0.$

2. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = a^2, \quad x^2 + xy + y^2 = 1.$

3. $x + y = a, \quad x^4 + y^4 = a^4.$

4. $x + y = a, \quad x^5 + y^5 = a^5.$

5. $x + y = a, \quad x^6 + y^6 = a^6.$

6. $x + y = a, \quad x^7 + y^7 = a^7.$

7. $x^3 + y^3 = a, \quad x^2y + xy^2 = b, \quad a > 0, \ b > 0.$

8**. $\dfrac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = a, \quad \dfrac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)} = b.$

9. $x^2 - y^2 = a^2, \quad (x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy.$

10. $x^5 + y^5 = a^5, \quad x + y = b.$

11. $\dfrac{x^5 - a^5}{x - b} = y^4, \quad \dfrac{y^5 - a^5}{y - b} = x^4.$

12. $\dfrac{x^2}{a-b} + \dfrac{y^2}{a+b} = x + y, \quad y - x = 2b, \quad a \neq b, \ a \neq -b.$

13. $x^2 + y^2 - 2ax - (a+b)y + a^2 + ab - b^2 = 0,$
$(a-b)x - 2by + b^2 + 2ab - a^2 = 0.$

14*. $x^4 + x^2y^2 + y^4 - \dfrac{a^5x - b^5y}{x^2 - y^2} = 0, \quad xy(x^2 + y^2) - \dfrac{a^5y - b^5x}{x^2 - y^2} = 0,$

где a и b не равны нулю одновременно.

15. $x^4 + y^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4), \quad xy = a^2 - b^2.$

16. $x + y = a, \quad x^4 + y^4 = b^4.$

17. $x + y = a, \quad x^3 + y^3 = b(x^2 + y^2).$

18**. $\dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{2a}{1+a^2}, \quad \dfrac{x-y}{1-xy} = \dfrac{2b}{1+b^2},$

где $1 + a^2 \neq 0, \ 1 + b^2 \neq 0.$

19. $\dfrac{y}{x}\dfrac{1+x^2}{1+y^2} = a, \quad \dfrac{y^3}{x^3}\dfrac{1+x^6}{1+y^6} = b^3.$

§ 7. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными

Решить следующие системы уравнений:

1. $x + y = 3z, \quad x^2 + y^2 = 5z, \quad x^3 + y^3 = 9z.$

2. $x + y + z = 13, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 91, \quad y^2 = xz.$

3. $x^2 + y^2 = z^2, \quad yz + zx + xy = 47, \quad (z - x)(z - y) = 2.$

4. $xy + yz = 229, \quad yz + zx = 255, \quad zx + xy = 196.$

5. $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1.$

6. $x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 20, \quad x^4 + y^4 - z^4 = 560.$

7. $(1+x)(1+y) = 2yz, \quad (1+y)(1+z) = 2zx, \quad (1+z)(x+y) = z^2 - 2xy.$

8*. $x(1+y) = z^2(1+x), \ y(1+z) = x^2(1+y), \ z(1+z) = y^2(1+z).$

9. $x+xy+y=1,\quad y+yz+z=2,\quad z+zx+x=3.$

10. $x^2+yz=y+z,\quad y^2+xz=x+z,\quad z^2+xy=x+y.$

11. $x-y^2-yz-z=0,\quad x-y-y^2-z^2=0,\quad x+y-y^3-z=0.$

12**. $(x+2y)(x+2z)=-16,\quad (y+2x)(y+2z)=8,\quad (z+2x)(z+2y)=-7.$

13**. $$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=4,$$
$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(x^2+z^2)=-2,$$
$$xy+yz+zx=-1.$$

14. $xy=2,\quad (3-y)z=3,\quad (2-x)(4-z)=1.$

15*. $x^2(x+1)+y^2(y+1)=\frac{23}{3},\quad x^2(x-1)+y^2(y-1)=-\frac{11}{3}.$

16*. $(x+y)(x+z)=x,\quad (y+z)(y+x)=2y,\quad (z+x)(z+y)=3z.$

17. $x+y+z=0,\quad 3x^2+3z^2-5xyz=0,\quad 2x^3+2y^3+3xyz=0.$

18*. $$x^2+y^2-z^2=(x+y-z)^2+2,$$
$$x^3+y^3-z^3=(x+y-z)^3+9,$$
$$x^4+y^4-z^4=(x+y-z)^4+29.$$

19. $x^2+4xy+6y^2=11,\quad x^2+4xz+12z^2=9,\quad y^2+3yz+2z^2=0.$

20*. $x^2+xy+y^2=37,\quad x^2+xz+z^2=28,\quad y^2+yz+z^2=19.$

21. $x+y+z=2,\quad x^2+y^2+z^2=6,\quad x^3+y^3+z^3=8.$

22. $(x+y)(1+z)=12,\quad (x^2+y^2)(1+z^2)=50,\quad (x^3+y^3)(1+z)^3=252.$

23. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z=\frac{7}{2},\quad xyz=1.$

24. $\frac{3xy}{x+y}=5,\quad \frac{2xz}{x+z}=3,\quad \frac{yz}{y+z}=4.$

25. $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+y+1}=\frac{z}{x+y-1}=x+y+z.$

26. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}.$

27*. $y+z=\frac{2}{xyz},\quad z+x=\frac{3}{xyz},\quad x+y=\frac{4}{xyz},$

28. $x+y=\frac{1}{z},\quad y+z=\frac{1}{x},\quad z+x=\frac{1}{y}.$

29. $\frac{1}{29}\left(x+\frac{y}{z}\right)=\frac{1}{34}\left(y+\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{6},\quad x+y+z=15.$

30. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z=\frac{13}{3},\quad xyz=1.$

31*. $\frac{1}{5}(x+y+z)=\frac{1}{7}(y+z-x)=\frac{1}{11}(z+x-y)=\frac{1}{3}xyz.$

32. $y^3+z^3=7x^3,\quad y+z-3x=0,\quad x+y-z=0.$

33. $6x(y^2+z^2)=13yz,\quad 3y(x^2+z^2)=5xz,\quad 6z(x^2+y^2)=5xy.$

34. $xy+xz=x^2+2,\quad xy+yz=y^2+3,\quad xz+yz=z^2+4.$

35. $xyz=2(yz+zx+yx),\quad 3xyz=2(yz-xy-xz),\quad 3xz=2(x+z).$

36**. $$6(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-49xyz=0,$$
$$6y(x^2-z^2)+5xz=0,$$
$$2z(x^2-y^2)-9xy=0.$$

37.** $$x^3+y^3-z^3-xyz=-4,$$
$$x^3-y^3+z^3-xyz=8,$$
$$-x^3+y^3+x^3-xyz=-2.$$

38. $$\frac{x}{2}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=\frac{2}{x}+\frac{y}{3}+\frac{4}{z}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{z}{4}=1.$$

39. $x-y=2$, $xz-y-u=7$, $xz^2-y-2u=22$, $xz^3-y-3u=57$.

40*. $x^2+y^2+z^2+u^2=5$, $xyzu=1$, $x^2(yz+zu+yu)=3x-1$,
$$x^3(y+z+u)=x(2x-3)+1.$$

41. $\frac{xyzv}{x+y+z}=1$, $\frac{xyzv}{x+y+v}=2$, $\frac{xyzv}{x+z+v}=3$, $\frac{xyzv}{z+v+y}=6$.

42. $1-x_1x_2=0$, $1-x_2x_3=0$, $1-x_3x_4=0$, ..., $1-x_{14}x_{15}=0$.

43.** $$y^n+z^n=\frac{b+c}{xyz},\quad z^n+x^n=\frac{c+a}{xyz},\quad x^n+y^n=\frac{a+b}{xyz},$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$, а n — целое положительное число, большее 1.

44.** $$x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n)+1\cdot 2(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=9a^2,$$
$$x_1(x_1+x_3+\ldots+x_n)+2\cdot 3(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=25a^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})+n(n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=(2n+1)^2a^2.$$

§ 8. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными, содержащие параметры

Решить следующие системы уравнений:

1. $$xy+xz=a^2,\quad yz+yx=b^2,\quad zx+zy=c^2.$$

2. $$x^2+(y-z)^2=a,\quad y^2+(z-x)^2=b,\quad z^2+(x-y)^2=c.$$

3. $$\frac{xyz}{y+z}=a,\quad \frac{xyz}{z+x}=b,\quad \frac{xyz}{x+y}=c.$$

4. $$yz+zx+xy=a^2-x^2=b^2-y^2=c^2-z^2.$$

5. $$x(x+y+z)=a,\quad y(x+y+z)=b,\quad z(x+y+z)=c.$$

6. $$xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=c(xy-yz-zx),$$
где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

7.
$$(y+z)(x+y+z)=a^2,\quad (z+x)(x+y+z)=b^2,\quad (x+y)(x+y+z)=c^2.$$

8. $$x+y+z=0,\quad x-y+z=a,\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=b.$$

9. $$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1,\quad \frac{x^n}{a^{n+k}}=\frac{y^n}{b^{n+k}}=\frac{z^n}{c^{n+k}},$$
где n и k — целые положительные числа, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

10. $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{d},\quad ax^3=by^3=cz^3,$$
$$a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad c\neq 0,\quad d\neq 0.$$

11. $$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=(1-a)^2,$$
$$yz+zx+xy=a,$$
$$x+y+z=bxyz.$$

12. $x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2=a^2+2b^2, \quad x^3+y^3+z^3=a^3.$

13.** $\dfrac{a^3x}{y^2z^2}=\dfrac{b^3y}{z^2x^2}=\dfrac{c^3z}{x^2y^2}=1, \quad a\neq 0,\ b\neq 0, \quad c\neq 0.$

14. $x+\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{bc}{b+c}, \quad y+\dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{ac}{a+c}, \quad z+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{ab}{a+b},$

где $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ a+b\neq 0,\ b+c\neq 0,\ c+a\neq 0.$

15.
$$x^3+y^3+3x(x+1)+3y(y+1)=c,$$
$$y^3+z^3+3y(y+1)+3z(z+1)=a,$$
$$z^3+x^3+3z(z+1)+3x(x+1)=b.$$

16. $\dfrac{x(y+z)}{a}=\dfrac{y(z+x)}{b}=\dfrac{z(x+y)}{c}, \quad yz+zx+xy=(a+b+c)xyz,$

где $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$

17.** $x^2+yz=a, \quad y^2+zx=b, \quad z^2+xy=c.$

18.**
$$(x-y+a^2-b^2)^2=4c^2z,$$
$$(y-z+b^2-c^2)^2=4a^2x,$$
$$(z-x+c^2-a^2)^2=4b^2y.$$

19.** $a(x+y-z)=x(y-z), \quad b(y+z-x)=y(z-x),$
$$(a+b)(z+x-y)=z(x-y).$$

20.** $a^2x^2(y+z)^2=(a^2+x^2)y^2z^2, \quad b^2y^2(z+x)^2=(b^2+y^2)z^2x^2,$
$$c^2z^2(x+y)^2=(c^2+z^2)x^2y^2.$$

21*. $3xyz-x^3-y^3-z^3=a^3, \quad x+y+z=2a, \quad x^2+y^2-z^2=a^2.$

22*. $x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=a, \quad y\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)=b, \quad z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=c.$

23.**
$$\frac{x(x+z)+y(x-z)}{(x+z)(x+y)}=\frac{a}{y+z},$$
$$\frac{y(y+x)+z(y-x)}{(y+x)(y+z)}=\frac{b}{z+x},$$
$$\frac{z(z+y)+x(z-y)}{(z+y)(z+x)}=\frac{c}{x+y}.$$

24.** $x^3-y^2z=a, \quad y^3-z^2x=b, \quad z^3-x^2y=c,$

где $a\neq 0, \quad b\neq 0, \quad c\neq 0.$

25.**
$$\frac{y^2}{y-x}+\frac{z^2}{z-x}=a^2,$$
$$\frac{z^2}{z-y}+\frac{x^2}{x-y}=(a+b)^2,$$
$$\frac{x^2}{x-z}+\frac{y^2}{y-z}=b^2.$$

26*. $(1+a)x+by+cz=\dfrac{1}{x}, \quad ax+(1+b)y+cz=\dfrac{1}{y},$
$$ax+by+(1+c)z=\frac{1}{z}.$$

§ 9. Решение рациональных неравенств

Решить следующие неравенства:

1. $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)>0.$
2. $\frac{1}{x}<1.$
3. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)>0.$
4. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)<0.$
5. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24>0.$
6. $32x^4-48x^3-10x^2+21x+5<0.$
7. $x^4+3x+1>3x^3+\frac{4}{9}x^2.$
8. $x^3-6x^2+5x<-12.$
9. $3x^3-14x^2+20x>8.$
10. $x^4-15x^2+10x>-24.$
11. $3x^2(x-4)^2<32-5(x-2)^2.$
12. $x^4-2x^3+x>132.$
13. $\frac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}>\frac{2}{9}.$
14. $31\left(\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right)+370>29.$
15. $\frac{x}{x^2+7x+3}-\frac{x}{x^2-7x+3}<\frac{50}{63}.$
16. $\frac{x^3-x+1}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-3}>2x-\frac{1}{4x-8}.$
17. $x^2-\frac{2}{3x}<\frac{13}{9}.$
18. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}<\frac{1}{30}.$
19. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2>2\frac{x^3+36}{x^3-36}.$
20. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}>0.$
21. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}>4+\frac{x-7}{x-1}.$
22. $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1}.$
23. $\frac{x}{x^2+7x+12}<\frac{x}{x^2+3x+2}.$
24. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}>\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$
25. $\frac{2x}{4x^2+3x+8}+\frac{3x}{4x^2-6x+8}>\frac{1}{6}.$
26. $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}>\frac{4}{3}.$
27*. $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}<5.$
28. $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)}<\frac{128}{15}.$

29. $\frac{1}{1+2x}-\frac{2}{2+3x}+\frac{3}{3+4x}<\frac{4}{4+5x}$.

30. $\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}>\frac{8x-30}{2x-7}+\frac{5x-4}{x-1}$.

31. $\frac{-5}{2x^2-11x+12}<\frac{-5}{2x^2-9x+7}$.

32*. $\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}+\frac{1}{5+x}-\frac{1}{6+x}+\frac{1}{7+x}>0$.

§ 10. Иррациональные уравнения с одним неизвестным и смешанные системы

Решить следующие уравнения *:

1. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$.

2. $\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}$.

3. $9-\sqrt{81-7x^3}=\frac{x^3}{2}$.

4. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4$.

5. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}$.

6. $x+\sqrt[8]{x^5}-12\sqrt[4]{x}=0$.

7. $\sqrt{2714-x}-\sqrt{x+2490}=2$.

8. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

9. $\sqrt{17+5x}-\sqrt{19-5x}=3$.

10. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$.

11. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$.

12. $\sqrt{2x^2+5x+2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

13. $\sqrt{2x^2+21x-11}-\sqrt{2x^2-9x+4}=\sqrt{18x-9}$.

14. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$.

15*. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$.

16*. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$.

17*. $(1-x)\sqrt{3\left(1+\frac{1}{x}\right)-2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}$.

18. $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$.

19. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

20. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

21. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

* Все уравнения этого параграфа следует решать над полем действительных чисел; для каждого радикала берется его арифметическое значение.

22.** $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$

23. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1.$

24*. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}.$

25. $\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\frac{5}{2}.$

26. $x^4+\frac{1}{4}=x\sqrt{2}\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}.$

27*. $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x).$

28.** $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x+1}.$

29. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

30. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}.$

31. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-10}.$

32. $x+\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}.$

33. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1.$

34. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}.$

35. $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}=\sqrt{2(x^3+1)}.$

36. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$

37. $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}=\sqrt{x}.$

38. $\frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}.$

39. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$

40*. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

41. $\frac{x}{2}-2=\frac{x^2}{2(1+\sqrt{1+x})^2}.$

42.** $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0.$

43.** $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{25}{9}=\frac{3x^2+\frac{4}{9}}{2\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{x\left(x-\frac{8}{3}\right)}}.$

44.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$

45.** $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$

46. $\frac{\left[\sqrt[3]{(14+x)^2}+\sqrt[3]{(14-x)^2}\right]^2}{\sqrt[3]{14+x}+\sqrt[3]{14-x}}=25.$

47. $$\frac{\left[\sqrt[3]{(12-x)^2}+\sqrt[3]{(12-x)(x-3)}+\sqrt[3]{(x-3)^2}\right]^2}{\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{x-3}}=\frac{49}{3}.$$

48. $$\frac{\sqrt[5]{2-x}}{x^2}-\frac{\sqrt[5]{2-x}}{4}=\sqrt[5]{\frac{x^2}{2+x}}.$$

49. $$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1.$$

50*. $$\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}.$$

51. $$\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\frac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x}.$$

52. $$\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}.$$

53. $$5x^2+35x-\sqrt{x^2+7x-1}=4.$$

54*. $$\frac{2}{19}\left(\sqrt{x^2+39x+374}-\sqrt{x^2+20x+51}\right)=\sqrt{\frac{x+22}{x+17}}.$$

55*. $$(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2.$$

56*. $$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{2x-3}}+\sqrt[3]{\frac{2x-3}{2x+3}}=\frac{8}{13}\cdot\frac{4x^2+9}{4x^2-9}.$$

57. $$\frac{(39-x)\sqrt[5]{x-6}-(x-6)\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{39-x}-\sqrt[5]{x-6}}=30.$$

58. $$\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0.$$

59. $$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}.$$

60*. $$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

61*. $$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

62**. $$\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}.$$

63. $$\sqrt[3]{4x^2+10x+4}+\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{2x+1}.$$

64. $$\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1.$$

65. $$\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2.$$

66. $$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1},$$

где n — целое положительное число.

67**. $$\sqrt{1-x^2}=\left(\frac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2.$$

§ 11. Иррациональные уравнения с одним неизвестным, содержащие параметры*

Решить следующие уравнения:

1. $$x=a+\sqrt{x^2+2(a+1)x+4a}.$$

2*. $$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=a.$$

* Параметры во всех примерах считаются действительными числами.

3. $\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$.

4. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=a$.

5. $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}=ax$.

6. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

7. $2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$.

8. $2x+ax+\sqrt{x}=0$.

9. $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{a^2-x^2}$.

10. $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$, где $a>1$.

11**. $\sqrt{1-x^2}=(a-\sqrt{x})^2$, где $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$.

12. $x+\sqrt{x^2-2ax}=b$.

13. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$.

14. $\sqrt{x+a}=\sqrt{x}+\sqrt{b}$.

15. $x\sqrt{a^2+ab+b^2}=a\sqrt{x^2-b^2}+b\sqrt{x^2-a^2}$.

16*. $\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-2b}=2$.

17. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{b}{a}$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$.

18*. $\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a$.

19*. $x=\sqrt{b-x}\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\sqrt{a-x}+\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}$,
где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

20. $\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a+b-x}=\frac{x}{\sqrt{a}}$, $a>0$, $b>0$.

21. $\sqrt[n]{a^kx^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}=2\sqrt{bx}$,
где $n\neq 2k>0$, $a>0$, $b>0$ (n и k — целые положительные числа).

22. $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^n}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^nx^n}}=b$,
где n — целое положительное число и $b>a>0$. Найти только положительный корень.

23. $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$,
где $a>b>0$.

24*. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

25. $\sqrt[4]{(x+a)^2}+\sqrt[4]{(x-a)^2}=\sqrt[4]{x^2-a^2}$.

26*. $\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}$.

27. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$.

28. $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}.$

29. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+2ax}{1-2ax}}=1,\ a\neq 0.$

30. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}},\quad a\neq 0.$

31*. $\left(\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}\right)^2\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)=2ax,\ a\neq 0.$

32. $\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-a^2},\quad |a|<1.$

33**. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=ax,\quad a\neq 0.$

34. $\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)^4\left(x-\sqrt{x^2-a}\right)=a,\ a\neq 0.$

35. $\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-a^2}}}=\sqrt[4]{x^2-a^2}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}\right),\ a>0.$

36**. $x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}.$

37. $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}.$

38. $\sqrt[5]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[5]{\frac{b+x}{a-x}}=c.$

39**. $a^2x^2-b^2-2x(a-cx)\sqrt{\frac{a^2-b^2}{1-x^2}+\left(\frac{a-cx}{1-x^2}\right)^2}+$
$+\frac{1+x^2}{1-x^2}(a-cx)^2=0\quad |a|\neq|b|.$

40*. $\left[\frac{ab}{2}(b+c)^2+(b^2+c^2)cx\right]\sqrt{\frac{a^2}{4}(b-c)^4+(b^2+c^2)^2x^2}=$
$=\left[\frac{ab}{2}(b-c)^2-(b^2+c^2)cx\right]\sqrt{\frac{a^2}{4}(b+c)^4+(b^2+c^2)^2x^2},$

где $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$

41*. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b},\ b>0.$

42. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}.$

43*. $a+(x+b)\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}}=b+(x+a)\sqrt{\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}},\ a\neq 0,\ b\neq 0.$

44. $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}=\frac{a-b}{2}.$

§ 12. Системы, содержащие иррациональные уравнения

Найти действительные решения следующих систем уравнений:

1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy},\ x+y=13.$

2. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\quad xy=8.$

3. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2,\ 5\sqrt[6]{xy},\ x+y=10.$

4. $\sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{5}{2},\quad xy-x-y=0.$

5. $x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{12}{x-y},\quad xy=15.$

6. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2},\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.$

7. $7\sqrt[3]{xy}-3\sqrt{xy}=4,\quad x+y=20.$

8. $\sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3,\ 5x-y=11.$

9. $x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80,\ y^2+y\sqrt[3]{yx^2}=5.$

10. $7x-11y=\sqrt[3]{x+y}=\sqrt[5]{x+9y}.$

11. $x^2+y\sqrt{xy}=420,\quad y^2+x\sqrt{xy}=280.$

12. $\frac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{2}},$

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3}=9.$$

13. $3x^2+4y^2=7xy,\ x^{\frac{3}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}y^2.$

14. $x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=208,\quad y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=1053.$

15. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}-1=\frac{61}{\sqrt{xy}},\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78.$

16. $x-8y\sqrt{x^2-9xy^2}=(9-16x)\,y^2,\ 5x-4=25y^2.$

17. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x+y}{\sqrt{y}}=20-\frac{y^2+x}{y},\quad 4y-x=8.$

18. $8\sqrt{x^2-y^2}=x+9y,$

$$x^4+2x^2y+y^2+x=2x^3+2xy+y+506.$$

19. $y+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1}=\frac{1}{12}(x^2+17),$

$$\frac{x^2}{8y}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}-\frac{y}{2}.$$

20. $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4},$

$$x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.$$

21*. $\sqrt{1-16y^2}-\sqrt{1-16x^2}=2(x+y),$

$$x^2+y^2+4xy=\frac{1}{5}.$$

22**. $(1-x^2)^2(1+y^2)-(1+x^2)^2(1-y^2)=4x^2\sqrt{1+y^4},$

$$\sqrt{2}(1-x^2)(1-y^2)=4xy.$$

23*. $(2y-1)\sqrt{x^4+4x+3}-(2x-1)\sqrt{y^4+4y+3}=$

$$=(x-y)(x+y-2xy+4),$$

$$\sqrt{\frac{y+1}{xy-1}}-\sqrt{\frac{2y-1}{2x-1}}=\frac{y+1}{x+1}.$$

24. $$\frac{\sqrt{x^3+y^3}+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^3+y^3}-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}, \quad x^3+2y^3=118.$$

25. $$xy+\sqrt{x^2y^2-y^4}=8\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right),$$
$$(x+y)^{\frac{3}{2}}-(x-y)^{\frac{3}{2}}=26.$$

26. $$x^3+y^3+xy\sqrt{xy}=73,$$
$$x^3+z^3+xz\sqrt{xz}=757,$$
$$y^3+z^3+yz\sqrt{yz}=1009.$$

27. $$\sqrt{\frac{y^2+x}{4x}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+x}}=\frac{y^2}{4}\sqrt{\frac{4x}{y^2+x}},$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}=(y+1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}\right).$$

28. $$\sqrt{\frac{x-y}{x^4}}+\frac{1}{x}=\frac{4}{9\sqrt{x-y}}, \quad \frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{24}{5}.$$

29. $$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}+1.$$

§ 13. Системы, содержащие иррациональные уравнения с параметрами*

Решить следующие системы уравнений:

1. $$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=a, \quad x+y=b.$$

2. $$x^2+y^2+xy=a^2, \quad x+y+\sqrt{xy}=b.$$

3*. $$\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=\sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[3]{x^2+y^2}+\sqrt[3]{x^2-y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

4*. $$\sqrt[3]{x^2+y^2+a^2}+\sqrt[3]{(x-y+a)^2}=2\sqrt[3]{4xy},$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}, \quad a\neq 0.$$

5. $$\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+b^2)}+\sqrt{(x^2+b^2)(y^2+a^2)}=(a+b)^2,$$
$$x+y=a+b, \quad a+b\neq 0.$$

6**. $$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a, \quad x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b.$$

7**. $$\frac{(x+y)^m}{\sqrt[n]{x+y+z}}=c, \quad \frac{(y+z)^m}{\sqrt[n]{x+y+z}}=a, \quad \frac{(z+x)^m}{\sqrt[n]{x+y+z}}=b,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$, а m и n — целые положительные числа, причем $n>1$. Рассмотреть случаи четных и нечетных m и n.

8*. $$x^3-xyz=a\sqrt{xyz}, \quad y^3-xyz=b\sqrt{xyz}, \quad z^3-xyz=c\sqrt{xyz},$$

где a, b, c — действительные не равные нулю числа.

9**. $$x=\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2},$$
$$y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2},$$
$$z=\sqrt{x^2-c^2}-\sqrt{y^2-c^2},$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$ и среди чисел a, b, c есть, по крайней мере, два различных.

* Параметры — действительные числа.

10**. $$a\sqrt{x-y+z}\sqrt{x+y-z}=x\sqrt{yz},$$
$$b\sqrt{x+y-z}\sqrt{-x+y+z}=y\sqrt{zx},$$
$$c\sqrt{-x+y+z}\sqrt{x-y+z}=z\sqrt{xy},$$
где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

11. $(\sqrt{y}-\sqrt{x})(a-x)=3\sqrt{x}(x+y)$, $a^2-x^2=3xy$.

12*. $\dfrac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x}{a}$, $x\sqrt{a-y}=y\sqrt{a+x}$, $a\neq 0$.

13*. $$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\frac{1}{a}(xy-y\sqrt{x^2-y^2}),$$
$$\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=b,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0.$$

14. $$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{y^2-b^2}+\frac{y^2-b^2}{a^2-x^2}}+\sqrt{\frac{a^2+x^2}{y^2+b^2}+\frac{y^2+b^2}{a^2+x^2}}=4,$$
$$xy=ab,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0.$$

15. $x+y+\sqrt{x^2-y^2}=2a$, $y\sqrt{x^2-y^2}=2b^2$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

§ 14. Иррациональные неравенства

Решить следующие неравенства:

1. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$.

2. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

3. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4. $x-4<\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}$.

5. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

6. $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

7. $x+\dfrac{x-1}{4}\sqrt{x^2-2x+9}<-\dfrac{x+1}{4}\sqrt{x^2+2x+9}$.

8*. $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}>\dfrac{3x^2+\dfrac{4}{9}}{2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\sqrt{x\left(x-\dfrac{8}{3}\right)}}$.

9. $(12-x)\sqrt{\dfrac{12-x}{x-2}}+(x-2)\sqrt{\dfrac{x-2}{12-x}}<\dfrac{82}{3}$.

10. $\dfrac{(9-x)\sqrt{9-x}+(4+x)\sqrt{4+x}}{(9-x)\sqrt{4+x}+(4+x)\sqrt{9-x}}<\dfrac{7}{6}$.

11. $(35-x)\sqrt{35-x}+(x-9)\sqrt{x-9}>\dfrac{7}{12}(\sqrt{35-x}+\sqrt{x-9})^3$.

12*. $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}<x^2$.

13*. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$.

14**. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$.

15**. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}$.

16. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$.

17. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x$.

18. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

19. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}<-(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$.

20. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}>1$.

21. $\sqrt{2x+1}<\frac{2(x+1)}{2-x}$.

§ 15. Составление нелинейных уравнений

П. 1. Составление квадратных уравнений с одним неизвестным

1. При перемножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков в произведении на 4. При делении, для проверки ответа, полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.
2. Из сосуда, наполненного 96-процентным раствором кислоты (по объему), отлили 2,5 *л*. и долили сосуд 80-процентным раствором кислоты. После этого в сосуде получился 89-процентный раствор кислоты. Определить вместимость сосуда.
3. Имеется некоторое количество равных шаров. Их можно уложить в виде квадрата или же в виде правильного треугольника. Найти число этих шаров, если известно, что при треугольном их расположении в стороне треугольника будет на два шара больше, чем в стороне квадрата при квадратном их расположении.
4. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 *л* чистого спирта. Вместимость бака 64 *л*. Сколько спирта вылили в первый и во второй раз?
5. В некоторой дроби знаменатель на единицу больше удвоенного числителя; если к членам этой дроби прибавить по 5 и умножить полученную дробь на первоначальную, то получится $\frac{7}{25}$. Какова данная дробь?
6. Несколько рабочих получили 1000 руб. Один из них заработал 100 руб., другой на 50 руб. больше первого, а третий на 50 руб. больше второго и т. д. Сколько было рабочих?
7. В гору едет автомобиль, который проезжает в первую секунду 15 *м*, а в каждую следующую — на 1 *м* меньше, чем в предыдущую. Навстречу ему через 3 сек. выехал другой автомобиль, находящийся от места выезда первого автомобиля на расстоянии 308 *м*, причем второй автомобиль в первую секунду проехал 20 *м*, а в каждую следующую секунду проезжает на 3 *м* больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал первый автомобиль до встречи со вторым?
8. Несколько человек должны были заплатить поровну всего 72 руб. Если бы их было тремя менее, то каждому пришлось бы выплатить на 4 руб. больше. Сколько их было?
9. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 час. Одна первая труба заполняет его на 5 час. быстрее, чем одна вторая. Во сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?
10. Куплен товар двух сортов: первого на 150 руб., второго на 120 руб. Второго сорта на 3 *кг* больше, чем первого, и стоимость его за килограмм на 4 руб. 50 коп. дешевле. Сколько куплено товара каждого сорта?

11. Два лица выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Первый проезжает в час двумя километрами больше второго и приезжает в город B часом раньше, чем второй в A. Расстояние AB равно 40 *км*. Сколько километров в час проезжает каждый из них?
12. Ученик при перемножении двух чисел, из которых одно на 94 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру десятков на 4. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке 107. Какие числа он перемножал?
13. Числитель некоторой дроби на 3 меньше знаменателя. Если эту дробь сложить с дробью, полученной перестановкой числителя и знаменателя данной, то получится $\frac{149}{70}$. Найти исходную дробь.
14. Расстояние между конечными пунктами A и L по железной дороге равно 200 *км*. Поезд идет от A первые 60 *км* в гору, следующие 100 *км* по ровному месту и остальные 40 *км* опять в гору. При этом поезд в гору идет на 10 *км/час* медленнее, чем по ровному месту. На этом пути есть станции B, C, D, E на расстоянии 40, 85, 135, 180 *км* от A, и на каждой из них поезд стоит 3 мин. Найти время прихода поезда в B, C, D, E, если известно, что он вышел из A в 8 час. утра и пришел в L в 12 час. 42 мин. того же дня.
15. 50 000 руб. принесли в течение одного года некоторый доход. Какой процент составил доход, если известно, что эти 50 000 руб. вместе с доходом за первый год в течение следующего года дали 2612 руб. 50 коп. дохода, причем за второй год доход был на 0,5% больше, чем за первый.
16. Два поезда отправляются навстречу друг другу: один из Москвы, другой из Ленинграда. Они могут встретиться на половине пути, если поезд из Москвы отправится на полтора часа раньше. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через 6 час. расстояние между ними составляло бы десятую долю первоначального. Сколько часов затрачивает каждый поезд на прохождение пути между Москвой и Ленинградом?
17. При рытье колодца глубиной свыше 10 *м* за первый метр платили 10 руб., а за каждый следующий — на 5 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 100 руб. Средняя стоимость 1 *м* оказалась равной 62 руб. 50 коп. Определить глубину колодца, зная, что она выражается целым числом метров.
18. В магазин доставлено несколько оконных стекол одного и того же сорта общей стоимостью 90 руб. При перевозке два стекла оказались разбитыми; остальные стекла были проданы с прибылью по 2 руб. за стекло, причем всего получено 14 руб. прибыли. Сколько стекол было доставлено в магазин?
19. Из города A в город B, отстоящий от A на расстоянии 350 *км*, вышел поезд. Если бы он шел со скоростью, меньшей действительной на 5 *км/час*, то пробыл бы в пути на 1 час 40 мин. больше. Сколько времени идет поезд от A до B?
20. Из двух мест, расстояние между которыми 28 *км*, выходят одновременно навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задерживался на 1 час на расстоянии 9 *км* от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил свою скорость на 1 *км/час*, и они встретились на расстоянии 4 *км* от остановки первого. Найти скорости пешеходов.
21. Кусок материи стоит a руб. Если бы в куске было на b *м* больше, а весь кусок стоил бы также a руб., то каждый метр стоил бы на c руб. меньше. Сколько метров было в куске?
22. Двое рабочих, работая вместе, могут окончить некоторую работу в m час. Во сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту же работу, если известно, что для выполнения всей работы одному вто-

рому понадобится на n час. больше, чем для выполнения всей работы одному первому?

23. На складе было некоторое количество угля. Один завод начал вывозить со склада уголь с 1 сентября по a тонн в день, второй завод — с 10 сентября и вывозил по b тонн в день. К концу дня 25 сентября на складе осталась половина первоначального количества угля. Когда весь уголь был вывезен, если оба завода получили угля поровну?

24. Из двух городов, расстояние между которыми равно a *км*, двигаются равномерно навстречу друг другу два поезда. Первый поезд начал двигаться на c час. позже, чем второй, и они встретились на середине пути; кроме того, известно, что первый поезд проходит каждый час на b *км* больше, чем второй. Сколько километров проходит каждый поезд в час?

25. Два грузовика одновременно выезжают с одного и того же склада в пункт, отстоящий от него на a *км*. Один идет со скоростью, большей на m *км/час*, чем другой, и приходит к месту назначения на n час. раньше. С какой скоростью идет каждый грузовик?

26. Моторная лодка, обладающая скоростью a *км/час*, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за m час. Расстояние между пунктами равно s *км*. Найти скорость течения реки.

27. Из сосуда, вмещающего a *л* и наполненного спиртом, отлили некоторую часть и вместо спирта сосуд долили водой; затем опять отлили такую же часть смеси и снова сосуд долили водой, после чего в сосуде осталось спирта b *л*. По скольку литров жидкости отливали каждый раз?

28. Бассейн, содержащий a *л* воды, имеет два крана: через первый он наполняется, а через второй он опорожняется на m мин. скорее, чем первый кран наполняет бассейн. Однажды, когда бассейн до половины был наполнен водой, открыли оба крана одновременно. Через n мин. после этого бассейн опорожнился. Через сколько минут первый кран наполнит бассейн, а второй опорожнит наполненный бассейн, действуя отдельно?

29. Из двух пунктов A и B выехали одновременно два связиста к месту C. Первый приехал в C через a мин., а второй, чтобы попасть в C одновременно с первым, должен проезжать каждый километр на c мин. быстрее первого, так как расстояние от B до C на b *км* больше расстояния от A до C. Определить расстояние от A до C.

30. Из двух станций, расстояние между которыми s *км*, были отправлены навстречу друг другу два поезда с расчетом, что они встретятся на половине пути. Определить скорость в час каждого поезда, если первый из них вышел на один час раньше второго со скоростью, на a *км/час* меньшей, чем скорость второго поезда.

31. A выполняет некоторую работу в срок на a дней больше, чем B, и на b дней больше, чем C; A и B, работая вместе, выполняют эту работу в срок, равный сроку C. Определить время, в которое каждый выполняет эту работу отдельно.

32*. Из пункта A, расположенного на берегу озера, в пункт B, расположенный на берегу реки, впадающей в это озеро, вышел катер. Катер прибыл к месту назначения через m час., пройдя по озеру a *км*, а по реке — половину этого расстояния. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна c *км/час*.

33. Перевозка одной тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b коп. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти из M в N по железной дороге на сумму s руб., если водным путем на ту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге.

34. Определить глубину колодца, зная, что звук от удара камня о дно колодца, брошенного в колодец с начальной скоростью, равной нулю, слышен через

t сек. от начала падения камня; ускорение силы тяжести равно g. Скорость звука v. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

35. Цилиндрическая трубка с поршнем погружена в резервуар с водой; между поршнем и водой находится столб воздуха в h *м* при атмосферном давлении. Затем поршень поднимают на b *м* над уровнем воды в резервуаре. Вычислить высоту воды в трубке, зная, что высота столба жидкости в водяном барометре при атмосферном давлении равна c *м*.

36. Найти формулу для n-го члена ряда чисел x_1, x_2, ..., x_n, ..., если $x_1 = a$, $x_2 = b$ и каждое x_n, начиная с x_3, есть среднее арифметическое двух предшествующих, т. е.

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}.$$

37*. В шахматном турнире участвовали ученики девятых и десятых классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники, если каждый с каждым играл один раз.

П. 2. Составление нелинейных уравнений с одним неизвестным

1. Города A и B расположены на берегу реки, в которой скорость течения равна 4 *км/час*. Лодочник плывет на лодке от A к B и обратно и находит, что он в пути на 39 мин. дольше, чем если бы течения не было совсем. На следующий день он повторяет свою поездку с товарищем и находит, что если бы не было течения, то вместе с товарищем они проплыли бы за час наполовину более того расстояния, которое он прошел бы сам. На этот раз они были в пути на 8 мин. больше, чем если бы не было течения. Найти скорость лодки, если бы не было течения.
2. A и B работали одинаковое число дней. Если бы A работал на один день меньше, а B — на семь дней меньше, то A заработал бы 360 руб., а B — 324 руб. Если бы, наоборот, A работал на семь дней меньше, а B — на один день меньше, то B заработал бы на 162 руб. больше A. Сколько заработал каждый в действительности?
3. Производительность завода A составляет 40,96% производительности завода B. Число процентов годового прироста продукции на заводе A на 30 больше числа процентов годового прироста продукции на заводе B. Каков годовой прирост продукции (в процентах) на заводе A, если на четвертый год работы он дает то же количество продукции, что и завод B?
4. Из сосуда с вином отлит 1 *л* вина и добавлен 1 *л* воды. Затем отлит 1 *л* смеси и добавлен 1 *л* воды и т. д. После того как эта операция была повторена 35 раз, оказалось, что смесь в сосуде состоит наполовину из воды и наполовину из вина. Сколько вина было первоначально в сосуде?
5. Средний годовой процент прироста народонаселения из года в год остается постоянным. Если бы годовой процент прироста увеличился на k, то через n лет численность населения была бы в два раза больше, чем при нормальных условиях. Определить годовой прирост населения (в процентах).
6. Численность населения города увеличивается ежегодно на $p\%$ (каждый раз по отношению к началу года). Через сколько лет численность населения удвоится?
7. Сферический баллон с толщиной стенки ε, изготовленный из материала плотности d, заполнен жидкостью плотности δ. Каков должен быть внутренний радиус R баллона, чтобы при погружении его в жидкость плотности Δ имело место равновесие. Какому условию должны удовлетворять плотности d, δ и Δ, чтобы задача была возможна?
8. Двое рабочих наняты на работу на один и тот же срок, но зарплата у них неодинакова. Первый работал на a дней меньше срока и получил b руб., а второй проработал на a дней больше срока и получил c руб. Если бы

первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они получили бы поровну. Определить срок работы.

9*. Построены четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и т. д. Число диагоналей во всех многоугольниках равно 800. Сколько построено многоугольников?

10.** Для нумерации некоторого числа страниц потребовалось в n раз больше цифр, чем было страниц. Сколько было страниц? (n — целое положительное число).

П. 3. Составление систем нелинейных уравнений

1. Два туриста вышли одновременно из A в B и из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 *км* от B, второй раз — в 6 *км* от A через 6 час. после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих туристов.

2. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 *км*, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 *км*. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

3. Два вкладчика вложили одинаковые суммы в сберкассу (по простым процентам). Первый по истечении 8 месяцев получил вместе с процентной суммой 616 руб. Второй по истечении 15 месяцев получил 630 руб. 24 коп. Какая сумма была вложена каждым вкладчиком и по каким процентам?

4. Найти два числа, зная, что их сумма, разность и произведение относятся как $a : b : c$.

5. Два самолета одновременно вылетают навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми s *км*. Через час полета они встретились и, не останавливаясь, продолжали путь. Первый прибыл в город B на m мин. раньше, чем второй прибыл в A. Найти скорости самолетов.

6. Через два крана неодинакового сечения ванна при совместном действии кранов наполняется за m час. Если бы половину ванны наполнить через один кран, а другую половину — через другой, то для наполнения ванны потребовалось бы t час. Во сколько часов наполняется ванна через каждый кран отдельно?

7. Два трактора разной мощности начали пахать поле в 14 *га* в 7 час. и кончили вспашку одновременно. Если бы первый трактор вспахивал в час на 0,1 *га* больше, а второй начал бы работу на час раньше, то работа была бы окончена на 1 час 12 мин. раньше. Если бы второй трактор вспахивал в час на 0,1 *га* больше, а первый начал бы работу на час раньше, то работа была бы окончена на 1 час 4 мин. раньше. В котором часу тракторы закончили работу?

8. 1-я и 2-я трубы наполняют бассейн в 260 *л*, 3-я и 4-я — бассейн в 370 *л*. 3-я труба подает на 45 *л* в минуту больше, чем 1-я, а 4-я — вдвое больше, чем 2-я. Все 4 трубы открываются одновременно; 1-я, 2-я и 4-я закрываются одновременно, но позже третьей, которая действует 2 мин. При этом оба бассейна оказываются наполненными. Все 4 трубы вместе подают 200 *л* в минуту. Сколько времени действовала 1-я труба?

9. От пристани в пункте A отошел пароход в направлении пункта B, расположенного вниз по течению на расстоянии 24 *км*. Одновременно в том же направлении отправился пешеход. Дойдя до B, пароход повернул обратно и через некоторое время оказался в одном пункте с пешеходом, а именно на расстоянии 8 *км* от A. Продолжая рейс, пароход прибыл в A через 30 мин. после встречи с пешеходом. Найти скорости движения парохода и пешехода.

10. Резервуар, вместимость которого равна 5280 *л*, был наполнен двумя трубами, из которых вода текла неодинаковое время. Первая труба давала каждую секунду на 2 *л* воды больше второй. Если бы вторая труба давала в секунду столько, сколько первая, то из нее натекло бы 3400 *л*, а если бы первая труба давала в секунду столько, сколько вторая, то из нее натекло бы 2048 *л*. Сколько литров воды в секунду давала каждая труба?

11. Со станции A в направлении к станции B в 8 час. утра вышел скорый поезд, а через один час — товарный. Со станции B в 9 час. утра того же дня вышел в направлении к A третий поезд, который в 10 час. утра того же дня встретился со скорым, а в 11 час. утра того же дня — с товарным. Товарный поезд прибыл в B на 4 час. позже скорого. Когда третий поезд прибыл в A?

12. Сосуд имеет два крана: A и B. Сосуд был полон, когда открыли кран A, а затем, когда из наполненного сосуда вытекло четверть всей воды, открыли кран B; тогда остальная часть воды вытекла из сосуда через такое число часов, которое на один час больше времени работы одного крана A. Если же сосуд полон и оба крана открыть сразу, то он опорожнится на полчаса раньше, чем в первом случае. Вычислить время, необходимое каждому крану в отдельности для опорожнения наполненного сосуда.

13. Пешеход отправляется из пункта A в пункт B; расстояние между этими пунктами равно 13 *км* 200 *м*. В то же время из пункта B в пункт A выезжает велосипедист. Встреча происходит через 44 мин., после чего велосипедист прибывает в пункт A на 1 час 45 мин. раньше, чем пешеход приходит в B. Каковы скорости пешехода и велосипедиста в метрах в минуту?

14. Два обыкновенных плуга и один тракторный обрабатывают вместе некоторый участок в 6 дней. Восемь обыкновенных плугов выполнили бы ту же работу на 2 дня скорее, чем один тракторный. Во сколько раз производительность тракторного плуга больше производительности обыкновенного?

15. Сумма некоторого двузначного и обращенного чисел (т. е. написанного теми же цифрами, но в обратном порядке) равна 55, а произведение тех же чисел равно 736. Найти эти числа.

16. Березовые и осиновые дрова были куплены за 164 руб.; затем березовые были проданы за 125 руб., а осиновые — за 48 руб., причем на первых было получено столько процентов прибыли, сколько на вторых убытку. За сколько рублей были куплены те и другие дрова в отдельности?

17. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Произведение этого числа и обращенного (т. е. написанного теми же цифрами, но в обратном порядке) равно 1008. Найти это число.

18. Расстояние между двумя городами, равное 600 *км*, почтовый поезд проходит на 8 час. быстрее товарного. Если скорость каждого увеличить на 10 *км/час*, то почтовый поезд будет проходить тот же путь лишь на 5 час. скорее товарного. Определить скорость каждого поезда.

19. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 90. Если обращенное число (т. е. написанное теми же цифрами, но в обратном порядке) умножить на сумму его цифр, то получится 306. Найти это число.

20. Для перенесения товара с одного места на другое нанято некоторое число рабочих, которые перенесут весь товар за 10 час. Если бы рабочих было на 10 больше и каждый переносил бы в час на 5 ящиков больше, то работа была бы закончена за 6 час., а если бы рабочих было на 20 меньше и каждый переносил бы в 1 час на 5 ящиков больше, то на работу ушло бы 15 час. Сколько нанято рабочих и сколько ящиков в час переносит один рабочий?

21. Число десятков двузначного числа на 5 больше числа его единиц; произведение же этого числа на сумму его цифр равно 648. Какое это число?

22. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз за 6 час., но второй автомобиль задержался в гараже. Когда он прибыл на место погрузки, первый уже перевез $\frac{3}{5}$ всего груза. После этого первый автомобиль уехал, а второй перевез оставшуюся часть груза. Перевозка всего груза таким способом заняла 12 час. Сколько времени понадобилось бы каждому автомобилю в отдельности для перевозки всего груза?

23. Произведение цифр двузначного числа в два раза больше суммы его цифр. Если от искомого числа отнять 27, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

24. Из городов A и B одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Когда они встретились, то рассчитали, что первому пешеходу потребуется еще 4 час. 30 мин., чтобы дойти до города B, а второму, чтобы дойти до города A, потребуется еще 2 часа. Определить скорости пешеходов, если расстояние между A и B равно 30 *км*.

25. Число десятков некоторого двузначного числа на единицу больше числа единиц; произведение же этого числа на число обращенное равно 2430. Каково данное число?

26. Двое рабочих выполняют работу за 20 дней. Один из них, работая отдельно, затрачивает на эту работу на 30 дней меньше другого. Во сколько дней может сделать работу каждый рабочий в отдельности?

27. Турист прошел 105 *км*. Если бы на это путешествие он затратил еще два дня, то мог бы в день проходить на 6 *км* меньше. Сколько километров проходил турист в день?

28. Отец хочет разделить 180 яблок между 11 детьми; для этого половину всех яблок он отдает сыновьям, которые делят их поровну, а другую половину — дочерям, которые тоже их делят поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 3 яблока больше, чем каждый сын. Сколько было сыновей и дочерей?

29. Ученики одного класса сложились поровну и купили географическую карту за 4 руб. 20 коп. Если бы учеников в классе было на семь меньше, то каждому пришлось бы заплатить на 5 копеек больше. Сколько учеников в классе?

30. Ценности двух сплавов металлов A и B относятся при равных весах сплавов, как 11 : 17. Если, не изменяя в сплавах количества металла A, удвоить количество металла B в каждом сплаве, то ценности их при равных весах сплавов будут относиться, как 7 : 11. Предполагая, что цена металла A в 13 раз менее цены металла B (при одинаковом их весе), определить отношение веса A к весу B в каждом сплаве.

31. Сосуд, наполненный жидкостью, может быть опорожнен двумя кранами. Первый кран был открыт $\frac{2}{3}$ того времени, которое второй употребил бы, чтобы он один опорожнил сосуд, а затем его закрыли, и сосуд был опорожнен вторым краном. Если бы с самого начала открыть оба крана, то сосуд опорожнился бы двумя часами раньше и из первого крана тогда вытекла бы только половина того количества воды, которое прежде вытекло через второй кран. Во сколько часов каждый кран отдельно может опорожнить сосуд?

32. Бочка вместимостью 40 ведер снабжена двумя кранами. Через первый кран вода вливается, через второй выливается. Если бочку наполнить водой и затем открыть оба крана, то через 10 мин. в бочке останется 20 ведер воды. Сколько воды осталось бы в бочке (предварительно наполненной водой) по прошествии 3 мин., если бы первый кран наполнял бочку на одну минуту раньше, а второй опорожнял ее на одну минуту позднее, чем им в действительности для этого требуется. Во сколько минут один первый кран может наполнить бочку, если она предварительно не содержит воды?

Во сколько времени один второй кран может опорожнить бочку, если бочка предварительно налита полностью?

33. Расстояние по железной дороге от A до B 150 *км* и от B до C 60 *км*. Пассажирский поезд выходит из C в то самое время, когда скорый выходит ему навстречу из A. Пассажирский поезд останавливается в B на 30 мин. и, выйдя из B, через 10 мин. встречает скорый. По прибытии пассажирского поезда в A и скорого в C, они идут обратно, выйдя опять из этих мест одновременно и идя с теми же скоростями, как и прежде. Но скорый поезд был задержан на 6 мин. в B и пришел к месту, где поезда встретились в первый раз, в то время, когда пассажирский поезд прошел только $\frac{2}{5}$ расстояния от A до этого места. Найти скорости поездов.

34. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, какое нужно было бы, чтобы наполнить бассейн, открыв только второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна одним первым краном. После этого оказались наполненными $\frac{13}{18}$ бассейна. Вычислить, сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 3 час. 36 мин.

35. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13, сумма квадратов средних цифр равна 85, цифра тысяч на столько же больше цифры единиц, на сколько цифра сотен больше цифры десятков; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке.

36. На участке реки от A до $Б$ течение так слабо, что его можно принять равным нулю; на участке же от $Б$ до B оно достаточно быстро. Лодочник проплывает расстояние от A до B за 3 час., а вверх — от B до A за 3 час. 30 мин. Если бы на всем протяжении от A до B было такое же течение, как от $Б$ до B, то весь путь от A до B вниз занял бы 2 час. 45 мин. Сколько времени потребовалось бы в этих условиях для того, чтобы подняться вверх от B до A?

37. Найти трехзначное число по следующим условиям: а) его цифры составляют геометрическую прогрессию; б) если из него вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке; в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно 8, 5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию.

38. Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, если известно, что после того, как к ним прибавить соответственно 1, 1, 4 и 13, они будут составлять арифметическую прогрессию.

39. Два поезда отправляются одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 *км/час* больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 *км* от середины AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 мин. позже второго, то оба поезда встретились бы на середине AB. Найти расстояние AB и скорости обоих поездов.

40. Учитель предложил трем ученикам перемножить два числа. После умножения множимого на отдельные цифры множителя один из учеников при сложении частных произведений забыл удержать в уме одну единицу некоторого разряда. Разделив при проверке результат на множитель, он получил в частном 971, а в остатке 214. Второй ученик в указанном разряде не сделал ошибки, но при сложении цифр следующего разряда забыл прибавить двойку. Делая проверку таким же образом, как первый, он получил в частном 365, а в остатке 198. Третий сделал подобную же ошибку на единицу в следующем высшем разряде и получил при проверке в част-

ном 940, а в остатке 48. Определить данные для умножения числа и указать, в каких местах были сделаны ошибки.

41. Вода втекает равномерно в баржу через образовавшееся в ней отверстие. Насосы A и B, которыми снабжена баржа, таковы, что поршень насоса A делает три хода, в то время как поршень насоса B делает два хода; четыре хода поршня насоса B производят то же действие, что и пять ходов поршня насоса A. Насос B, качавший воду в продолжение такого времени, в которое насос A, действуя один, выкачал бы всю воду, перестает действовать, а затем насос A выкачивает всю воду в 3 час. 20 мин. Если бы оба насоса действовали вместе с самого начала, то всю воду они выкачали бы в 3 час. 45 мин., причем насос выкачал бы ста ведрами больше, чем прежде. Сколько ведер воды было в барже, когда насосы начали действовать? Сколько воды в час втекает в баржу? Сколько воды в час выкачивает каждый насос?

42. Сумма цифр трехзначного числа равна 11, сумма квадратов тех же цифр 45. Если от искомого числа отнять 198, то получится обращенное число. Найти это число.

43. Города A, B и C расположены так, что прямые дороги, соединяющие их, составляют прямоугольный треугольник, в котором пути между A и B, B и C составляют прямой угол. Пешеход, идя от A к B, затем от B к C и от C к A с одинаковой скоростью, находит, что время, потребное для прохождения от A до B, вместе с временем, потребным для прохождения от B до C, больше времени, потребного для прохождения от C до A, на 2 час. 40 мин. Велосипедист, который оставляет A на 4 час. позднее пешехода, проезжая тот же путь по тому же маршруту, что и пешеход, догоняет его в конце восьмого километра от B на пути BC, причем скорость велосипедиста втрое больше скорости пешехода. Прибыв в A, велосипедист останавливается там на 6 час. 40 мин., а затем снова отправляется по тому же маршруту и прибывает в A одновременно с пешеходом, который в C отдыхал 4 час. Найти расстояния между городами и скорости пешехода и велосипедиста.

44. Две суммы денег, всего 50 000 руб., положены в сберкассу по 3% годовых. Каждая из них дала 600 руб. дохода, причем первая сумма находилась в сберкассе на 4 месяца дольше, чем вторая. Как велика каждая сумма и на какой срок она была помещена, если известно, что ни одна из сумм не находилась в сберкассе более одного года?

45*. Из городов C и D едут навстречу друг другу A и B, причем A выезжает тремя часами раньше B. Они встречаются на расстоянии 20 *км* от D. A приезжает в D часом раньше, чем B приезжает в C. На другой день B, выехав обратно, встречает A, проехавшего одну седьмую часть своего обратного пути, и, несмотря на бывшую затем трехчасовую остановку, все-таки прибывает в D настолько рано, что мог бы проехать еще 28 *км*, пока A приедет в C. Найти расстояние между городами C и D и скорости, с которыми едут A и B.

46. Две трубы, действуя одна после другой, наполнили бассейн вместимостью 3100 ведер. Через первую трубу вливалось воды на 5 ведер в мин. больше, чем через вторую. Если бы первая труба действовала столько времени, сколько вторая, то через нее влилось бы в бассейн 600 ведер воды, а если бы вторая труба действовала столько времени, сколько первая, то через нее влилось бы в бассейн 1800 ведер. Сколько ведер воды в минуту вливалось в бассейн через каждую трубу?

47. Велосипедист, выезжающий из A в B, должен приехать в B через 3 час. Одновременно с ним из пункта C выезжает другой велосипедист и, чтобы успеть приехать в B вместе с первым велосипедистом, он должен каждый километр проезжать на 1 мин. скорее, чем первый. Расстояние от C до B на 6 *км* больше расстояния от A до B. Определить эти расстояния.

48. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном и том же направлении. Одна машина идет со скоростью 50 *км/час*, другая — 40 *км/час*. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1 час. 30 мин. позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

49. Общее увеличение веса двух кристаллов — одного весом 1,2 *г*, другого 1,5 *г* — в течение двух дней равно 0,24 *г*; при этом рост первого кристалла равен $p\%$ в день, а рост второго — $q\%$ в день, считая каждый раз от первоначальных весов кристаллов (т. е. от 1,2 *г* и 1,5 *г*). Если же считать, что рост кристаллов (в процентах) за день исчисляется от веса каждого кристалла, который он имел в начале каждого дня, то через два дня увеличение веса обоих кристаллов было бы не 0,24 *г*, а 0,2454 *г*. Найти p и q с точностью до 0,001.

50. Найти два целых положительных числа, зная, что их разность равна 66, а их общее наименьшее кратное равно 360.

51. По окружности радиуса R равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный круг на t сек. быстрее второй. Время между двумя последовательными встречами этих точек равно T. Определить скорости этих точек.

52. Два поезда выходят из пунктов A и B, расстояние между которыми равно d *км*, и идут навстречу один другому. Чтобы они встретились на середине пути, нужно, чтобы поезд из A вышел на t час. раньше поезда из B. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через a час. расстояние между ними составляло бы k-ю часть ($k > 1$) расстояния между A и B. Найти скорость каждого поезда.

53. Два пешехода вышли одновременно навстречу один другому из пунктов A и B. Когда они встретились, то оказалось, что первый пешеход прошел на m *км* больше, чем второй. Затем каждый из них, сохраняя свою скорость, отправился дальше, после чего первый прибыл в пункт B через p час. после встречи, а второй прибыл в пункт A через q час. после встречи. Найти расстояние между пунктами A и B.

54. Три экскаватора производят работу. Если эту работу будет выполнять один первый, то закончит работу на a дней позже, чем все вместе. Если же эту работу будет выполнять второй, то он закончит ее на b дней позже, чем все вместе, а если третий, то ему потребуется времени в c раз больше, чем при работе всех экскаваторов вместе. Во сколько дней выполняет работу каждый из них в отдельности?

55. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются через t часов. Какова скорость каждого, если первый проезжает m *км* на q час. быстрее второго и если расстояние AB равно s *км*.

56. Два вкладчика положили в сберкассу одинаковые суммы. Первый из них взял вклад по истечении m месяцев и получил p руб., а второй, взяв вклад по истечении n месяцев, получил q руб. Какую сумму положил каждый из них в сберкассу и сколько процентов выплачивает сберкасса? Известно, что $m < 12$ и $n < 12$.

57. Два мотоциклиста выехали одновременно: один из A в B, а второй из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в p *км* от B, второй раз в q *км* от A через t час. после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклистов.

58. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт в течение времени, за которое бассейн наполняет второй кран, а затем второй кран был открыт на такое время, за которое наполняет бассейн первый кран. После этого оказалась наполненной $\frac{1}{n}$-я часть бас-

сейна. Оба крана наполняют бассейн за a час. Сколько времени требуется для наполнения бассейна каждым краном в отдельности?

59. Два пешехода вышли одновременно, навстречу друг другу, из пунктов A и B и встретились через a час. За какое время прошел расстояние между A и B каждый из них, если первый, вышедший из A, пришел в пункт B на b час. позже, чем второй пришел в пункт A?

60*. Шары A и B, радиусы которых равны r, соединены нитью, длина которой равна a. Шар B подвешен к шару A. Последний выпускают из рук, предоставляя его действию силы тяжести по отвесной линии. Шар B достигает горизонтальной плоскости F, отражается вверх и в некоторой точке D, отстоящей на расстоянии $2r+b$ от плоскости F, сталкивается с шаром A. С какой высоты над плоскостью F был брошен шар A? Искомым является расстояние от самой нижней точки шара A до плоскости F. Предполагается, что шар B и плоскость F вполне упругие, так что шар B отражается от плоскости F с той же скоростью, какую он имеет в момент удара. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

61. Ученик должен перемножить два трехзначных числа и полученное произведение разделить на пятизначное число. Но он не заметил знака умножения и принял оба рядом стоящие числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное оказалось в три раза больше истинного. Определить все три числа.

62. В шахматном турнире участвовали два ученика седьмого класса и несколько учеников восьмого класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же количество очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения, зная, что каждый с каждым играл один раз.

63*. A и B едут на лодке между двумя пунктами по реке, скорость течения которой a *м/мин*. В течение переезда минутная стрелка на часах у B перемещается на некоторое число делений. Когда минутная стрелка на часах у A переместится на столько же делений, он уменьшит скорость и пройдет оставшуюся часть пути со скоростью относительно берега, равной $\frac{2}{3}$ первоначальной скорости относительно берега. Если A и B едут по течению, то A совершает первую часть перехода, т. е. до изменения скорости, в промежуток времени, в 6 раз больший, чем вторую часть. Когда же они едут против течения, то A совершает обе части перехода (до изменения скорости и после) в равные промежутки времени; A совершил бы обе части перехода против течения тоже в равные промежутки времени, если бы во второй части перехода шел со скоростью $\frac{7}{5}$ первоначальной и при этом с самого начала поменялся бы часами с B. Полагая, что часы у них идут равномерно (но не одинаково), найти скорости движения A и B. Пусть часы у A идут верно; как тогда идут часы у B? Пусть часы у B идут верно; как тогда идут часы у A?

§ 16. Составление неравенств

П. 1. Составление неравенств второй степени с одним неизвестным

1. По прямой из точки A в одном направлении движутся две точки: одна равномерно-ускоренно с начальной скоростью 3 *м/сек* и ускорением 2 *м/сек*^{2}, другая равномерно. В каких пределах должна изменяться скорость второй точки, чтобы она сначала обогнала первую точку, но чтобы затем первая точка догнала вторую на расстоянии, не большем 10 *м* от A?

2. Расстояние между городами A и B равно 100 *км*. Из города A в город B отправляются одновременно два автомобиля. Скорость первого на 10 *км/час* больше скорости второго, но в пути первый останавливается на 50 мин.

В каких пределах может меняться скорость первого автомобиля при условии, что он прибудет в город B не позже второго автомобиля?

3. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из пункта A в B, отстоящий от A на расстоянии 60 *км*. Затем он выезжает обратно с той же скоростью, но через один час после выезда он делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/час*. В каких границах заключена скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более чем от A до B?

4. Лодка спускается по течению реки на расстояние a *км*, а затем поднимается против течения реки на расстояние b *км*. Скорость течения реки равна v *км/час*. Какова должна быть собственная скорость лодки, чтобы вся поездка продолжалась не более чем t час.

5*. Два сплава — из серебра и меди — имеют одинаковую пробу (проба сплава — это отношение веса серебра к весу всего сплава). Если сплавить каждый из них с таким количеством меди, которое содержится в другом, то отношение проб этих новых сплавов будет не менее $\frac{1}{4}$. В каких пределах должна заключаться первоначальная проба (т. е. отношение веса серебра к весу всего слитка в первоначальном сплаве), если отношение веса первого полученного сплава к весу второго полученного сплава равно $\frac{2}{3}$?

6. На прямом берегу реки отгорожено забором место с трех сторон в форме прямоугольника. Длина всего забора 100 *м*. Каких размеров должен быть участок, чтобы его площадь была наибольшая?

7*. Точки A и B движутся по направлению к точке O по двум взаимно-перпендикулярным прямым: OA и OB. Расстояние от точки A до точки O в начальный момент равно 6 *м*, а расстояние от точки B до точки O в начальный момент равно 7 *м*. Скорости точек A и B равны соответственно 3 *м/сек* и 4 *м/сек*. Через какое время от начального момента расстояние между точками A и B будет наименьшим? Найти это наименьшее расстояние.

8. В каких пределах изменяется скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 *м/сек* эта точка расстояние в 630 *м* проходит скорее, притом не менее чем на 1 сек. и не более чем на 4 мин. 40 сек.

9. С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый половину времени шел со скоростью a, а вторую — со скоростью b. Второй шел первую половину пути со скоростью b, а вторую — со скоростью a. Который из них пришел раньше к месту назначения?

П. 2. Составление нелинейных неравенств

1. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше $\frac{1}{4}$; если от числителя и знаменателя отнять по 3, то значение дроби будет меньше $\frac{1}{10}$. Найти эту дробь.

2. Вклад в A руб. положен в сберегательную кассу по $p\%$ годовых. В конце каждого года вкладчик берет B руб. Через сколько лет после взятия соответствующей суммы остаток будет больше или равен $3A$? При каких условиях задача имеет решение?

3*. Непромытый «золотой песок» содержит $k\%$ чистого золота. После каждой промывки «золотого песка» отходит $p\%$ содержащихся в нем примесей и теряется $q\%$ от имеющегося в песке золота. Сколько следует произвести промывок, чтобы число процентов содержания чистого золота в «золотом песке» было не менее чем r? Известно, что $q < p$.

4*. Находящийся под постоянным давлением газ в количестве a $м^3$ последовательно пропускают через n фильтров, каждый из которых поглощает $p\%$ общего объема примесей, содержащихся в газе, поступающем в рассматриваемый фильтр. Затем газ смешивается с b $м^3$ отнесенного к тому же давлению газа, содержащего $q\%$ (по объему) примесей. Какой процент примесей (по объему) допустим для газа до его очистки, если число процентов примесей в газовой смеси не должно превышать r?

5*. В резервуар, содержащий A $л$ воды, сначала через одну трубу вливают a $л$ p-процентного (по объему) раствора спирта, а затем после перемешивания, через другую трубу, выливают равное количество (т. е. a $л$) образующейся смеси. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы в резервуаре получился раствор спирта крепостью не менее $q\%$ (по объему)? Дано, что $q < p$.

6. В колбе в начальный момент имеется N бактерий. К концу каждого часа количество бактерий увеличивается на $p\%$ по сравнению с тем количеством их, которое имелось в начале этого часа; кроме того, в конце каждого часа из колбы берется порция, содержащая n ($n < N$) бактерий. Через сколько часов количество бактерий в колбе будет превышать (после изъятия соответствующей порции) начальное количество их в два раза? Выяснить условия, при которых задача имеет решение.

Глава VII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Доказательство различных равенств, содержащих показательную и логарифмическую функции

1. Доказать, что если

$$y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}, \quad z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}},$$

то

$$x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}.$$

2. Дано: $\lg 676 = 2{,}82995$, $\lg 104 = 2{,}01703$.
Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, не пользуясь таблицами.

3. Функция y дана уравнением

$$y = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}, \quad \text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

Выразить

$$z = \frac{a^{4x} + a^{-4x}}{a^{4x} - a^{-4x}}$$

как функцию только y и наоборот y как функцию z.

4. Доказать, что

$$\frac{\lg_a x}{\lg_{ab} x} = 1 + \lg_a b,$$

где $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $ab \neq 1$.

5. Доказать, что если a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы, причем $c - b \neq 1$ и $c + b \neq 1$, то

$$\lg_{c+b} a + \lg_{c-b} a = 2 \lg_{c+b} a \lg_{c-b} a.$$

6. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$, причем $ab \neq 0$, то

$$\lg \frac{|a+b|}{3} = \frac{1}{2}(\lg|a| + \lg|b|).$$

7. Доказать, что

$$\lg_a N \lg_b N + \lg_b N \lg_c N + \lg_c N \lg_a N = \frac{\lg_a N \lg_b N \lg_c N}{\lg_{abc} N},$$

где $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $N \neq 1$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, $abc \neq 1$.

8. Доказать, что если $\alpha = \lg_{12} 18$, $\beta = \lg_{24} 54$,
то

$$\alpha\beta = 5(\alpha - \beta) = 1.$$

9. Найти $\lg_{54} 168$, если $\lg_7 12 = a$ и $\lg_{12} 24 = b$.

10. Дано $\lg_{30} 3 = a$, $\lg_{30} 5 = b$. Найти $\lg_{30} 8$.

11. Найти $\lg_9 20$, зная, что $\lg_{10} 2 = a$, $\lg_{10} 3 = b$.

12. Доказать, что $\lg_b a \lg_a b = 1$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

13. Пусть a — положительное число, не равное 1. Положим:

$$s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \quad c(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad t(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$$

Доказать, что:

а) $c^2 - s^2 = 1$;

б) $s(2x) = 2s(x)\,c(x)$;

в) $c(2x) = 2c^2(x) - 1 = 2s^2(x) + 1 = c^2(x) + s^2(x)$;

г) $t(2x) = \frac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$;

д) $c > 1$;

е) $s(x + y) = s(x)\,c(y) + s(y)\,c(x)$;

ж) $c(x + y) = c(x)\,c(y) + s(x)\,s(y)$;

з) $c(-x) = c(x)$;

и) $s(-x) = -s(x)$;

к) $t(-x) = -t(x)$;

л) $c(x - y) = c(x)\,c(y) - s(x)\,s(y)$;

м)** Найти функции, обратные для $s(x)$, $c(x)$ и $t(x)$.

§ 2. Логарифмические и показательные уравнения с одним неизвестным

Решить следующие уравнения:

1. $\lg_{a^3} x + \lg_{x^3} a = 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

2. $\lg_a x \lg_b x = \lg_a b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1.$

3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$

4. $x^{\lg x} = 100x.$

5. $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10.$

6. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}.$

7. $\frac{\lg(2x)}{\lg(4x - 15)} = 2.$

8*. $1 + \lg_b(2\lg_{10} a - x)\lg_x b = \frac{2}{\lg_b x}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$

9. $(1 + \lg_c a)\lg_a x \lg_b c = \lg_b x \lg_c x \lg_a c, \quad a > 0, \quad b > 0,$
$c > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1, \quad c \neq 1.$

10*. $1 + \lg_x \frac{4 - x}{10} = (\lg_{10} \lg_{10} n - 1)\lg_x 10.$

11. $\sqrt{\lg_a \sqrt[4]{ax} + \lg_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\lg_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \lg_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

12. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$

13. $\lg_x 5\sqrt{5} - \frac{5}{4} = (\lg_x \sqrt{5})^2.$

14. $\sqrt{\lg_x \sqrt{3x}} \cdot \lg_3 x = -1.$

15. $(0{,}4)^{\lg^2 x + 1} = (6{,}25)^{2 - \lg x^3}.$

16. $1+\frac{\lg_a(p-x)}{\lg_a(x+q)}=\frac{2-\lg_{p-q}4}{\lg_{p-q}(x+q)}$, $a>0$, $a\neq 1$, $p-q>0$, $p-q\neq 1$.

17. $\sqrt{\lg_x 5\sqrt{5}+\lg_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}\cdot\lg_{\sqrt{5}}x}=-\sqrt{6}$.

18. $\lg_x 2\lg_{2x}2=\lg_{4x}2$.

19. $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$.

20. $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2$.

21. $\lg_x(5x^2)(\lg_5 x)^2=1$.

22. $20\lg_{ax}\sqrt{x}+7\lg_{a^2x}x^3=3\lg_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x^2$, $a>0$, $a\neq 1$.

23. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\lg_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\lg_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$.

24. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$.

25. $x^{1-\lg_{10}x}=0{,}01$.

26. $x^{\lg_{x^2}(x^2-1)}=5$.

27. $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$.

28. $\lg_{10}[3+2\lg_{10}(1+x)]=0$.

29. $10^{\lg_a(x^2-3x+5)}=3^{\lg_a 10}$, $a>0$, $a\neq 1$.

30. $x^{2(\lg_{10}x)^3-\frac{3}{2}\lg_{10}x}=\sqrt{10}$.

31. $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$.

32. $\lg_{10}2+\lg_{10}(4^{x-2}+9)=1+\lg_{10}(2^{x-2}+1)$.

33. $2^{\lg_8(x^2-6x+9)}=3^{2\lg_x\sqrt{x-1}}$.

34. $\lg_a\sqrt{1+x}+3\lg_{a^2}(1-x)=\lg_{a^4}(1-x^2)^2+2$, $a>0$, $a\neq 1$.

35. $x^{\lg_a x}=a^{(\lg_a x)^2}$, $a>0$, $a\neq 1$.

36. $a^{\lg_{a^2}x}=x^{\lg_x(x^2-x)}$, $a>0$, $a\neq 1$.

37. $15^{\lg_5 3x^{\lg_5(9x)+1}}=1$.

38. $\lg_{10}(5-x)+2\lg_{10}\sqrt{3-x}=0$.

39. $(\lg_5 x)^2+\lg_5 7\cdot\lg_7 x=2$.

40. $\lg_x 10+\lg_{x^2}10=6$.

41. $2^{x+3}-3^{x^2-2}=3^{x^2+1}-2^{x-1}$.

42. $\lg_{10}(3x-11)+\lg_{10}(x-27)=3$.

43. $5^x\sqrt[x+1]{8^x}=100$.

44. $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$.

45. $\sqrt[x]{a^2}+\sqrt[x]{b^2}=m\sqrt[x]{ab}$, $ab>0$, $a\neq b$.

46. $\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x}+\left(\frac{57}{37}\right)^{1-x}=10$.

47. $\dfrac{\operatorname{tg} 2+\lg(4-5x-6x^2)}{\lg(2x-1)}=3.$

48. $3^x\cdot 4^x=5^x.$

49. $\lg(152+x^3)-3\lg(x+2)=0.$

50. $\dfrac{1}{5-\lg_2 x}+\dfrac{2}{1+\lg_2 x}=1.$

51. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$

52. $2\lg_x a+\lg_{ax} a+3\lg_{a^2x} a=0, \quad a>0, \quad a\neq 1.$

53. $\lg_x 10+2\lg_{10x} 10+3\lg_{100x} 10=0.$

54. $\lg_{2x}\left(\dfrac{2}{x}\right)\lg_2^2 x+\lg_2^4 x=1.$

55. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$

56. $\lg_4(x+12)\lg_x 2=1.$

57. $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18.$

58. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=7^x+7^{x-1}+7^{x-2}.$

59. Сколько корней имеет уравнение

$$2^x=x+3.$$

Вычислить их (без таблиц) с точностью до 0,1.

60. Найти все значения k, при которых уравнение

$$\lg(kx)=2\lg(x+1)$$

имеет только один корень.

61. Сколько корней имеет уравнение

$$3x\lg x=1+\lg x.$$

Найти приближенные значения этих корней с точностью до 1.

§ 3. Системы логарифмических и показательных уравнений

Решить следующие системы уравнений:

1. $x^a=y^b, \quad \lg_c\dfrac{x}{y}=\dfrac{\lg_c x}{\lg_c y}, \quad c>0, \ c\neq 1, \ a\neq 0, \ b\neq 0, \ a\neq b.$

2. $x^{x+y}=y^{x-y}, \quad x^2y=1.$

3. $a^xb^y=ab, \quad xy=1, \quad a>0, \quad b>0, \quad a\neq 1, \quad b\neq 1.$

4. $\lg^2 x+\lg^2 y=\dfrac{5}{2}\lg^2 a^2, \quad xy=a^2, \quad a\neq 0.$

5. $x^{\frac{z}{3}}=\sqrt[15]{y^8}, \quad y^{\frac{z}{3}}=\sqrt[15]{x^2}, \quad z=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

6. $(1+y)^x=100, \quad (y^4-2y^2+1)^{x-1}=\dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}.$

7. $q\lg_a x+p\lg_a y=0, \quad x^q-4y^p=0, \quad p\neq 0, \quad q\neq 0, \quad a>0, \quad a\neq 1.$

8. $x^z=y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z=x^{\frac{2}{3}}, \quad z=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}.$

9. $64^{2x}+64^{2y}=12, \quad 64^{x+y}=4\sqrt{2}.$

10. $(y+1)^x=10\,000, \quad (y^2-1)^{2x-2}=\dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^x}.$

11. $x^y = y^x, \quad 3^x = 15^y.$

12. $\lg_{0,5}(y-x) + \lg_2 \frac{1}{y} = -2, \quad x^2 + y^2 = 25.$

13. $x^y = y^x, \quad p^x = q^y, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad p \neq 1, \quad q \neq 1, \quad p \neq q.$

14. $x^y = y^x, \quad x^p = y^q, \quad p \neq q.$

15. $3^x \cdot 2^y = 576, \quad \lg_{\sqrt{2}}(y-x) = 4.$

16. $5(\lg_y x + \lg_x y) = 26, \quad xy = 64.$

17. $\lg_2 x + \lg_4 y + \lg_4 z = 2, \quad \lg_3 y + \lg_9 z + \lg_9 x = 2, \quad \lg_4 z + \lg_{16} x + \lg_{12} y = 2.$

18. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \quad xy - x + y = 118.$

19. $\lg_x(ay) = p, \quad \lg_y(bx) = q, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad pq \neq 1.$

20. $\lg_a x - \lg_{a^2} y = m, \quad \lg_{a^2} x - \lg_{a^3} y = n,$ где $a > 0$ и $a \neq 1.$

21. $\frac{1}{m}\lg_a x + \frac{1}{n}\lg_a y = 0, \quad \frac{1}{n}\lg_a x + \frac{1}{m}\lg_a y = 1,$

где $a > 0$ и $a \neq 1, \ m \neq 0, \ n \neq 0.$

22. $\lg_{10} a \lg_{10} x + \lg_{10} b \lg_{10} y = 0, \quad xy = c,$

где $a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq b, \quad c > 0.$

23.** $x^{x+y} = y^{12}, \quad y^{x+y} = x^3.$

24. $y^{x^2+7x+12} = 1, \quad x + y = 6.$

25. $\sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}, \quad (x+y)\,2^{y-x} = \frac{1}{\lg_{\frac{1}{8}}(2^{-1})}.$

26. $x^{\lg_{10} y} = 4, \quad xy = 40.$

27. $11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71, \quad 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21, \quad 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16.$

28. $\lg_y x - \lg_x y = \frac{8}{3}, \quad xy = 16.$

29. $y + \lg_{10} x = 1, \quad x^y = 0{,}01.$

30. $\lg_x y - 4\lg_y x = 3, \quad xy = 2.$

31. $\lg_x 10 + \lg_y 10 = 5, \quad \lg_{10} x + \lg_{10} y = \frac{5}{4}.$

32. $x^y = \frac{1}{\sqrt{1000}}, \quad \frac{\lg_{10} x}{y} = -6.$

33. $y^{\frac{x}{y}} = x, \quad y^3 = x^2.$

34. $10^{3-\lg(x-y)} = 250,$

$$\sqrt{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{26-y}{\sqrt{x-y}}.$$

35. $x^{\sqrt{y}} = y, \quad y^{\sqrt{y}} = x^4.$

36. $x^y = y^x = 1.$

37. $7(\lg_y x + \lg_x y) = 50, \quad xy = 256.$

38.** $\sqrt{x^2+5x+2y-3} + \sqrt{x^2+x+y+2} =$

$$= \sqrt{x^2+4x+3y-2} + \sqrt{x^2+2y+3}, \quad x^{x-y} = 2y-1.$$

39. $\lg_{10}^2 x + \lg_{10}^2 y = 7, \quad \lg_{10} x - \lg_{10} y = 2.$

40. $x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} = x^{\frac{2}{3}}.$

41. $x^y + 243, \quad \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2.$

§ 4. Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции

Решить следующие неравенства:

1. $\lg_a x > 6 \lg_x a - 1, \quad$ где $0 < a < 1.$

2*. $\frac{\lg_a (35 - x^3)}{\lg_a (5 - x)} > 3, \quad$ где $a > 1.$

3. $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}.$

4. $\frac{1}{\lg_{10} x} + \frac{1}{1 - \lg_{10} x} > 1.$

5. $2 \lg_x a + \lg_{ax} a + 3 \lg_{a^2 x} a > 0, \quad$ где $a > 1.$

6. $\lg_x (x + 2) > 2.$

7. $\lg_8 (x^2 - 4x + 3) < 1.$

8.** $\lg_{x+p} 2 < \lg_x 4, \quad 0 < p < \frac{1}{4}.$

Глава VIII

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Область определения

Найти область определения следующих элементарных функций:

1. $y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$.
2. $y = \sqrt{1 - |4x^3 - 6x + 1|}$.
3. $y = \frac{1}{x}$.
4. $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$,
5. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.
6. $y = 2x^2 + 3x + 5$.
7. $y = \sqrt{1 - x^2}$.
8. $y = \lg \frac{(x-2)(x-3)}{x}$.
9. $y = \sqrt[4]{\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}}$.
10. $y = \lg [x(x-3)(x+5)]$.
11. $y = \lg (x^2 + 2x)$.
12. $y = 2^x$.
13. $y = \lg_{10} (x^2 - 3x + 7)$.
14. $y = \lg_{10} \lg_{10} x$.

§ 2. Возрастание, убывание, выпуклость вверх и вниз

1. Доказать, что функция

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

возрастет на сегменте $[-1, 1]$.
Указание. Пусть

$$-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1.$$

Надо доказать, что

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} < \frac{x_2}{1 + x_2^2}.$$

2. Доказать, что та же функция

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

на полуинтервале $(-\infty, -1]$ убывает, т. е. если

$$x_1 < x_2 \leqslant -1,$$

то

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} > \frac{x_2}{1+x_2^2}.$$

3. Доказать, что функция $y = x^3 - 6x$ на сегменте $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ убывает.

4. Доказать, что функция

$$y = x + \frac{1}{x^2}$$

а) возрастает в интервале $(-\infty, 0)$, т. е. если

$$x_1 < x_2 < 0,$$

то

$$x_1 + \frac{1}{x_1^2} < x_2 + \frac{1}{x_2^2};$$

б) убывает на полуинтервале $(0, \sqrt[3]{2}]$, т. е. если

$$0 < x_1 < x_2 \leqslant \sqrt[3]{2},$$

то

$$x_1 + \frac{1}{x_1^2} > x_2 + \frac{1}{x_2^2};$$

в) возрастает на полуинтервале $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

5. Доказать, что наибольшее значение функции

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

равно $\frac{1}{2}$, а наименьшее $-\frac{1}{2}$. При каких значениях x функция принимает значение $\frac{1}{2}$? При каких значениях x эта функция принимает значение $-\frac{1}{2}$?

6. Доказать, что если $x > 0$, то

$$x + \frac{1}{x^2} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{2},$$

причем знак равенства имеет место только при $x = \sqrt[3]{2}$. Иначе говоря, на интервале $(0, \infty)$ функция

$$y = x + \frac{1}{x^2}$$

принимает наименьшее значение, равное $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

7. Доказать, что функция

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

имеет наименьшее значение, равное 2, при $x = 0$.

8. Доказать, что функция

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

а) на полуинтервале $(-\infty, -\sqrt{3}]$ выпукла вверх;

б) на сегменте $[-\sqrt{3}, 0]$ выпукла вниз;

в) на сегменте $[0, \sqrt{3}]$ выпукла вверх;

г) на полуинтервале $[\sqrt{3}, +\infty)$ выпукла вниз.

9. Доказать, что функция

$$y = x + \frac{1}{x^2}$$

а) на интервале $(-\infty, 0)$ выпукла вниз;
б) на интервале $(0, +\infty)$ выпукла вниз.

10. Доказать, что функция

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

а) на полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{a}{3}\right]$ выпукла вверх;

б) на полуинтервале $\left[-\frac{a}{3}, +\infty\right)$ выпукла вниз (каковы бы ни были числа b и c).

11. Доказать, что функция

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

на сегменте $[-a, a]$ выпукла вверх.

12. Доказать, что функция

$$y = x^3 + px + q$$

возрастающая, если $p > 0$. Если же $p < 0$, то:

а) на полуинтервале $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$ она возрастает:

б) на сегменте $\left[-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$ убывает;

в) на полусегменте $\left[\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right)$ возрастает.

13. Исследовать на возрастание и убывание функции:
1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$.

14. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$y = \frac{1}{x}.$$

15. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$y = ax^2 + bx + c.$$

16. Воспользовавшись результатом задачи № 12, исследовать на возрастание и убывание функцию

$$y = -\cos x \cdot \sin^2 x.$$

17. Доказать, что функция

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

а) на полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ выпукла вниз;

б) на сегменте $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ выпукла вверх;

в) на полуинтервале $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ выпукла вниз.

18. Исследовать на выпуклость вверх и вниз функции:
1°. $y = x^2$;
2°. $y = x^3$;
3°. $y = \frac{1}{x}$.

19. Доказать, что если $a > 0$, то функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

выпукла вниз, а если $a < 0$, то выпукла вверх.

20. Доказать, что если функция $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$ выпукла вверх, то тем же свойством обладает и функция

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha x + \beta,$$

где α и β — произвольные числа.

21. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ выпуклы вверх на сегменте $[a, b]$. Что можно сказать о выпуклости вверх или вниз следующих функций:

1°. $f(x) + \varphi(x)$;
2°. $f(x) - \varphi(x)$;
3°. $kf(x)$ (k — число).

22.** Доказать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ выпукла вверх, а на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ выпукла вниз.

23. Доказать, что функция

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

1°. в интервале $(-\infty, -1)$ убывает и выпукла вверх;
2°. в полуинтервале $(-1, 0]$ убывает;
3°. в полуинтервале $[0, 1)$ возрастает;
4°. в интервале $(-1, 1)$ выпукла вниз;
5°. в интервале $(1, +\infty)$ возрастает и выпукла вверх.

24. Исследовать на возрастание, убывание и на выпуклость следующие функции:

1°. $y = \sqrt{x}$; 2°. $y = \sqrt[3]{x}$; 3°. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

25. Доказать, что если $a > 0$, то функция

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

обладает следующими свойствами:

1°. если $b^2 - 3ac \leqslant 0$, то она возрастает;
2°. если $b^2 - 3ac > 0$, то

а) в полуинтервале

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}}\right]$$

возрастает;

б) на сегменте

$$\left[-\frac{b}{3a} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}}, -\frac{b}{3a} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}}\right]$$

убывает;

в) в полуинтервале

$$\left[-\frac{b}{3a} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}}, +\infty\right)$$

возрастает;

3°. в полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right]$ выпукла вверх;

4°. в полуинтервале $\left[-\frac{b}{3a}, +\infty\right)$ выпукла вниз.

При $a < 0$ все заключения будут обратными.

26. Доказать, что функция

$$y = x + \sin x$$

возрастающая.

27. Доказать, что функция

$$y = (x-1)^2 (x+1)^3$$

1°. в полуинтервале $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$ возрастает;

2°. на сегменте $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$ убывает;

3°. в полуинтервале $[1, +\infty)$ возрастает.

28.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{12x(x-a)}{x^2+36},$$

где a — данное действительное число, не равное нулю. При каком целом значении a эти наибольшие и наименьшие значения будут целыми числами? При каких значениях x функция y принимает эти наибольшие значения (в общем случае и в частном, при которых наибольшее и наименьшее значения — целые числа)?

29. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x};$$

исследовать при помощи подстановки $x = \cos t$, где $0 \leqslant t \leqslant \pi$ — промежутки возрастания и убывания, наибольшие и наименьшие значения.

§ 3. Наибольшие и наименьшие значения

1. Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, который имеет наибольшую площадь.

2. Найти высоту конуса максимального объема, который можно вписать в шар данного радиуса r.

3. В круг радиуса r вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

4. В круг радиуса r вписать прямоугольник, периметр которого был бы наибольшим.

5. Из всех круговых секторов, имеющих данный периметр, найти тот, который имел бы наибольшую площадь.

6*. Показать, что из всех треугольников, вписанных в окружность наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

7. Из всех прямых круговых цилиндров, которые можно вписать в данный прямой круговой конус, найти тот:

а) объем которого был бы наибольший;

б) боковая поверхность которого была бы наибольшей.

8. В данный шар вписать конус, имеющий:

а) наибольшую боковую поверхность;

б**) наибольшую полную поверхность.

9*. Конус описан около шара. Показать, что объем конуса превосходит объем шара не менее чем в два раза. Для какого конуса отношение его объема к объему шара будет наименьшим?

10. Найти размеры конической палатки данной вместимости, требующей наименьшего количества материи.

11. Нужно огородить проволокой, длиной 200 *м*, земельную площадь в виде прямоугольника, примыкающего к стене. Найти размеры прямоугольника, при которых площадь будет наибольшей.

12. Требуется изготовить сосуд без крышки в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием емкостью 32 *л*. Каковы должны быть

размеры сосуда, чтобы на его изготовление пошло возможно меньше материала?

13. Из прямоугольного листа с размерами a и b требуется изготовить коробку наибольшей емкости, вырезав по углам четыре равных квадрата и загнув получившиеся выступы. Найти величину сторон вырезаемых квадратов. Рассмотреть случай $a = b$.

14. Из круглого листа радиуса r вырезан сектор с центральным углом φ. Из этого сектора сделана коническая воронка. При каком φ емкость воронки будет наибольшей?

15*. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок к основанию площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

16.** От канала шириной a, под прямым углом к нему, отходит канал шириной b. Оба канала прямолинейны. Найти наибольшую длину бревна, которое при сплаве из одного канала в другой не застрянет на повороте.

17.** На отрезке длиной l, соединяющем два источника света силой I_1 и I_2, найти наименее освещенную точку (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

18. На какой высоте над центром круглого стола радиуса r нужно подвесить лампу, чтобы книга, лежащая на краю стола, была бы сильнее всего освещена (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения луча на освещаемый предмет)?

Глава IX

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Сумма четырех составляющих арифметическую прогрессию равна 1; сумма кубов этих же чисел равна 0,1. Найти эти числа.

2. Найти числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма первых четырех членов равна 68, сумма последних четырех членов равна —36, а сумма всех членов равна 68.

3. Найти сумму n дробей, числители которых образуют арифметическую прогрессию с первым членом a и разностью d, а знаменатели — геометрическую прогрессию с первым членом b и знаменателем q.

4. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

5. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими геометрическую прогрессию, причем произведение этих чисел равно 216.

6. Сумма членов геометрической прогресии без первого члена равна $63\frac{1}{2}$; сумма членов без последнего равна 127; сумма членов без двух первых и двух последних равна 30. Найти прогрессию.

7. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Но если после этого увеличить последнее число на 64, то прогрессия снова сделается геометрической. Найти эти числа.

8. Найти отношения сторон треугольника, зная, что один из его углов равен 120° и что стороны его образуют арифметическую прогрессию.

9. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2 *см*. Площадь треугольника равна 6 *см*^{2}. Определить стороны.

10*. Доказать, что если $a>0$, $b>0$ и $c>0$ соответственно m-й, n-й и p-й члены одновременно как арифметической, так и геометрической прогрессии, то

$$a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=1.$$

11. Доказать, что если a — первый член арифметической прогрессии, а сумма p первых членов равна 0, то сумма следующих q членов равна $-\frac{aq(p+q)}{p-1}$.

12. Доказать, что если s_n, s_{2n} и s_{3n} — суммы n, $2n$ и $3n$ членов арифметической прогрессии, начиная с первого, то

$$s_{3n}=3(s_{2n}-s_n).$$

13. Доказать, что если s_m, s_n и s_{m+n} — суммы m, n и $m+n$ первых членов арифметической прогрессии, то

$$\frac{s_m-s_n}{s_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}.$$

14. Даны две арифметические прогрессии: одна возрастающая, другая убывающая, у которых один и тот же первый член a и разность b. Пусть s_1 и s_2 суммы n первых членов этих прогрессий. Найти

$$\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}.$$

15. Доказать, что если удвоенная сумма m первых членов арифметической прогрессии равна сумме $m+n$ первых ее членов, а эта последняя сумма равна сумме $m+p$ первых членов, то

$$(m+n)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) = (m+p)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right).$$

16. Даны две прогрессии:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ldots$$

и

$$c,\ c+d,\ c+2d,\ c+3d,\ldots$$

Выразить сумму

$$ac + (a+b)(c+d) + (a+2b)(c+2d) + \ldots + [a+(n-1)b][c+(a-1)d]$$

через суммы s_1 и s_2 n членов данных прогрессий и их разности b и d.

17.* При каком соотношении между a и b сумма всех парных произведений членов прогрессии

$$a,\ a-b,\ a-2b,\ \ldots,\ a-(3n^2-2)b$$

обращается в нуль?

18. Доказать, что если члены a_p, a_q, a_r и a_s арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию, то $p-q$, $q-r$ и $r-s$ будут последовательными членами геометрической прогрессии.

19. Доказать, что если s_n, s_{2n}, и s_{3n} суммы n, $2n$ и $3n$ первых членов геометрической прогрессии, то

$$s_n(s_{3n} - s_{2n}) = (s_{2n} - s_n)^2.$$

20. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, s_n — сумма n первых ее членов, а s_{n-1} — сумма $n-1$ первых ее членов. Найти сумму всех парных произведений n первых членов.

21.** Доказать, что условие

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, является необходимым и достаточным для того, чтобы эти числа составляли геометрическую прогрессию.

22. Пусть s_1, s_2, s_3 — суммы соответственно n_1, n_2 и n_3 первых членов некоторой арифметической прогрессии. Показать, что

$$\frac{s_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{s_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{s_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

23. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, даны

$$a_{m+n} = A,\quad a_{m-n} = B;$$

найти a_m и a_n.

24. Длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию. В каких границах может меняться знаменатель этой прогрессии?

25. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доказать, что каждый член (начиная со второго) этой прогрессии равен разности двух соседних с ним.

26. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов ее членов равна 48. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.

27. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую: сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

28. Три числа, сумма которых равна 60, составляют арифметическую прогрессию; если к этим числам прибавить соответственно $\frac{11}{5}$, 4 и 7, то новые числа будут составлять геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

29*. Найти четыре действительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, зная, что сумма их равна 130, а сумма их квадратов равна 5044.

30. Доказать, что если числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

31. Доказать, что если $\lg_k x$, $\lg_m x$, $\lg_n x$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2=(kn)^{\lg_k m}.$$

32. Даны две прогрессии:

арифметическая

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

и геометрическая

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

причем все члены этих прогрессий положительны и обе прогрессии возрастающие. Кроме того, дано

$$a_1=b_1 \quad \text{и} \quad a_2=b_2.$$

Доказать, что все члены арифметической прогрессии, начиная с a_3, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии, т. е. что $a_n<b_n$ при всех $n>2$.

33*. Доказать, что последовательность чисел

$$a_1=\cos x+i\sin x,$$
$$a_2=\cos 2x+i\sin 2x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=\cos nx+i\sin nx$$

есть геометрическая прогрессия. Найти знаменатель этой прогрессии. Пользуясь формулой для суммы n членов геометрической прогрессии, найти s_n и привести s_n к виду $A+Bi$, где A и B действительны. Найти отсюда выражения для сумм

$$A=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx,$$
$$B=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx.$$

34. В некоторой арифметической прогрессии второй член является средним пропорциональным между первым и четвертым. Показать, что в этом случае шестой член будет средним пропорциональным между четвертым и девятым.

35. Определить три числа, образующих геометрическую прогрессию, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.

36. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, а сумма их квадратов равна 364.

37. Определить знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что ее сумма вдвое больше суммы n первых членов.

38*. Доказать, что для всякой арифметической прогрессии

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

имеют место равенства:

$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 0,$$
$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0,$$
$$a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0,$$

и вообще, при всяком $n \geqslant 2$

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} a_n + (-1)^n \cdot C_n^n a_{n+1} = 0.$$

39*. Найти такую арифметическую прогрессию, чтобы между суммой ее первых x членов и суммой kx следующих за ними существовало постоянное отношение, не зависящее от x.

40. Доказать, что для двух прогрессий:
геометрической

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

и арифметической

$$b,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

для которых

$$a > 0,\ \frac{a_1}{a} > 0,\quad b_1 - b > 0,$$

существует такое число α, что $\lg_\alpha a_n - b_n$ не зависит от n.

41. Какая зависимость должна существовать между p и q для того, чтобы уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ имело четыре корня, образующих арифметическую прогрессию.

42. Найти арифметическую прогрессию, сумма n членов которой равна $3n^2 + n$.

43. Вычислить отношение сторон прямоугольного треугольника, зная, что его стороны составляют арифметическую прогрессию.

44*. Дана последовательность чисел

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\ a_3 = 6,\quad a_4 = 10,\quad a_5 = 15,\ \ldots$$

таких, что разности

$$a_1 - a_0 = 1,\quad a_2 - a_1 = 2,\quad a_3 - a_2 = 3,\quad a_4 - a_3 = 4,\ \ldots$$

образуют ряд натуральных чисел. Найти сумму

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

45. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны 1, 2, 3, ..., p, а разности 1, 3, 5, ..., $2p - 1$. Найти сумму членов всех прогрессий.

46. Дана арифметическая прогрессия

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \text{где все } a_i > 0.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

47. Найти сумму семи членов арифметической прогрессии, 6-й член которой равен -6, а сумма 2-го и 5-го членов равна 3.

48. Найти сумму шестнадцати членов арифметической прогрессии, если сумма четырех первых членов этой прогрессии равна -28, а сумма шести первых членов равна 58.

49. Найти сумму восьми членов геометрической прогрессии, сумма 1-го и 4-го членов которой равна 18, а сумма 2-го и 3-го равна 12.

50. Найти сумму десяти членов арифметической прогрессии, 5-й член которой равен 9, а сумма 2-го и 9-го членов равна 20.

51. Найти сумму восьми членов арифметической прогрессии, для которой сумма первого и восьмого членов равна 25, а сумма 3-го и 5-го членов равна 19.

52. Доказать, что во всякой арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, произведение двух членов, равноотстоящих от крайних членов, возрастает по мере удаления от концов к середине.

53. Рассмотрим арифметическую и геометрическую прогрессии, удовлетворяющие следующим условиям:

а) первые члены обеих прогрессий одинаковы;

б) сумма первых двух членов арифметической прогрессии превышает сумму первых двух членов геометрической на величину, равную утроенному первому члену арифметической прогрессии;

в) сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна сумме первых трех членов геометрической прогрессии.

Найти знаменатель геометрической прогрессии.

54. Решить уравнение

$$x^3+x^2+2x+a=0,$$

зная, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

55. Решить уравнение

$$x^3+x^2=a,$$

зная, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

§ 2. Возвратные последовательности

Последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

называется возвратной последовательностью k-го порядка, если ее члены связаны соотношением

$$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\ \ldots\ +p_ka_n=0, \tag{2}$$

где k — фиксированное целое положительное число, $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_k$ — фиксированные числа (возможно и комплексные).

Для задания возвратной последовательности (1), удовлетворяющей соотношению (2), достаточно задать k ее первых членов

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k,$$

так как тогда a_{k+1} определится из соотношения (2), затем из того же соотношения (2) найдем a_{k+2} и т. д. Отсюда следует, что если мы найдем такое выражение для a_n, которое

а) при $n=1,\ n=2,\ \ldots,\ n=k$ обращается в $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k$

б) и которое удовлетворяет соотношению (1), то это выражение и будет решением вопроса об отыскании последовательности (1), удовлетворяющей соотношению (2). Кроме того, из сказанного выше следует, что мы найдем *общее* выражение для a_n, удовлетворяющее соотношению (2), если мы найдем такую функцию $a_n=f(n,\ C_1,\ \ldots,\ C_k)$, от n и от k произвольных постоянных, которые могут быть определены при произвольном задании $f(1, C_1, C_2, \ldots, C_k)=a_1, f(2, C_1, C_2, \ldots, C_k)=a_2, \ldots, f(k, C_1, C_2, \ldots, C_k)=a_k$.

Решение уравнения (2) ищется в виде $a_n=x^n$; если полученное при этом уравнение относительно k

$$x^k+p_1x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\ \ldots\ +p_k=0$$

(называемое характеристическим) имеет простые корни, то общее решение будет иметь вид

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \ldots + C_k x_k^n. \qquad (3)$$

Если же, например, x_1 — корень кратности λ:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\lambda,$$

то соответствующая сумма в выражении (3) заменяется на

$$(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_\lambda n^{\lambda-1}) x_1^n.$$

В следующих задачах (№ 1—18) требуется найти общее решение для возвратных последовательностей:

1. $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0.$
2. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0.$
3. $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0.$
4. $a_{n+2} - a_{n+1} + 5a_n = 0.$
5. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$
6. $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0.$
7. $a_{n+2} + 3a_n = 0.$
8. $a_{n+2} - a_n = 0.$
9. $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0.$
10. $a_{n+3} + 2a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0.$
11. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0.$
12. $a_{n+3} - 3a_{n+2} - 50a_n = 0.$
13. $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0.$
14. $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0.$
15. $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n = 0.$
16. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0.$
17. $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0.$
18. $a_{n+3} - (2\cos\alpha + 1)\, a_{n+2} + (2\cos\alpha + 1)\, a_{n+1} - a_n = 0.$

В следующих задачах (№ 19—27) требуется найти a_n, зная соотношение (2) и соответствующее количество первых членов последовательности:

19. $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -7.$
20. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0,$ где: 1) $a_1 = 3, \ a_2 = 9;$
2) $a_1 = a_2 = 2;$ 3) $a_1 = 10, \ a_2 = 16.$
21. $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
22. $a_{n+2} - a_{n+1} + 5a_n = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = -3.$
23. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,$ где: 1) $a_1 = 2, \ a_2 = 4;$
2) $a_1 = 2, \ a_2 = 8;$ 3) $a_1 = 0, \ a_2 = -4.$
24. $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1.$
25. $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -29.$
26. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 27.$
27. $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c.$

28. Найти сумму $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, если $a_{k+2}+pa_{k+1}+qa_k=0$ и $p+q+1\neq 0$.

29. Найти возвратную последовательность такую, что

$$a_{n+2}-2\cos\alpha a_{n+1}+a_n=0,\quad a_1=\cos\alpha,\quad a_2=\cos 2\alpha,$$

и затем найти отсюда сумму $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha$.

30. Убедиться в том, что последовательность с общим членом $a_n=n^k$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k}-C_k^1 a_{n+k-1}+C_k^2 a_{n+k-2}+\ldots+(-1)^k C_k^k a_n=0.$$

Найти все последовательности, удовлетворяющие этому соотношению.

31. Найти все последовательности, удовлетворяющие условию

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4.$$

32. Найти последовательность, для которой

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=-4,\quad a_1=1,\quad a_2=-7.$$

33. Найти последовательность, для которой

$$a_{n+2}+a_n=a,\quad a_1=2l,\quad a_2=\frac{1}{2}.$$

34. При каком условии последовательность, определяемая соотношением

$$a_{n+1}=pa_n+q,\quad p\neq 1$$

будет сходящейся. Найти в случае ее сходимости предел.

35. При каком условии возвратная последовательность

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$$

будет иметь предел. Чему будет равен этот предел?

36. а) Доказать, что «частным» решением уравнения

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=\alpha n+\beta,$$

где α, β, p, q — данные числа, в случае если $x=1$ не есть корень уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

является последовательность вида $a_n^*=an+b$; найти a и b.

б) Если $x=1$ — простой корень уравнения $x^2+px+q=0$, то частное решение может быть найдено в виде

$$a_n^*=n(an+b);\quad \text{найти } a \text{ и } b.$$

в) Если $x=1$ — двойной корень уравнения $x^2+px+q=0$, т. е. начальное уравнение имеет вид

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=\alpha+\beta,$$

то частное решение может быть найдено в виде

$$a_n^*=n^2(an+b);\quad \text{найти } a \text{ и } b.$$

г) Найти в каждом из трех указанных случаев общее решение данного уравнения (применить подстановку $a_n=b_n+a_n^*$).

В следующих задачах (№ 37—43) требуется найти общее решение, если не даны первые члены последовательности и частное решение в случае задания начальных условий.

37. $$a_{n+1}-a_n=n.$$

38. $$a_{n+1}-a_n=n,\quad a_1=1.$$

39. $$a_{n+1}-a_n=\frac{n(n+1)}{2},\quad a_1=1.$$

40. $$a_{n+3}-6a_{n+2}+11a_{n+1}-6a_n=-24n^2-4n-8,$$
$$a_1=4,\quad a_2=26,\quad a_3=74.$$

41. $$a_{n+1}-a_n=3^n.$$

42. $$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=27\cdot 5^n,\quad a_1=-9,\quad a_2=45.$$

43. $$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=2^n.$$

44. Дано уравнение

$$a_{n+3}+pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=\alpha\beta^n \tag{1}$$

(p, q, r, α и β — данные числа). Рассмотрим еще уравнение

$$x^3+px^2+qx+r=0. \tag{2}$$

Доказать, что если β не есть корень уравнения (2), то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$a_n^*=C\beta^n.$$

Если β — простой корень уравнения (2), то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$a_n^*=Cn\beta^n.$$

Если β — двойной корень уравнения (2), то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$a_n^*=Cn^2\beta^n,$$

и, наконец, если β — тройной корень уравнения (2), то уравнение (1) имеет частное решение вида $a_n=Cn^3\beta^n$.

45*. Составить рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет общий член последовательности

$$\lambda\cos\mu,\quad 2\lambda^2\cos 2\mu,\quad 3\lambda^3\cos 3\mu,\quad \ldots,\quad n\lambda^n\cos n\mu,\quad \ldots$$

(λ и μ — данные числа), и с помощью этого рекуррентного соотношения найти сумму

$$\lambda\cos\mu+2\lambda^2\cos 2\mu+3\lambda^3\cos 3\mu+\ldots+n\lambda^n\cos n\mu.$$

46.** Рассмотрим две последовательности:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

члены которых связаны соотношением

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=p_1a_n+q_1b_n,\\ b_{n+1}&=p_2a_n+q_2b_n, \end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix} p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — данные числа (возможно и комплексные).

Найти выражение через n для a_n и b_n, считая, что a_1 и b_1 заданы. Исследовать случай $\Delta=0$.

Рассмотреть числовые примеры:

а) $$\begin{aligned} a_{n+1}&=-2a_n+4b_n,\\ b_{n+1}&=-5a_n+7b_n, \end{aligned}\qquad a_1=-10,\quad b_1=-13.$$

б) $$\begin{aligned} a_{n+1}&=3a_n+b_n,\\ b_{n+1}&=-a_n+b_n, \end{aligned}\qquad a_1=14,\quad b_1=-6.$$

в) $$\begin{aligned} a_{n+1}&=a_n+2b_n,\\ b_{n+1}&=3a_n+6b_n. \end{aligned}$$

47.** Даны две последовательности:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

члены которых связаны соотношениями

$$a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n,$$
$$b_{n+1} = p_2 a_n + d_2 b_n,$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 — данные числа (возможно и комплексные), но такие, что $|p_1| + |q_1| < 1$ и $|p_2| + |q_2| < 1$. Доказать, что обе последовательности сходятся к нулю.

48. Доказать, что если задано n последовательностей, члены которых связаны соотношениями

$$a_{k+1} = p_1 a_k + p_2 b_b + p_3 c_k + \ldots + p_n f_k,$$
$$b_{k+1} = q_1 a_k + q_2 b_k + q_3 c_k + \ldots + q_n f_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{k+1} = s_1 a_k + s_2 b_k + s_3 c_k + \ldots + s_n f_k,$$

причем

$$|p_1| + |p_2| + |p_3| + \ldots + |p_n| < 1,$$
$$|q_1| + |q_2| + |q_3| + \ldots + |q_n| < 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|s_1| + |s_2| + |s_3| + \ldots + |s_n| < 1,$$

то все эти последовательности сходятся к нулю.

49.** Найти необходимое и достаточное условие, при котором последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

члены которых связаны соотношениями

$$a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n,$$
$$b_{n+1} = p_2 a_n + q_2 b_n,$$

сходятся к нулю, каковы бы ни были их первые члены a_1 и b_1.

50*. Пусть дана линейная система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

причем $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ (в этом случае она имеет решение и притом только одно). Перепишем эту систему в виде

$$x = (a_1 + 1)\,x + b_1 y + c_1,$$
$$y = a_2 x + (b_2 + 1)\,y + c_2$$

и рассмотрим две последовательности: x_n и y_n, первые члены которых произвольны и которые связаны соотношениями

$$x_{n+1} = (a_1 + 1)\,x_n + b_1 y_n + c_1,$$
$$y_{n+1} = a_2 x_n + (b_2 + 1)\,y_n + c_2.$$

Доказать, что если $|a_1 + 1| + |b_1| < 1$ и $|a_2| + |b_2 + 1| < 1$, то обе эти последовательности сходятся к решению $x = x_0$, $y = y_0$ данной системы (1).

51*. Показать, что если дана система n уравнений с n неизвестными:

$$p_1x+p_2y+p_3z+\ldots+p_nt+l_1=0,$$
$$q_1x+q_2y+q_3z+\ldots+q_nt+m_1=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_1x+s_2y+s_2z+\ldots+s_nt+k_1=0,$$

причем известно, что она имеет единственное решение

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0,\quad \ldots,\quad t=t_0$$

и

$$|p_1+1|+|p_2|+|p_3|+\ldots+|p_n|<1,$$
$$|q_1|+|q_2+1|+|q_3|+\ldots+|q_n|<1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|s_1|+|s_2|+|s_3|+\ldots+|s_n+1|<1,$$

то это решение может быть приближенно, но с любой степенью точности найдено так: берем *любые* значения $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, ..., $t=t_1$ и составим n последовательностей, первые члены которых x_1, y_1, z_1, ..., t_1 и которые связаны соотношениями:

$$x_{k+1}=(p_1+1)x_k+p_2y_k+p_3z_k+\ldots+p_nt_k+l_1,$$
$$y_{k+1}=q_1x_k+(q_2+1)y_k+q_3z_k+\ldots+q_nt_k+m_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{k+1}=s_1x_k+s_2y_k+s_3z_k+\ldots+(s_n+1)t_k+k_1;$$

тогда эти последовательности будут сходиться соответственно к x_0, y_0, z_0, ..., t_0, т. е. к решению данной системы.

52*. Члены двух последовательностей связаны соотношениями

$$a_{n+1}=a_n-2b_n,$$
$$b_{n+1}=2a_n+b_n.$$

Найти общее решение.

53*. Члены двух последовательностей связаны соотношениями

$$a_{n+1}=b_n+5,$$
$$b_{n+1}=-a_n+3.$$

Найти общее решение.

54.** Построить общую теорию решения системы рекуррентных соотношений:

$$a_{n+1}=p_1a_n+q_1b_n+r_1c_n,$$
$$b_{n+1}=p_2a_n+q_2b_n+r_2c_n,$$
$$c_{n+1}=p_3a_n+q_3b_n+r_3c_n.$$

55. Последовательность чисел

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

два первых члена которой равны 1, а каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,$$

называется «рядом» Фибоначчи. Доказать, что

а) $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ (формула Бинэ);

б) $a_1+a_3+\ldots+a_{2n+1}=a_{2n+2}$;

в) $1+a_2+a_4+\ldots+a_{2n}=a_{2n+1}$;

г) $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n-1}$;

д) $a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{2n-1}$;

е) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$;

ж) $a_n a_{n+1} - a_{n-2}a_{n-1} = a_{2n-1}$;

з) $a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$;

и) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \ldots + a_{2n-1}a_{2n} = a_{2n}^2$;

к) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_n = \pm a_{n-1} + 1$;

л) $a_n^3 + a_{n+1}^3 - a_{n-1}^3 = a_{3n}$;

м) $a_n^4 - a_{n-2}a_{n-1}a_{n+1}a_{n+2} = 1$;

н) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$;

о) $\frac{1}{10}(a_{n+60} - a_n)$ — число целое;

п) последняя цифра числа a_{15k} (k — целое) есть нуль;

р) число цифр a_n больше $\frac{n-2}{5}$.

§ 3. Произвольные последовательности

При отыскании предела последовательности бывает часто полезной следующая теорема: всякая возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел; всякая убывающая последовательность, ограниченная снизу, имеет предел (см. ниже задачи 5, 9, ...); строгое доказательство этой теоремы дается в курсах математического анализа.

Найти предел последовательности, общий член которой:

1. $$a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{C_n^2}\right).$$

2*. $$a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

3. $$a_n = (1 + x)(1 + x^2)\ldots(1 + x^{2^n}),$$

где $|x| < 1$.

4*. $$a_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdots \frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}}.$$

5. $$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}.$$

6*. $$a_n = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

(в числителе и знаменателе n радикалов).

7. $$a_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$$

(n радикалов).

8.** Пусть $a < b < 0$. Составляются две последовательности a_n и b_n по формулам

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

При этом $a_1 = a$, $b_1 = b$. Доказать, что

$$\frac{a_n - \sqrt{a_n b_n}}{a_n + \sqrt{a_n b_n}} = \left(\frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}}\right)^{2^{n-1}},$$

$$\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{ab}.$$

9. Доказать, что последовательность

$$x_1 = \frac{a}{2} \quad (0 < a < 1),$$

$$x_2 = \frac{a}{2} + \frac{x_1^2}{2},$$

. . . . . .

$$x_n = \frac{a}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}$$

. . . . . .

возрастает и ограничена сверху.

Найти ее предел.

10. Найти предел последовательности:

$$x_1 = \frac{a}{2},$$

$$x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2},$$

$$x_3 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2},$$

. . . . . .

$$x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

. . . . . .

где $0 < a < 1$.

11*. Последовательность задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

где $a > 0$ — данное положительное число, а x_0 — произвольное положительное число; таким образом,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right),$$

. . . . . .

Доказать, что эта последовательность имеет предел, равный $\sqrt{a}$, каково бы ни было начальное значение x_0 (на этой теореме основан удобный, особенно на арифмометре, способ приближенного извлечения квадратных корней из чисел).

12. Доказать, что предел последовательности, общий член которой

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$

равен $\frac{1}{k+1}$.

13. Последовательности определяются соотношениями:

а) $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$,

б) $x_{n+1}=\frac{x_n\left(x_n^2+2a\right)}{2x_n^3+a}$,

где $a>0$; $x_0>0$.

Доказать, что пределы обеих последовательностей существуют и равны $\sqrt[3]{a}$.

14.** Пусть a и b — два положительных числа, причем $a<b$. Построим по этим числам две последовательности, определяя их так:

$$a_0=a, \quad b_0=b;$$

$$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}, \quad b_1=\sqrt{a_0b_0};$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2=\sqrt{a_1b_1};$$

. . . . . .

и вообще,

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

Доказать, что обе эти последовательности имеют один и тот же предел.

Глава X

СУММИРОВАНИЕ

Пусть задана какая-нибудь элементарная функция $f(x)$, а $\varphi(x)$ — другая элементарная функция, связанная с функцией $f(x)$ соотношением

$$f(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x), \tag{1}$$

где h — какое-нибудь число. Заменяя в этом равенстве x последовательно на $x+h$, $x+2h$, ..., $x+nh$, получим:

$$f(x+h)=\varphi(x+2h)-\varphi(x+h), \tag{2}$$

$$f(x+2h)=\varphi(x+3h)-\varphi(x+2h), \tag{3}$$

. . . .

$$f(x+nh)=\varphi[x+(n+1)h]-\varphi(x+nh), \qquad (n+1).$$

Складывая почленно равенства (1), (2), ..., $(n+1)$, получим

$$f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f(x+nh)=\varphi[x+(n+1)h]-\varphi(x).$$

Таким образом, задача отыскания сумм вида

$$f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f(x+nh),$$

где $f(x)$ — элементарная функция, будет решена, если удастся подобрать такую элементарную функцию $\varphi(x)$, которая с функцией $f(x)$ связана равенством $f(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x)$. Не существует общего приема, по которому для заданной функции $f(x)$ можно найти «суммирующую функцию» $\varphi(x)$.

В математической дисциплине, называемой теорией конечных разностей, дается формула (Эйлера) для суммирующей функции в виде суммы ряда (и то, конечно, при некоторых ограничениях на суммируемую функцию). По отношению к суммированию элементарных функций применение ее мало эффективно, так как упомянутый ряд имеет сложную структуру и исследование его сходимости не просто. Поэтому обычно суммирующую функцию подбирают. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Рассмотрим тождество

$$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)=-2\sin x\sin\frac{h}{2};$$

здесь

$$\varphi(x)=\cos\left(x-\frac{h}{2}\right),\quad \varphi(x+h)=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

$$f(x)=-2\sin x\sin\frac{h}{2}.$$

Поэтому

$$f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f(x+nh)=$$

$$=-2\sin\frac{h}{2}[\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\ldots+\sin(x+nh)]=$$

$$=\varphi[x+(n+1)h]-\varphi(x)=\cos\left[x-\frac{h}{2}+(n+1)h\right]-\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)=$$

$$=-2\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\left[x-\frac{h}{2}+\frac{(n+1)h}{2}\right]=-2\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right),$$

и значит, если

$$\sin\frac{h}{2}\neq 0,$$

то

$$\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\ldots+\sin(x+nh)=\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Пример 2. Вычислим сумму

$$s=\frac{1}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}+\frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)(x+4h)}+\ldots+\frac{1}{(x+nh)[x+(n+1)h][x+(n+2)h][x+(n+3)h]}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{x(x+h)(x+2h)}.$$

Находим

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)}-\frac{1}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{-3h}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}=f(x).$$

Отсюда следует, что

$$f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f(x+nh)=$$
$$=-3h\left[\frac{1}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}+\frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)(x+4h)}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[x+(n-3)h][x+(n-2)h][x+(n-1)h](x+nh)}\right]=\varphi[x+(n+1)h]-\varphi(x)=$$
$$=\frac{1}{[x+(n+1)h][x+(n+2)h][x+(n+3)h]}-\frac{1}{x(x+h)(x+2h)};$$

значит, данная сумма

$$s=\frac{1}{3h}\left[\frac{1}{x(x+h)(x+2h)}-\frac{1}{[x+(n+1)h][x+(n+2)h][x+(n+3)h]}\right].$$

Если последовательность a_n — возвратная, то сумма $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ может быть легко вычислена.

Пример 3. Пусть a_n — возвратная последовательность, для которой

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=n.$$

Требуется вычислить сумму

$$s_n=a_1+a_2+a_1+\ldots+a_n,$$

зная, что

$$a_1=1,\ a_2=0.$$

Решение: полагая в данном соотношении $n=1, 2, 3, \ldots, n$, получим:

$$\begin{aligned}
a_3-3a_2+a_1&=1,\\
a_4-3a_3+a_2&=2,\\
a_5-3a_4+a_3&=3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n&=n;
\end{aligned}$$

складывая, получаем

$$s_n - a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2} - 3(s_n - a_1 + a_{n+1}) + s_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

откуда

$$s_n = 2a_1 - a_2 + a_{n+2} - 2a_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Частное решение уравнения

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = n$$

есть

$$a_n^* = 1 - n;$$

полагая $a_n = a_n^* + b_n$, получим

$$b_{n+2} - 3b_{n+1} + b_n = 0.$$

Отсюда

$$b_n = C_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Так как $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 - 1$ и $a_1 = 1$, $a_1 = 0$, то

$$b_1 = b_2 = 1, \text{ и тогда } C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом,

$$a_n = 1 - n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

а потому окончательно

$$s_n = 2 + 1 - (n+2) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} -$$
$$- \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{-n^2-3n+2}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Задачи

Вычислить следующие суммы:

1. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$
2*. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + (n-2)(n-1)n.$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$
4. $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + (n-1)x^{n-1} + nx^n.$
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$
6. $1 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2.$
7. $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \ldots + n^2x^n.$
8. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1}.$
9. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4.$
10. Вычислить произведение

$$(1+2)(3+4+5)(6+7+8+9)\ldots,$$

состоящее из n множителей.

11. Разобьем ряд натуральных чисел в группы:

$$1,\ (2,\ 3),\ \ (4,\ 5,\ 6),\ \ (7,\ 8,\ 9,\ 10),\ \ldots,$$

Найти сумму чисел n-й группы.

12. Разобьем ряд натуральных чисел в группы:

$$1,\ \ (2,\ 3,\ 4),\ \ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9),\ \ (10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16),\ \ldots;$$

найти сумму чисел n-й группы.

13*. Разобьем ряд натуральных чисел в группы:

$$1,\ (2,\ 4),\ (3,\ 5,\ 7),\ (6,\ 8,\ 10,\ 12),\ (9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17),\ \ldots;$$

найти сумму чисел n-й группы.

14. Найти сумму парных произведений n натуральных чисел

[т. е. сумму: $1\cdot 2+1\cdot 3+\ \ldots\ +1\cdot n+2\cdot 3+2\cdot 4+\ \ldots\ +2n+\ldots+$ $+(n-1)n$].

15. Вычислить:

а) $1^5+2^5+3^5+\ \ldots\ +n^5$;

б) $1^6+2^6+3^6+\ \ldots\ +n^6$;

в) $1^7+2^7+3^7+\ \ldots\ +n^7$.

16. Вычислить сумму парных произведений квадратов n натуральных чисел. Вычислить следующие суммы:

17. $$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+\ \ldots\ +n(2n-1).$$

18. $$1+3+6+10+15+\ \ldots\ +(1+2+3+\ \ldots\ +n).$$

19. $$\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ \ldots\ +\frac{2^n-1}{2^{n-1}}.$$

20. $$1+9+45+189+729+\ \ldots\ +(2n-1)\,3^{n-1}.$$

21. $$x+x^2(1+x)+x^3(1+x+x^2)+x^4(1+x+x^2+x^3)+$$
$$+\ \ldots\ +x^n(1+x+x^2+\ \ldots\ +x^{n-1}).$$

22.** Возвратная последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

определяется соотношением

$$a_n-2a_{n-1}-3a_{n-2}=0.$$

Выразить через a_1, a_2 и x следующую сумму:

$$s=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ \ldots\ +a_nx^n.$$

23.** Найти целую рациональную функцию $f_p(x)$, которая при $x=0$ обращается в нуль и которая удовлетворяет тождеству

$$f_p(x)-f_p(x-1)=x^p,$$

где p — целое положительное число или нуль, и доказать, что

$$f_p(n)=1^p+2^p+3^p+\ \ldots\ +n^p$$

($f_p(x)$ — полиномы Бернулли).

Глава XI

КОМБИНАТОРИКА

1*. Найти число размещений из n предметов по r при условии, чтобы в каждое из размещений входило p назначенных предметов из данных.

2. Сколько можно составить размещений из букв a, b, c, d, e и f по четыре с тем, чтобы буква a предшествовала букве b.

3. Сколько можно составить размещений из букв a, b, c, d, e, f по четыре:
а) содержащих a;
б) сколько из них начинается с a?

4. На плоскости дано n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найти число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.

5*. Найти число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника, не считая вершин его и полагая, что нет совмещающихся точек пересечения.

6. Сколькими различными способами можно посадить 6 человек вокруг круглого стола?

7. На железнодорожной станции имеется n семафоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если указателю каждого семафора можно дать три положения?

8. Через каждую из трех данных точек проведем по m прямых так, чтобы из них не было двух, параллельных между собой, и трех, встречающихся в одной точке. Найти число точек пересечения проведенных прямых.

9*. Дано m предметов одного сорта и n предметов другого сорта. Найти число групп, которые можно составить, беря r одного сорта и s другого сорта.

10. На плоскости дано n точек, из которых m лежат на одной прямой, а в числе остальных точек нет трех, лежащих на одной прямой. Найти число прямых, которые можно получить, соединяя эти точки попарно.

11. Дано в пространстве n точек ($n \geqslant 7$), из которых m ($m \geqslant 3$) лежат в одной плоскости, а остальные $n - m$ ($n - m \geqslant 4$) расположены так, что никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Сколько можно провести плоскостей так, чтобы каждая из них содержала по крайней мере три точки из числа заданных.

12. На плоскости дано n точек, из которых m лежат на одной прямой, а из остальных никакие три точки не лежат на одной прямой. Найти число треугольников, которые можно получить, соединяя точки по три.

13*. Имеется шесть шаров: 3 черных, 1 красный, 1 белый и 1 синий. Сколькими различными способами можно разложить их в ряд по четыре?

14. Дано n точек. Сколько можно построить многоугольников с m сторонами, где $m < n$, у которых вершины лежали бы в данных точках?

15*. Доказать, что $2n$ предметов можно разбить на n различных пар $\frac{(2n)!}{2^n}$ способами.

16. На плоскости даны три точки. Проведем через одну из них m прямых, через другую n прямых и через третью p прямых. Положив, что в числе

этих прямых не находится трех, пересекающихся в одной точке, и двух, параллельных между собою; найти число треугольников, образованных пересечением проведенных прямых.

17.** Найти сумму всех возможных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4 и в которых одна и та же цифра повторяется в каждом из чисел только один раз.

18.** Найти сумму всех пятизначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, в каждом из которых одна и та же цифра повторяется только один раз.

19.** Найти число всех делителей произведения $2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 13$.

20.** Сколько существует таких треугольников, у которых вершины будут вершинами многоугольника с n сторонами, но у которых стороны не совпадают со сторонами этого многоугольника?

21.** На каждой из a прямых поставлено по m точек так, что нельзя провести прямую через какие-либо три из этих точек. Сколько можно составить треугольников, соединяя данные точки?

22.** Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых есть также натуральное число (представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считать различными)?

23.** Каждый из людей, когда-либо живших на земле, сделал определенное число рукопожатий. Доказать, что число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

24.** Расставить на шахматной доске 24 шашки симметрично относительно главной диагонали так, чтобы на каждой горизонтали стояло по три шашки. Ставить шашки на главную диагональ воспрещается.

25. Какое максимальное число слонов одного цвета можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не угрожали друг другу? Доказать, что число способов расстановки слонов есть квадрат некоторого числа.

26. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость
а) 15 прямых?
б) 4 окружности?

27. Решить уравнение

$$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}.$$

28.** Сколько делителей имеет число $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5$. Найти сумму всех делителей.

29.** Сколько и каких цифр понадобится для того, чтобы написать все числа от 1 до 10^n включительно?

30. Из точки проведено n лучей. Сколько образовалось углов?

31. На окружности расположено n точек. Сколько существует различных многоугольников (не обязательно выпуклых), вписанных в эту окружность, вершинами которых служат данные точки.

32. Дано n предметов, расположенных в определенном порядке. Сколькими способами можно выбрать из них три предмета, при условии, что ни в одной комбинации нет двух предметов, стоящих рядом.

33. На шахматной доске расставлены две ладьи так, что они не могут бить одна другую. Сколькими способами может быть осуществлена такая расстановка?

34. На плоскости проведены m параллельных между собою прямых. Кроме того, на этой же плоскости проведены n прямых, не параллельных ни между собой, ни уже ранее проведенным. Ни одна из прямых не проходит через точку пересечения двух других прямых. На сколько областей делится плоскость проведенными прямыми?

35. Экскурсанты заказали 8 четырехместных кают на пароходе. Все места в каждой из кают и все каюты равноценны. Сколькими способами могут экскурсанты разместиться в каютах, если их было всего 32 человека?

36. Даны 12 точек, из которых 5 лежат на одной прямой. Кроме них, никакие три не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки (каждая прямая содержит не менее двух точек из числа данных)?

37. Даны 11 точек, из которых 5 лежат на одной окружности и никакие три точки не лежат на одной прямой. Кроме них, никакие 4 не лежат на одной окружности. Сколько окружностей можно провести через эти точки так, чтобы каждая проходила, по крайней мере, через 3 точки из числа заданных?

38. На плоскости дано 10 попарно пересекающихся прямых. Никакие три прямые не проходят через одну точку. Сколько можно построить окружностей, каждая из которых касается трех прямых из числа данных десяти?

39.** Сколькими различными способами можно раскрасить 6 граней куба в 6 различных цветов? Различными считаются раскраски, не переходящие друг в друга вращениями куба.

40*. Сколькими способами можно из колоды в 52 карты выбрать 6 карт так, чтобы среди каждой группы из 6 карт были бы все 4 масти?

41.** Найти число всех выпуклых k-угольников, вершинами которых служат k из n вершин выпуклого n-угольника, причем две соседние вершины k-угольника должны быть разделены по меньшей мере s вершинами n-угольника.

42. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные, а три нечетные?

43. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четная (первая цифра предполагается отличной от нуля)?

44. Сколько имеется десятизначных чисел, у которых сумма цифр равна трем (первая цифра предполагается отличной от нуля)?

45. Сколько имеется девятизначных чисел, у которых все цифры различные?

46. Из n букв, среди которых буква a повторяется α раз, буква b повторяется β раз, а остальные различны, образуют сочетания по p элементов с повторениями. Сколько среди этих сочетаний будет таких, которые содержат h раз букву a и k раз букву b?

47. Из n букв, среди которых буква a повторяется α раз, а буква b повторяется β раз, производят сочетания с повторениями по p элементов. Сколько среди этих сочетаний будет таких, которые содержат h раз букву a и k раз букву b?

48. Сколько существует целых чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

49. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, употребляя только цифры 1, 2, 3, при том дополнительном условии, что цифра 3 употребляется ровно два раза.

50. Найти n и m, зная, что

$$C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3.$$

51. На одной из двух параллельных прямых выбрано m точек, на другой n точек. Каждая из m точек на первой прямой соединена прямой линией с каждой из точек на второй прямой. Найти, сколько раз пересекаются все отрезки, соединяющие точки, если предположить, что нет ни одной точки, в которой пересекалось бы более двух отрезков одновременно.

52. Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных его сторонам; каждый ряд состоит из m линий. Сколько всех возможных параллелограммов можно составить из этих линий?

53. Сколькими способами можно разместить в ряд $p+q$ шаров, из которых p белых и q черных при условии, чтобы рядом не лежали черные шары. Дано, что $p > q$.

54. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что

а) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

б) для любой пары маршрутов A и B найдется и притом только одна остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

в) на каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

55. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

а) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

б) для любой пары маршрутов A и B найдется и притом единственная остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

в) на каждом маршруте ровно три остановки.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

56. Коалиции A и B ведут войну между собой; n нейтральных государств находятся в нерешительности, причем известно, что p из них, наверное, не присоединятся к коалиции A, а k, наверное, не присоединятся к коалиции B. Сколько новых положений может оказаться в этой войне в зависимости от дальнейшего поведения нейтральных государств?

57. В отделении железнодорожного вагона один против другого поставлены два дивана, на каждом из которых по 5 мест. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое — спиной к паровозу. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

58. На сколько частей можно разделить поверхность шара плоскостями, проходящими через его центр, при условии, что никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр.

59. Можно ли провести в городе 10 автомобильных маршрутов и распределить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов не были взяты, найдется остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

60. Будем говорить, что два числа, входящих в размещение, образуют инверсию, если большее предшествует (непосредственно или нет) меньшему. Найти число I_n инверсий среди всех перестановок из чисел 1, 2, 3, ..., n.

61. Два играющих поочередно вынимают из двух ящиков шары. В свой ход каждый может брать из любого, только одного, ящика произвольное число шаров. Выигравшим считают того, кто берет последним. Как должен играть первый играющий, чтобы выиграть, если в одном ящике 73 шара, а в другом 118?

62. В ящике лежит 70 шаров: 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные черные и белые. Из ящика наугад берутся шары. Какое наименьшее число шаров надо взять, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

63. Сколькими различными способами можно распределить 20 различных предметов между 5 лицами так, чтобы каждый получил по 4 предмета.

64. Можно ли выложить в цепь, следуя правилам игры, все 28 костей домино так, чтобы на одном конце оказалась шестерка, а на другом — пятерка?

65. Числа от 1 до 1 000 вписаны подряд по кругу. Начиная с первого, вычеркивается каждое 15-е число: 1, 16, 31, ..., причем при повторных оборотах зачеркнутые числа считаются снова. Число оборотов неограниченно. Сколько чисел останется незачеркнутыми?

66. Сколькими различными способами число 1000 000 можно представить в виде произведения трех целых чисел? Представления, отличающиеся только порядком множителей, считаются тождественными.

67. Плоская геометрическая фигура состоит из 9 точек и 9 прямых отрезков; через каждую точку проходят 3 отрезка и на каждом отрезке лежат 3 точки. Какова эта фигура?

68. Можно ли ходом ладьи (на одну клетку) попасть из одного угла шахматной доски в противоположный, побывав в каждой клетке доски один и только один раз? Можно ли проделать то же самое ходом коня?

69. Город имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении с севера на юг — n, а в направлении с востока на запад — m. Сколько имеется возможных (различных хотя бы в части пути) кратчайших дорог от одной из вершины прямоугольника до противоположной?

70. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмем среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое самое большое число сторон может он иметь?

71. Сколько различных шаров можно построить в пространстве так, чтобы они касались трех данных плоскостей и данного шара?

72. На сколько частей разбивается выпуклый n-угольник всеми его диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри n-угольника?

Глава XII

БИНОМ НЬЮТОНА

1. Исходя из равенства

$$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n,$$

вычислить суммы:

а) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots + nC_n$;

б) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (n+1)C_n$;

в) $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \ldots + (n-1)C_n$;

г) $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \ldots + (2n+1)C_n$;

д) $3C_1 + 7C_2 + 11C_3 + \ldots + (4n-1)C_n$;

е) $C_0 - 2C_1 + 3C_2 - \ldots + (-1)^n (n+1)C_n$;

ж) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - \ldots + (-1)^{n-1} nC_n$;

з) $\frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_n}{n+1}$;

и) $\frac{C_0}{2} + \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{4} + \ldots + \frac{C_n}{n+2}$;

к) $\frac{C_0}{1} - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1}$;

л) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \ldots + (-1)^n C_n^2$.

2. Найти число членов разложений (после приведения подобных членов):

а) $(a+b+c)^n$;

б) $(a+b+c+d)^n$.

3. Найти наибольший коэффициент в разложениях

а) $(a+b+c)^{10}$;

б) $(a+b+c+d)^{14}$.

4. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — коэффициенты в разложении

$$(1+x+x^2)^n$$

по возрастающим степеням x.
Доказать, что:

а) $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \ldots - a_{2n-1} a_{2n} = 0$;

б) $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2 + \frac{1}{2}(-1)^n a_n^2 = \frac{1}{2} a_n$;

в) $a_r - n a_{r-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_{r-2} - \ldots + \frac{(-1)^r n!}{r!\,(n-r)!}$, $a_0 = 0$

(исключая случаи, когда r кратно 3);

г) $a_0 + a_3 + a_6 + \ldots = a_1 + a_4 + a_7 + \ldots = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots = 3^{n-1}$.

5. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}?$$

6. Определить номер наибольшего члена разложения $(p+q)^n$ по убывающим степеням буквы p, предполагая, что

$$p>0,\ q>0,\ p+q=1.$$

При каких условиях:

а) наибольший член будет первым?
б) наибольший член будет последним?
в) разложение будет содержать два одинаковых последовательных члена, превышающих все остальные члены разложения?

7. Доказать, что в разложении $(a+b)^n$, $(a>0,\ b>0,\ n$ — целое положительное число) не может быть трех одинаковых последовательных членов. При каких условиях разложение имеет два одинаковых последовательных члена?

8. Доказать, что сумма квадратов коэффициентов бинома Ньютона $(x+a)^n$ равна C_{2n}^n.

9. Определить показатель n (n — целое положительное число) разложения

$$\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^n$$

по убывающим степеням величины x, если 10-й от начала член этого разложения имеет наибольший коэффициент.

10. Если в разложении

$$(a+b+c+\ \dots\ +l)^n$$

все числовые коэффициенты заменить на 1, то получим целую рациональную функцию от a, b, c, $\dots$, l (однородную), которую будем обозначать так:

$$[a,\ b,\ c,\ \dots,\ l]_n.$$

Доказать следующие тождества:

а) $[a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{p+1}]_n-[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p]_n=(a_{p+1}-a_1)[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{p+1}]_{n-1}$;

б) $[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p]_n=[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{p-1}]_n+a_p[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{p-1}]_{n-1}+$
$+a_p^2[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{p-1}]_{n-2}+\ \dots\ +a_p^n[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{p-1}]_0$,
где $[a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{p-1}]_0=1$.

11. Полагая

$$s_{n,\,p}=1^p+2^p+3^p+\ \dots\ +n^p,$$

доказать, что

$$s_{n,\,p+1}=(n+1)\,s_{n,\,p}-(s_{1,\,p}+s_{2,\,p}+\ \dots\ +s_{n,\,p}).$$

12. Найти число различных (не подобных между собой) членов разложения

$$(x_1+x_2+x_3+\ \dots\ +x_n)^3,$$

получающихся после возведения в степень.

13. Найти коэффициент при x^4 в разложении

$$(1+2x+3x^2)^{10}.$$

14. Определить число отличных от нуля коэффициентов в разложении

$$(1+x^2+x^5)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_{100}x^{100}.$$

15. Найти коэффициент при x^k в разложении

$$(1+x+x^2+x^3+\ \dots\ +x^{n-1})^2.$$

Глава XIII

ИНДУКЦИЯ

Метод полной индукции (доказательство от n к $n+1$) весьма распространен в практике математических доказательств. Однако в практике средней школы этот метод применяется все еще недостаточно широко, а между тем ряд доказательств получил бы при его использовании большую логическую стройность и законченность.

В отдельных случаях применение принципа полной индукции упрощает решение вопроса. Часто какую-либо формулу пишут по аналогии с тем, что получено, например, для $n=1$ или $n=2$; такой вывод логически неполноценен, и для законченности рассуждений применение принципа полной индукции просто необходимо.

Цель настоящей главы — дать задачи на применение принципа полной индукции из различных разделов курса элементарной математики и тем способствовать более глубокому внедрению этого принципа в обиход математических доказательств на занятиях в средней школе.

Доказать методом полной индукции соотношение

1. $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\geqslant 0,$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — действительные числа.

2. Доказать, что

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\,*$$

(где n — целое положительное число) является целой рациональной функцией от x степени n.

3. Доказать методом полной индукции, что если $x_1>0$, $x_2>0$, $\ldots$, $x_n>0$, если среди них есть хотя бы два различных числа и если

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a,$$

то

$$x_1x_2x_3\ldots x_n<\left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

4. Доказать, что n прямых, расположенных в одной плоскости, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, рассекают плоскость на

$$1+\frac{n(n+1)}{2}\text{ частей.}$$

5. Доказать, что если на плоскости проведено любое число произвольным образом расположенных прямых, то

$$t-l+p=1,$$

где t — число точек пересечения этих прямых, l — число кусков, на которые эти прямые делятся точками пересечения, а p — число кусков плоскостей, на которые эти прямые делят плоскость.

---

* $\frac{1}{2^n}T_n(x)=\frac{1}{2^n}\cos(n\arccos x)$ — так называемые полиномы П. Л. Чебышева.

6. Члены последовательности чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

удовлетворяют соотношению

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1},$$

и все они отличны от нуля.

Доказать, что $a_n = a_1 q^{n-1}$, где $q = \frac{a_2}{a_1}$.

7. Члены последовательности чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

удовлетворяют соотношению

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Доказать, что

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

где

$$d = a_2 - a_1.$$

8. Доказать, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

9. Доказать, что сумму четвертых степеней натурального ряда чисел от 1 до n можно представить в виде

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f.$$

Полагая здесь $n = 1, 2, \ldots$, найти a, b, c, d, e, f, а затем доказать формулу методом полной индукции.

10. Доказать тождество

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

11. Доказать тождество

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

12. Дана последовательность чисел:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots,$$

в которой первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух непосредственно ему предшествующих. Доказать методом полной индукции, что число, стоящее на n-м месте, выражается формулой (Бинэ):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

13. Доказать, что для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где B — число его вершин, P — число ребер, Γ — число граней. *

14. Доказать, что

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

---

* Это предложение называется теоремой Эйлера.

15. Доказать, что
$\sin nx$, где n — целое нечетное положительное число, есть целая рациональная функция от $\sin x$.

16. Доказать, что если последовательность чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

такова, что

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3$$

и для всякого натурального числа k имеет место равенство

$$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k,$$

то

$$a_n = 1 + 2^n.$$

17. Доказать, что

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}.$$

18. Доказать, что при любом натуральном числе n (и $n = 0$) число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

19. Доказать, что если в результате конечного числа рациональных действий, т. е. сложения, вычитания, умножения и деления, над комплексными числами

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,$$

получается комплексное число u, то в результате тех же действий над числами

$$\bar{z}_1,\ \bar{z}_2,\ \ldots,\ \bar{z}_n,$$

сопряженными соответственно с числами $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n$, получится комплексное число $\bar{u}$, сопряженное с числом u.

20. Доказать методом полной индукции формулу Муавра

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

где n — целое положительное число.

21. Доказать методом полной индукции неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \text{ где } n > 1.$$

22. Доказать методом полной индукции неравенство

$$\frac{4^n}{n+1} > \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \text{ где } n > 1.$$

23. Доказать, что если n — целое положительное четное число, то

$$20^n + 16^n - 3^n - 1$$

делится на 323.

Глава XIV

НЕОБХОДИМОСТЬ И ДОСТАТОЧНОСТЬ

Понятие необходимого признака (или условия) и понятие достаточного признака (или условия) являются важнейшими в формулировках многочисленных положений математики. Непонимание этих логических категорий приводит часто к тому, что и само утверждение теоремы и ее доказательство воспринимаются учащимися недостаточно глубоко. Разъясним на примерах, что такое необходимый и что такое достаточный признак (или условие) какого-нибудь положения.

Необходимым признаком какого-либо положения A называется любое следствие из этого положения.* Итак, если $A \to B$ (читается так: «из A следует B»), то B — необходимый признак A.

Достаточным признаком какого-либо положения A называется такое положение B, из которого следует A. Итак, если $A \leftarrow B$ (читается так: «из B следует A, или A следует из B»)**, то B — достаточный признак A.

Ниже эти два фундаментальных понятия разъясняются на примерах.

Пример 1. Необходимым признаком делимости (нацело) целого положительного числа на 4, является делимость (нацело) последней цифры этого числа на 2.

Высказанное положение надо понимать так: если целое положительное число делится на 4 (положение A), то последняя цифра этого числа делится (нацело) на 2 (положение B) — это, очевидно, верно.

Высказанный необходимый признак делимости на 4 не является достаточным, ибо если последняя цифра целого положительного числа делится на 2, то это число не обязательно разделится на 4.

Таким образом, положение «признак делимости целого положительного числа на 4 есть условие делимости последней цифры этого числа на 2» верно в том случае, если под словом «признак» понимать «необходимый признак», и неверно, если под словом «признак» понимать «достаточный признак».

Пример 2. Достаточным признаком делимости*** целого положительного числа на 4 (положение A) является следующий признак: число оканчивается двумя нулями (положение B).

Высказанное утверждение надо понимать так: если число оканчивается двумя нулями (положение B), то оно делится на 4 (положение A), и это, очевидно, верно.

Вместе с тем указанный достаточный признак делимости целого числа на 4 не является необходимым, так как если целое положительное число делится на 4, то отсюда не следует, что оно оканчивается двумя нулями.

Положение «признаком делимости целого числа на 4 является то, что это число оканчивается двумя нулями» верно, если под словом «признак» понимать

---

* Буквой A мы, таким образом, обозначаем то или иное положение.

** Можно писать и так: $B \to A$ (читается так: «A следует из B» или «из B следует A»).

*** Здесь и везде в дальнейшем под словом «делимость» мы будем понимать делимость нацело, т. е. без остатка.

«достаточный признак», и неверно, если под словом «признак» понимать «необходимый признак».

Пример 3. Необходимым и достаточным признаком делимости целого положительного числа на 4 является следующий признак: число, образуемое двумя последними цифрами рассматриваемого числа, делится на 4. Необходимость здесь заключается в том, что если целое положительное число делится на 4 (положение A), то число, образуемое его двумя последними цифрами, делится на 4 (следствие B).

Достаточность заключается в том, что если число, образуемое двумя последними цифрами, делится на 4, то и само число делится на 4.

Пример 4. Необходимым условием несовместности системы уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1,\ a_2x + b_2y = c_2$$

является условие $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Это надо понимать так: если данная система несовместна (положение A), то

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ (положение } B\text{)}.$$

Однако высказанное необходимое условие несовместимости не является достаточным.

Например, для системы уравнений

$$x + y + 1 = 0,\quad x + y + 1 = 0,$$

$a_1b_2 - a_2b_1 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$ (положение A), однако эта система совместна, так как, например, $x = -1$, $y = 0$ является решением.

Пример 5. Достаточным условием несовместимости системы уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1,\quad a_2x + b_2y = c_2$$

является условие: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$. Это надо понимать так: если $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$ (положение B), то система уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1,\quad a_2x + b_2y = c_2$$

несовместна (положение A). Это верно, так как если $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$, то уже уравнение

$$a_1x + b_1y = c_1$$

не имеет ни одного решения.

Вместе с тем сформулированный достаточный признак несовместности системы вовсе не является необходимым, т. е. из несовместности системы

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

не следует, что $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$.

Например, система уравнений

$$x + y = 1,\quad x + y = 2$$

несовместна, однако, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Пример 6. Достаточным условием неопределенности системы уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2$$

является условие

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\text{*}.$$

---

* Мы говорим «условие», а не «условия», понимая под «условием» совокупность двух равенств.

Иначе говоря, если выполнены равенства

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

то данная система неопределенная, т. е. имеет бесконечное множество решений (докажите!).

Обратное, однако, неверно, т. е. условие

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

не является необходимым признаком неопределенности системы. Так, например, система уравнений

$$x+2y=0,$$
$$x+2y=0$$

неопределенная (имеет бесконечное множество решений); однако для этой системы соотношения

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

в целом не выполнены $\left(c_1=c_2=0\right.$, поэтому дробь $\frac{c_1}{c_2}$ не имеет смысла$\left.\right)$.

Пример 7. Для того чтобы из отрезков a, b, c можно было построить треугольник, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$a+b>c.$$

В самом деле, если из отрезков a, b, c можно построить треугольник (положение A), то условие $a+b>c$ будет выполнено (положение B), так как сумма двух сторон треугольника больше третьей. Однако условие $a+b>c$ недостаточно для того, чтобы из отрезков a, b, c можно было построить треугольник. Например, если $a=17$, $b=2$, $c=3$, то $a+b>c$, однако не существует треугольника со сторонами 17, 2 и 3 (почему?).

Пример 8. Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы квадрат одной из его сторон был равен сумме квадратов двух других сторон.

Необходимость признака заключается в том, что если треугольник прямоугольный (положение A), то квадрат одной из его сторон (гипотенузы) равен сумме квадратов двух других сторон (катетов) (положение B) — это теорема Пифагора.

Достаточность признака заключается в том, что если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный. Эта теорема обратна теореме Пифагора (она тоже, конечно, верна). Отмечу, что на вопрос: «стороны треугольника равны 3, 4, 5; на основании какой теоремы можно утверждать, что этот треугольник прямоугольный?» — некоторые отвечают так: «на основании теоремы Пифагора», путая, таким образом, достаточный признак с необходимым. Ведь теорема Пифагора относится к прямоугольному треугольнику (см. выше «необходимость»); как же можно утверждать, что треугольник прямоугольный на основании теоремы, которая устанавливает некоторое свойство (а именно $a^2+b^2=c^2$) прямоугольного треугольника. Это нелогично. Треугольник со сторонами 3, 4, 5 прямоугольный не на основании теоремы Пифагора, а на основании теоремы, обратной для теоремы Пифагора (см. выше «достаточность» признака).

Верны ли следующие положения?

1. Если B есть необходимый признак A, то будет ли A достаточным признаком B?
2. Если B есть достаточный признак A, то будет ли A необходимым признаком B?

3. Если A есть необходимый признак B, то будет ли A достаточным признаком B?
4. Если A есть достаточный признак B, то будет ли B необходимым признаком A?
5. B — необходимый признак A, а C — необходимый признак B. Будет ли C необходимым признаком A?

Указать, какие из перечисленных ниже признаков делимости являются необходимыми, какие достаточными, а какие необходимыми и достаточными.

6. Признак делимости числа * на 7: все цифры равны 7 (например, 777).
7. Признак делимости на 5: число оканчивается на 5.
8. Признак делимости четного числа на 5: число оканчивается цифрой 0.
9. Признак делимости на 8: число делится на 4 и на 2.
10. Признак делимости на 27: сумма цифр числа делится на 9.
11. Признак делимости на 2: число оканчивается или на 2, или на 6, или на 8.
12. Признак делимости на 5: последняя цифра делится на 5.
13. Каково необходимое и достаточное условие несовместности системы уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

14. Каково необходимое и достаточное условие неопределенности этой системы?
15. Будет ли условие ** $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ достаточным для того, чтобы из отрезков a, b, c можно было построить треугольник?
16. Каково необходимое и достаточное условие того, что из отрезков a, b, c можно построить треугольник?

В задачах 17—27 приводится список различных теорем; читателю предлагается установить, какое из выражений «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»; надо поместить на место многоточия.

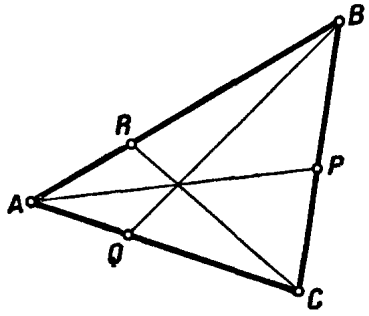
17. Для того чтобы сумма двух целых положительных чисел делилась на 2 ... ..., чтобы каждое слагаемое делилось на 2.
18. Для того чтобы многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ делился на $(x-a)^2$..., чтобы a было корнем этого многочлена.
19. Для того чтобы многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ делился на $(x-\alpha)(x-\beta)$..., чтобы α и β были корнями этого многочлена.
20. Для того чтобы целое число делилось на 100 ..., чтобы это число делилось на 10.
21. Для того чтобы целое число делилось на 100 ..., чтобы это число делилось на 1000.
22. Для того чтобы было выполнено неравенство $\sin x > 0$ ..., чтобы были выполнены неравенства $0 < x < \pi$.
23. Для того чтобы было выполнено неравенство $\frac{1}{x} < 1$ ..., чтобы $x > 1$.
24. Для того чтобы было выполнено неравенство $\frac{1}{x} < 1$ ..., чтобы было или $x < 0$, или $x > 1$.
25. Для того, чтобы два треугольника были равны ..., чтобы две стороны и угол, противолежащий одной из них в одном треугольнике, равнялись соответственно двум сторонам и углу, противолежащему одной из них в другом треугольнике.

---

* В последующих вопросах под словом «число» понимается «целое положительное число».

** Условие заключается, таким образом, в одновременном выполнении всех трех неравенств.

26. Для того чтобы отрезок PQ лежал внутри треугольника $ABC\ldots$, чтобы середина отрезка PQ лежала внутри этого треугольника ABC.



Черт. 1.

27. Для того чтобы прямые AP, BQ, CR (черт. 1) пересекались в одной точке, лежащей внутри треугольника ABC, ..., чтобы

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1,$$

где P, Q, R — соответственно точки, лежащие на отрезках BC, CA и AB.

Глава XV

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Решить в целых числах уравнение

$$xy = x + y.$$

2. Решить в целых положительных числах следующие системы уравнений:

а) $x^2 + y = y^2 + x = 42$;
б) $x^2 + y = y^2 + x = 17$;
в) $x^2 + y = 67$, $y^2 + x = 21$;
г) $x^2 + y = 294$, $y^2 + x = 42$;
д) $x^2 + y = 92$, $y^2 + x = 130$.

3. Решить в целых числах уравнение

$$2xy + 3y^2 = 24.$$

4. Решить в целых числах уравнение

$$3^x - 2^y = 1.$$

5. Найти все положительные действительные, а также все положительные рациональные решения уравнения

$$x^y = y^x.$$

6. Найти целые числа x, y, z и u такие, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu.$$

7. Доказать, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

для целых x, y и z верно только при

$$x = y = z = 0.$$

8. Доказать, что при любых значениях x и y выражение

$$(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$$

есть точный квадрат.

9. Доказать неразрешимость в целых числах уравнения

$$x^2 - y^2 = 2xyz.$$

Случай $x = \pm y$, $z = 0$ исключается.

10. Решить в целых положительных числах уравнение

$$(x + y) = (x - y)^2.$$

11. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

не имеет целых положительных решений.

12. Решить в целых числах уравнение

$$2^x + 1 = y^z.$$

13. Решить в целых положительных числах уравнение

$$8x^2 - y^2 + 8x - 3y + 6 = 0.$$

14. Доказать, что уравнение

$$x^3 + y^3 + 6xyz = 9z^2$$

не решается в целых числах (решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ исключается).

15. Решить в целых числах уравнение

$$(x + y)^2 - (x + y) - 2x = 150.$$

16. Доказать, что уравнение

$$x^2 - 3y^2 = 17$$

не имеет решений в целых числах.

17. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

18. Найти целые положительные решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

19. Найти двузначное число, которое равно сумме куба числа его десятков и квадрата числа его единиц.

20. Доказать, что уравнение

$$y^2 = 5x^2 + 6x + 15$$

не имеет целых решений.

21. Решить уравнение

$$3^x = 4y + 5$$

в целых числах.

22. Решить в целых положительных числах систему уравнений

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy + 4yz = 125,$$
$$x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4xy - 4yz = 75.$$

23. Найти два рациональных числа, сумма которых равнялась бы сумме их квадратов.

24. Найти все рациональные решения уравнения

$$9x^2 - y^2 + 7x - 3 = 0.$$

25. Найти все рациональные решения уравнения

$$2x^2 - 5x + 16 - y^2 = 0.$$

26. Найти все рациональные решения уравнения

$$y^2 = 3x^2 + 2x - 5.$$

27. Найти все целые положительные решения уравнения

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 100.$$

28. Найти все целые решения уравнения

$$2y^2 + 3xy + y^2 = 35.$$

29. Доказать, что $27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$ делится без остатка на 26 460.

30. Вывести признак делимости на 11.

31. Найти наименьшее число, которое при делении на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6 дает остатки, соответственно равные 1, 2, 3, 4, 5.

32. Доказать, что при любом целом значении a $a^3 - a$ делится на 3, $a^5 - a$ делится на 5, $a^7 - a$ делится на 7.

33. Доказать, что если p и q — простые числа, бо́льшие трех, то $p^2 - q^2$ делится на 24.

34. Найти все простые числа p, такие, чтобы $p + 10$ и $p + 14$ также были простыми числами.

35. Для каких значений n сумма ряда натуральных чисел от 1 до n делится на 99?

36. Доказать, что при нечетном n выражение $n^3 - n$ делится на 24.

37. Найти два трехзначных числа, сумма которых кратна 504, а частное кратно 6.

38. Найти два числа, произведение которых есть трехзначное число, являющееся точным кубом некоторого натурального числа, а частное от деления бо́льшего числа на меньшее — квадрат этого натурального числа.

39. Найти коэффициенты при $ab^2c^3d^4$, $abcd^7$ и c^5d^5 в разложении $(a - b + c - d)^{10}$.

40. Доказать, что если p и q — целые положительные числа, то число $(p+1)^{2q+1} + p^{q+2}$ делится на число $p^2 + p + 1$ (добавить и отнять $p^{2(2q+1)}$).

41. Доказать, что если $x^3 + y^3 = z^3$, где x, y и z — целые числа, то одно из чисел x, y или z должно делится на 3.

42. Доказать, что если $x^5 + y^5 = z^5$, где x, y, z — целые числа, то одно из них должно делиться на 5.

43. Доказать, что $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + (2n)^5$ делится на $2n + 1$.

44. Воспользовавшись равенством

$$1\,000\,009 = 1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2,$$

разложить 1 000 009 в произведение двух целых положительных множителей, каждый из которых отличен от 1.

45. Найти сумму парных произведений квадратов n первых натуральных чисел.

46. Доказать, что если имеется 100 целых положительных чисел, то из них всегда можно выбрать несколько (или может быть одно) таких, что их сумма разделится на 100.

47. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 199, 200, произвольно выбрали 101 число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

48. Найти значения k, при которых корни уравнения $x^4 - (3k+5)x^2 + (k+1)^2 = 0$ образуют арифметическую прогрессию.

49. Доказать, что если p и q — целые положительные числа и если $p^2 + q^2$ делится на 7, то каждое из чисел p и q также делится на 7.

50. Доказать, что выражение

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$

не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

51. Функция $f(x)$, определенная при всех действительных значениях x, удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ при любых значениях x и y;

б) существует такое положительное число c, что $f\left(\frac{c}{2}\right) = 0$ и $f(x) \neq 0$, если $0 < x < \frac{c}{2}$;

в) $f(0) > 0$.

Доказать, что тогда:

а) $f(0)=1$;

б) $f(x)=f(-x)$;

в) $f(c)=-f(0)=-1$;

г) $f(x+c)=-f(x)$;

д) $f(x+2c)=f(x)$;

е) $f(2c)=1$;

ж) $|f(x)|\leqslant 1$.

Доказать, что данному функциональному уравнению удовлетворяет только функция $f(x)=\cos x$ $(c=\pi)$.

52. Найти $f(n)$ (n — натуральное число), если

$$n^{f(n)-1}=(n-1)^{f(n-1)}.$$

53. Найти непрерывную функцию $f(x)$, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$af(x+1)-bf(x)=cx+d,$$

где a, b, c, d — данные числа, $f(0)=n$ и на интервале от 0 до 1 функция $f(x)$ линейная.

54. Решить функциональное уравнение

$$[f(x)]^2=f(2x)+c,$$

где c — постоянная величина.

55. Решить функциональное уравнение

$$f(x)=\cos\frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, причем $f(0)=1$.

56. Найти непрерывную функцию $f(x)$, такую, что

$$f(x)+\frac{1}{\sin x}=f\left(\frac{x}{2}\right),\quad f(x)-\frac{1}{\sin x}=f\left(\frac{x+\pi}{2}\right).$$

57. Функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

а) при $x>0$, $f(x)>0$;

б) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Найти эту функцию.

58. Доказать, что если при любом значении x и постоянном a имеет место равенство

$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

то $f(x)$ — периодическая функция.

59. Произвести указанные действия:

а) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$;

б) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$;

в) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

г) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$;

д) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

60. Вычислить

а) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

б) $(a+b\omega+c\omega^2)^3(a+b\omega^2+c\omega)^3$;

в) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$,

где

$$\omega=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

61. Решить уравнение

$$x^4+px^2+q=0$$

в случае, если

$$\frac{p^2}{4}-q<0.$$

62. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) -1; б) i; в) $-i$; г) $-1-i\sqrt{3}$; д) $1-i\sqrt{3}$; е) $\sqrt{3}-i$.

63. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $3+2i$; б) $3-2i$; в) $-3+2i$; г) $-3-2i$.

64. Найти геометрическое место точек z*, для которых

а) $|z|=1$; б) $\arg z=\frac{\pi}{2}$ **.

65. Найти геометрическое место точек z, для которых

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a,$$

где z_1 и z_2 — данные комплексные числа ($z_1\neq z_2$) и a — данное положительное число, не равное 1.

66. Вычислить

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n.$$

67. Извлечь корни

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[3]{2-3i}$; в) $\sqrt[4]{-4}$; г) $\sqrt[6]{1}$; д) $\sqrt[6]{-27}$.

68. Извлечь корень

$$\sqrt[7]{3+2i}.$$

69. Найти все комплексные числа, для которых

$$\bar{z}=z^{n-1},$$

где $\bar{z}$ — число, сопряженное с z, а n — целое положительное число.

70. Решить уравнения:

а) $(z+1)^m-(z-1)^m=0$;

б) $(z+i)^m-(z-i)^m=0$;

в) $z^n-naz^{n-1}-C_n^2a^2z^{n-2}-\ldots-a^n=0$.

71. Три последовательные вершины параллелограмма находятся в точках z_1, z_2, z_3. Найти число, определяющее положение четвертой вершины.

72. Найти середину отрезка, концы которого z_1 и z_2.

---

* Выражение «точка z» означает «точка с координатами x, y» ($z=x+iy$, x и y — действительные числа)

** $\arg z$ — аргумент z.

73. Точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — вершины выпуклого многоугольника. Найти геометрическое место точек

$$z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_n z_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — действительные положительные числа и

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

74. Как изменяется аргумент произведения $z(z-1)$, если точка z описывает против часовой стрелки замкнутую линию, содержащую внутри себя точки 0 и 1.

75. Даны два комплексных числа: z_1 и z_2.
Доказать, что два треугольника, вершины которых соответственно

$$0, \quad 1, \quad z_1$$

и

$$0, \quad z_2, \quad z_1 z_2,$$

подобны и одинаково ориентированы (т. е. обход вершин обоих треугольников в указанном их порядке совершается в одинаковом направлении).

76. Доказать, что треугольники с вершинами

$$0, \quad 1, \quad z_2,$$
$$0, \quad z_1, \quad \frac{z_1}{z_2}$$

подобны и одинаково ориентированы.

77. Рассмотрим тождество

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) = (ac + bd)(a'c' + b'd') - (ac' + bd')(a'c + b'd).$$

Положим в этом тождестве

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta i, \\ b &= \gamma + \delta i, \\ c &= \alpha' + \beta' i, \\ d &= \gamma' + \delta' i, \\ a' &= -\gamma + \delta i, \\ b' &= \alpha - \beta i, \\ c' &= -\gamma' + \delta' i, \\ d' &= \alpha' - \beta' i. \end{aligned}$$

Доказать, что произведение суммы четырех квадратов на сумму четырех квадратов может быть представлено в виде суммы четырех квадратов.

78. Доказать то же положение, исходя из тождества

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-d} = \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}\right) + \left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a-d}\right).$$

Отсюда

$$(b-d)(a-c) = (b-c)(a-d) + (c-d)(a-b).$$

Положить затем

$$a = \frac{p+iq}{r+is}, \quad c = \frac{p'+iq'}{r'+is'}, \quad c = \frac{-r+si}{p-qi}, \quad d = \frac{-r'+s'i}{p'-q'i}.$$

79. Какое преобразование (геометрическое) определяется равенством

$$z' = \frac{1}{z}.$$

80. Какую линию описывает точка

$$z = \frac{a + b\lambda + i(a' + b'\lambda)}{c + d\lambda + i(c' + d'\lambda)},$$

где a, b, c, d, a', b', c', d' — данные действительные числа, а λ — принимает все действительные значения?

81. В выражении

$$x + y(\cos\theta + i\sin\theta)$$

полагают

$$x = \frac{x'\sin(\theta - \alpha) + y'\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}, \quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\theta}.$$

Доказать, что результат можно представить в виде

$$[x' + y'(\cos\theta' + i\sin\theta')](\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

где $\theta' = \alpha' - \alpha$.

82. Пусть

$$z' = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

причем $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Доказать, что это преобразование — окружность радиуса 1, с центром в начале координат, переводит в себя.

83. Найти наименьшее значение выражения $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 3y - 5$. При каких значениях x и y это выражение принимает наименьшее значение?

84. Дано равенство $A = a^2 + an$, где A и a — целые положительные числа и $0 < n \leqslant 2$. Доказать, что a — приближенное значение корня квадратного из A, вычисленное с точностью до 1 (с недостатком). Воспользовавшись доказанным, найти два последовательных целых числа, зная, что разность их кубов равна 27 361.

85. На весах производится взвешивание в целых килограммах и при этом допускается класть гири на обе чашки весов. Доказать, что достаточно только n гирь для взвешивания любого веса до $\frac{3^n - 1}{2}$ *кг* включительно. Найти расположение гирь при взвешивании 421 *кг*.

86. Сосуд в 10 *л* наполнен вином. Требуется разделить это вино поровну на 2 части, имея под руками два пустых сосуда емкостью 7 и 3 *л*.

87. Пользуясь только одной масштабной линейкой, определить объем обыкновенной бутылки, которую можно частично заполнять водой.

88. Определить в форме неравенств, содержащих рациональные функции от a, b, c и λ, необходимые и достаточные условия всех расположений числа λ относительно корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $b^2 - 4ac > 0$ (a, b, c, λ — действительные числа).

89. Двенадцать полей расположены по кругу; на четырех соседних полях стоят четыре разноцветные фишки: красная, желтая, зеленая и синяя. Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре поля на пятое (если оно свободно) в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки стали на те же поля. Как они могут при этом переставляться?

90. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чашки весов по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют одинаковый вес.

91. Доказать, что все числа вида 2^n при различных целых n (положительных) могут начинаться на любую наперед заданную комбинацию цифр.

92. Сколько нулей имеет на конце число 50!?

93. В каждый данный момент направление минутной стрелки часов зависит от направления часовой стрелки. Заменим в часах минутную стрелку часовой, а часовую минутной. Сколько раз в сутки часы после такой замены покажут «возможное» время, т. е. сколько раз направление минутной стрелки будет в точности соответствовать направлению часовой?

94. Какое из двух чисел больше,

$$999^{997} \text{ или } 997^{999}$$

(без применения таблиц)?

95. Даны два положительных числа: a и b. Составить из этих чисел рациональное выражение, величина которого положительна и которое меньше и a, и b.

96. Доказать, что если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, где $a>b>0$, то

$$(x-c)^2+y^2<4a^2.$$

97. Дано положительное рациональное число r, такое, что $r^2<2$. Найти рациональную функцию $f(x)$, такую, что $r_1=f(r)>0$ и $r_1^2<2$, причем $r_1>r$.

98. Обозначим через $M(a, b, c, \ldots, k)$ наименьшее общее кратное, а через $D(a, b, c, \ldots, k)$ — наибольший общий делитель чисел $a, b, c, \ldots, k$. Доказать, что

а) $M(a, b)D(a, b)=ab$;

б) $M(a, b, c)D(a, b)D(b, c)D(c, a)=abcD(a, b, c)$.

99. Найти все рациональные числа r, для которых $\cos(r\pi)$ есть число рациональное.

100. Доказать, что любое целое число рублей, большее 7 руб., можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством 3 руб. и 5 руб.

101. Имеется 80 одинаковых монет, причем только одна из них несколько легче остальных. Как определить эту монету посредством четырех взвешиваний на весах с двумя чашечками без гирь?

102. Два игрока по очереди кладут на стол пятикопеечные монеты. Выигравшим считается тот, кто положит монету последним. Как должен класть монету игрок, начинающий игру, чтобы обеспечить себе выигрыш? Стол имеет прямоугольную форму. Монеты можно класть только на свободные места, чтобы они не закрывали друг друга даже отчасти. Каждый из играющих имеет неограниченное количество монет. Сдвигать монеты с мест, на которые они положены, нельзя.

103. Найти последние шесть цифр числа 1001^n, где

$$n=1001^{22222}.$$

104. Определить три последние цифры числа

$$28^n\cdot 3^n\cdot 7^n+5^{3n}\cdot 13^n.$$

105. Имеется 555 гирь весом 1 *г*, 2 *г*, 3 *г*, ..., 555 *г*.
Разложить их на три равные по весу кучки.

106. Из пункта A в другой пункт можно попасть двумя способами:

а) выйти сразу и идти пешком;

б) вызвать машину и, подождав ее определенное время, ехать на ней.

В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что если конечный пункт отстоит на 1 *км*, то на дорогу понадобится 10 мин., если на 2 *км*, то 15 мин., а если на 3 *км*, то $16\frac{1}{2}$ мин. Скорость пешехода и машины, а также время ожидания машины принимаются постоянными. Сколько времени понадобится для достижения пункта, отстоящего от A на 6 *км*?

107. Числа 1, 2, 3, ..., 101 написаны в ряд в каком-то порядке. Доказать, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая).

108. Определить число целых неотрицательных решений уравнения

$$E\left(\frac{x}{a}\right)=E\left(\frac{x}{a-1}\right),$$

где a — целое число, большее 1,
($E(x)$ — наибольшее целое число, меньшее числа x или равное ему).

109. При каком наименьшем натуральном показателе имеет место неравенство

$$99^n+100^n<101^n.$$

110. Найти две последние цифры числа 7^{9^9}.

111. Доказать, что число

$$(10^n+10^{n-1}+\ldots+1)(10^{n+1}+5)+1$$

есть точный квадрат.

112. Найти последнюю цифру числа

$$2^{2^n}+1,$$

где n — натуральное число $\geqslant 2$.

113. Дано: m — действительное число, n — натуральное число, не делящееся на квадрат натурального числа, большего 1, причем $\sqrt{n}\leqslant m$. Доказать, что существует единственное натуральное число x, удовлетворяющее условию

$$m-\sqrt{n}<\sqrt{x}\leqslant m.$$

114. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|,$$

где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — данные числа, расположенные в возрастающем порядке: $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$.

115. Отрезок AB делится на три равные части: $AC=CD=DB$, и отрезок CD удаляется из отрезка AB. Каждая из оставшихся частей (AC и DB) снова делится на три равные части:

$$AP=PQ=QC \quad \text{и} \quad DR=RS=SB,$$

и средние части PQ и RS снова удаляются и т. д.
Доказать, что на отрезке AB найдутся такие точки, которые не будут удалены, сколько бы раз мы ни повторили эту операцию удаления частей.

116. Доказать, что любая пара целых чисел x и y, получающихся из формулы

$$x+y\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n$$
$$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots),$$

удовлетворяет уравнению (Пелля)

$$x^2-5y^2=1,$$

и обратно, все целые решения уравнения $x^2-5y^2=1$ получаются таким же образом.

117. Найти наибольшее значение функции

$$\sin x+\sin y+\sin(x+y).$$

118. Доказать, что если $\frac{m}{n}$ — приближенное значение $\sqrt[3]{2}$ (m и n — целые положительные числа), то $\frac{m^2+mn+2n^2}{m^2+mn+n^2}$ является лучшим приближением. Доказать также, что если одно из этих приближений по недостатку, то другое — по избытку.

119. Определить максимум функции

$$\sin^2(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x-y)\cos(x+y),$$

если

$$\sin^2 x+\sin^2 y=m.$$

120. При каком условии выражение $x^2+y^2+z^2+t^2$ имеет минимум, если переменные x, y, z, t удовлетворяют равенству

$$mx+ny+pz+qt=A,$$

где m, n, p, q, A — данные числа.

121. Доказать, что выражение

$$2x^2+3x^2+6z^2$$

можно представить в виде суммы трех квадратов линейных функций от x, y и z с целыми коэффициентами.

122. Найти все значения k, при которых уравнение

$$kA_x^3=C_{x-1}^4$$

имеет решение.

123. Сколько корней (действительных) имеет уравнение

$$2^x=x+3.$$

Вычислить их (без таблиц) с точностью до 0,1.

124. Доказать, что

$$[\pi]^{[e]}+[e]=[e]^{[\pi]}+[\pi]$$

($[x]$ — наибольшее целое число, меньшее или равное x; $\pi\sim 3{,}14159\ldots$ $e=2{,}71828\ldots$).

125. Доказать, что функции $y=\sin x$ и $y=e^x$ трансцендентные, т. е. не могут удовлетворять уравнению вида

$$a_0(x)\,y^n+a_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_n(x)=0,$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$ — целые рациональные функции от x, причем функция $a_0(x)$ тождественно не равна нулю.

126. Доказать, что при $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\cos\sin\varphi>\sin\cos\varphi$.

127. Доказать, что наибольшие значения выражений

$$(\lg_5 6)^{\sin x} \quad\text{и}\quad (\lg_6 5)^{\cos x}$$

равны между собой.

128. Доказать, что если a, b, c — стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)\,x+c^2=0$$

будут мнимые.

129. Найти наименьшее значение функций

1) $\dfrac{a^m+x^m}{2}-\left(\dfrac{a+x}{2}\right)^m$;

2) $\dfrac{a^m+b^m+x^m}{3}-\left(\dfrac{a+b+x}{3}\right)^m$,

причем $a>0$, $b>0$, $m>1$ и функции рассматриваются лишь при $x>0$.

130. Четырехзначное число $aabb$ — точный квадрат (a и b — цифры); найти это число.

131. Будем обозначать через $M(a, b)$ общее наименьшее кратное двух чисел: a и b, а через $D(a, b)$ — их общий наибольший делитель.
Доказать, что

$$M(a, b, c)\,D(a, b)\,D\left(\frac{ab}{D(a, b)}, c\right) = abc.$$

132. Доказать, что уравнение

$$C_x^n + C_y^n = C_z^n$$

имеет решения (целые положительные) при любом n.

133. Доказать, что уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} y = 1$$

при любом целом положительном n имеет относительно x и y одно и только одно решение в целых числах.

134. Доказать, что числа

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{nk+1}$$

не целые.

135. Из тридцати пунктов: A_1, A_2, A_3, ..., A_{30}, расположенных на прямой MN на равных расстояниях друг от друга, выходят тридцать прямых дорог. Дороги располагаются по одну сторону от прямой MN и образуют с ней углы, указанные в таблице:

N — начального пункта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
угол дороги с прямой MN	60°	30°	15°	20°	155°	45°	10°	35°	140°	30°	125°	65°	85°	86°	80°

N — начального пункта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
угол дороги с прямой MN	75°	78°	115°	95°	25°	28°	158°	30°	25°	5°	15°	160°	170°	20°	158°

Из всех тридцати пунктов выезжают одновременно тридцать автомобилей, едущих, никуда не сворачивая, по этим дорогам с постоянной скоростью. На каждом из перекрестков установлено по шлагбауму. Как только первая по времени машина проезжает перекресток, шлагбаум закрывается и преграждает путь всем следующим машинам, попадающим на этот перекресток. Какие из машин проедут все перекрестки на своем пути, а какие застрянут? Изменится ли ответ, если не предполагать равными расстояния между двумя последовательными пунктами?

136. Какому условию должно удовлетворять комплексное число $a + bi$ для того, чтобы его можно было представить в виде

$$a + bi = \frac{1 - ix}{1 + ix},$$

где x — действительное число.

137. Определить значения коэффициентов a и b, при которых многочлен

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$$

является точным квадратом.

138. Найти все действительные значения p, при которых система уравнений

$$x^2 - y^2 = 1, \quad y = px + q$$

имеет действительные решения при любом действительном значении q.

139. Доказать, что если одно уравнение с двумя неизвестными

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

где a, b, c — действительные числа, не равные нулю одновременно, имеет только одно действительное решение, т. е. существует только одна пара действительных чисел x и y, удовлетворяющих этому уравнению, то

$$b^2 - 4ac < 0.$$

140. Найти число неподобных между собой членов разложения

$$(a + b + c)^n.$$

141. Пусть x, y, z — три целых положительных числа; p — наименьшее кратное чисел y и z, q — наименьшее кратное чисел z и x, r — наименьшее кратное чисел x и y. Пусть P, Q, R — наибольшие общие делители тех же пар чисел. Доказать, что

$$(xyz)^2 = pqrPQR.$$

142. Найти сумму

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ цифр}},$$

содержащую n слагаемых.

143. Найти коэффициент при a^4c^3 в разложении

$$(a - b - c)^7.$$

144. Найти все значения m, при которых система уравнений

$$x - y = m(1 + xy), \quad 2 + x + y + xy = 0$$

имеет действительные решения.

145. Решить графически уравнение

$$\sqrt[5]{x} = x + 0{,}2$$

(требуется определить число действительных корней и найти их с точностью до 0,1).

146. Доказать, что если числа a, b, c, ... положительны, ни одно из них не равно 1 и они составляют геометрическую прогрессию, то числа

$$\frac{1}{\lg_a N}, \quad \frac{1}{\lg_b N}, \quad \frac{1}{\lg_c N}, \quad \ldots,$$

где N — любое положительное число, не равное 1, составляют арифметическую прогрессию.

147. Найти, при каких значениях k решение системы

$$x + ky = 3, \quad kx + 4y = 6$$

удовлетворяет неравенствам

$$x > 1, \quad y > 0.$$

148. Найти все корни уравнения

$$\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^4 = i.$$

149. Найти все рациональные значения x, при которых выражение $\sqrt{x^2 - x + 1}$ будет рациональным числом.

150. При каких значениях a и b функция

$$y = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$$

не зависит от x.

151. 1°. Исследовать систему уравнений

$$(m^2 - 3m + 3)x + 2(m - 2)y = 4(m - 1)^2, \quad (1)$$

$$m^2x + 2(2m - 3)y = 2(3m^2 - 2m + 3). \quad (2)$$

2°. Найти зависимость между x и y для любого решения системы (1), (2), не зависящую от m.

3°. Доказать, что уравнение (1) при всех значениях m имеет одно и то же решение; найти это решение; тот же вопрос по отношению к уравнению (2).

152. Доказать, что

$$C_k^2 + C_{C_k^2}^2 = C_{C_k^2+1}^2.$$

153. Решить систему уравнений

$$\frac{y+z}{1-yz} = a, \quad \frac{z+x}{1-xz} = b, \quad \frac{x+y}{1-xy} = c.$$

154. Дано уравнение

$$\sqrt{x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}, \quad (1)$$

в котором x — неизвестное, a и b — положительные константы, причем $a > b$; для радикалов берутся арифметические значения.

1°. Решить уравнение (1); исследовать в зависимости от параметра b, считая фиксированным a.

2°. Предполагаем, что условие, при котором уравнение (1) имеет корень, выполнено; доказать, что числа

$$a + b + \sqrt{5}(a - b)$$

и

$$a + b - \sqrt{5}(a - b)$$

положительны, которые мы, следовательно, можем обозначить через u^2 и v^2, где u и v — положительные числа. Установить затем, что если x_0 — корень уравнения (1), то x_0, $a - x_0$, $b - x_0$ — квадраты линейных функций относительно u и v. Какие значения при этом принимают радикалы $\sqrt{a-x_0}$, $\sqrt{b-x_0}$ и $\sqrt{x_0}$? Проверить еще раз выполнимость уравнения (1).

155. Поезд идет из Москвы в Ленинград. В поезде едут пассажиры: Иванов, Петров и Сидоров. В поездной бригаде такие же фамилии имеют машинист, кочегар и кондуктор. Известно, что:

а) пассажир Иванов живет в Москве;

б) кондуктор живет на полпути между Ленинградом и Москвой;

в) пассажир, однофамилец кондуктора, живет в Ленинграде;

г) ближайший по месту проживания сосед кондуктора (пассажир) зарабатывает в год ровно втрое больше кондуктора;

д) пассажир Петров зарабатывает в год 20 000 руб.;

е) Сидоров из бригады выиграл у кочегара партию на биллиарде.

Как фамилия машиниста?

156. В финальном шахматном турнире воинского соединения встретились 8 шахматистов, имевших следующие звания: полковник, майор, капитан, лейтенант, старшина, сержант, ефрейтор и рядовой. Среди них были: пехотинец, летчик, танкист, артиллерист, минометчик, сапер, связист и кавалерист.

В первом туре полковник играл с летчиком, майор — с танкистом, сержант — с пехотинцем и старшина — с кавалеристом. После первого тура рядовой выбыл из турнира. Из-за этого выходными оказались: во II туре — минометчик, в III туре — капитан, в IV туре — сапер, в V туре — лейтенант, в VI туре — танкист, в VII туре — связист. Во II туре полковник играл с артиллеристом, пехотинец — с танкистом, лейтенант — с сержантом. В III туре ефрейтор выиграл у кавалериста, а партии полковника с сапером и майора с минометчиком окончились вничью. Какую воинскую специальность имел каждый?

157. В купе одного из вагонов Москва — Одесса ехали: москвич, ленинградец, туляк, киевлянин, харьковчанин и одессит. Их фамилии начинались буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е*. В дороге выяснилось, что *А* и москвич — врачи, *Д* и ленинградец — учителя, а туляк и *В* — инженеры. Киевлянин, *Б* и *Е* — участники Отечественной войны, а туляк в армии совсем не служил. Харьковчанин старше *А*, одессит старше *В*, а *Е* — самый молодой. *Б* и москвич сошли в Киеве, а *В* и харьковчанин — в Виннице. Определить начальную букву фамилии и профессию каждого из этих пассажиров.

158. Десять мальчиков: Александр, Борис, Василий, Георгий, Дмитрий, Евгений, Захар, Иван, Кирилл и Леонид учатся все в разных классах одной средней школы.

а) Старший брат Дмитрия оканчивает семилетку, а младший брат Евгения учится в V классе.
Александр старше Кирилла на один класс, а Леонид старше Евгения на два класса.

б) Василий не оканчивает школу в этом году, Иван при окончании III класса получил похвальную грамоту, Борис — пионервожатый в V классе, а Василий — в IV.

в) Александр, Кирилл и шестиклассник начали сдавать нормы на значок БГТО, а Борис, Евгений и восьмиклассник уже получили значки ГТО.

г) Александр и семиклассник живут на улице Ленина, Георгий и пятиклассник — на улице Куйбышева, первоклассник и восьмиклассник — на Садовой, а Кирилл и десятиклассник — в переулке Буденного.

д) Борис помогает отстающему Евгению, Иван получает помощь от Дмитрия, Александр — от Георгия.
В каком классе учится каждый из них?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

*

РАЗДЕЛ I

ПЛАНИМЕТРИЯ

В целом ряде вопросов геометрии удобно длинам направленных отрезков, расположенных на одной и той же прямой, приписывать знак; этим часто достигается общность рассуждений, независимость их от частного расположения точек, прямых, окружностей в рассматриваемой фигуре.

Для того чтобы направленному отрезку, лежащему на прямой, приписать знак, прямой придают положительное направление (говорят также, что прямую ориентируют), и тогда длина отрезка, лежащего на этой прямой, считается положительной, если его направление совпадает с положительным направлением прямой, и отрицательной — в противном случае. Длину отрезка AB, которому приписан знак, будем обозначать так: $\overline{AB}$. В тех случаях, когда безразлично, какое из двух возможных направлений на прямой принимается за положительное, в условии задачи (или в решении) об этом и не говорится.

В качестве примера рассмотрим определение степени точки M относительно окружности (O). Проведем через точку M произвольную прямую, пересекающую окружность в точках A и B; степенью точки M относительно окружности (O) называется число

$$\sigma = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$$

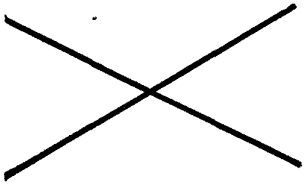
(при этом ориентация секущей роли не играет).

Отсюда сразу следует, что если точка M лежит вне окружности, то $\sigma > 0$, если внутри, то $\sigma < 0$ и т. д.

Чрезвычайно плодотворным в приложениях к доказательствам и к решениям задач является соотношение

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

для трех любых точек A, B и C, лежащих на одной прямой (теорема Шаля). Общность этого соотношения позволяет очень часто проводить рассуждения фактически, не опираясь на чертеж. Решениям задач по геометрии придается аналитический характер и при этом не теряется геометричность решения.



Черт. 2.

Близким к указанному вопросу является вопрос об измерении углов. Прежде всего следует заметить, что понятие «угол» мы будем применять в геометрии в различных аспектах:

а) *углы между двумя прямыми в элементарно геометрическом смысле этого слова*; при этом две прямые, если они пересекаются, образуют 4 угла, а если они при этом не взаимно перпендикулярны, то из этих четырех углов — два различных (один острый, другой тупой) (черт. 2). Заметим также, что под словом «угол» здесь и везде в дальнейшем мы часто будем понимать и его меру (величину);

б) *угол между двумя векторами*; это вполне определенный угол, величина которого изменяется от 0 до π (черт. 3).

Если векторы коллинеарны и направлены в одну сторону, то угол между ними будем считать равным нулю, а если в разные стороны, то равным π;

в) *ориентированный угол от неориентированной прямой a до неориентированной прямой b* — это угол, на который надо повернуть прямую a вокруг любой ее точки, чтобы она стала параллельной или совпала с прямой b. При этом повороты, совершаемые в каком-нибудь определенном направлении, мы будем считать положительными, а в противоположном — отрицательными. Углы при этом будем измерять соответственно положительными или отрицательными числами (на чертежах обычно за положительное направление вращения принимается вращение, совершаемое «против часовой стрелки»).

Черт. 3.

Угол от прямой a до прямой b в указанном смысле имеет бесконечное множество значений; если α — одно из значений этого угла, то все значения будут заключены в формуле

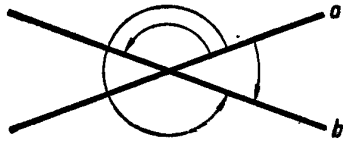
$$\varphi = \alpha + k\pi,$$

где k — любое целое число. Последнее соотношение мы часто будем записывать так:

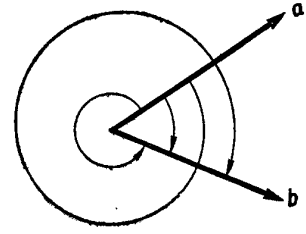
$$\varphi = \alpha \,(\mathrm{mod} \cdot \pi)$$

(читается так: «фи сравнимо с альфа по модулю пи») (черт. 4);

г) ориентированный угол от вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ или, что то же самое, от ориентированной прямой a до ориентированной прямой b — это угол, на который надо повернуть вектор $\bar{a}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\bar{b}$; при этом так же, как и выше, устанавливается соглашение



Черт. 4.



Черт. 5.

о положительных и отрицательных поворотах, а в соответствии с этим — о положительной и отрицательной мере угла. Если α — одно из значений угла от вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$, то все значения этого угла будут заключены в формуле

$$\varphi = \alpha + 2k\pi,$$

где k — любое целое число (черт. 5), или

$$\varphi = \alpha \,(\mathrm{mod} \cdot 2\pi).$$

Ориентированные углы подчиняются теореме Шаля

$$(a, b) + (b, c) = (a, c) \quad (\mathrm{mod} \cdot \pi)$$

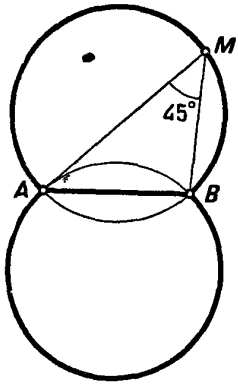
в случае, если прямые a, b, c — неориентированны, и

$$(a, b) + (b, c) = (a, c) \quad (\mathrm{mod} \cdot 2\pi)$$

в случае векторов (или ориентированных прямых).

Понятие ориентированного угла позволяет целому ряду вопросов и решениям придать более естественный характер, чем в случае, если пришлось бы рассматривать углы неориентированные.

Например, геометрическое место точек M, из которых данный отрезок AB виден под углом 45°, состоит из дуг двух окружностей; здесь угол рассматривается в смысле второго определения, т. е. как угол между векторами $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ (черт. 6). Геометрическое же место точек M таких, что угол от прямой MA до прямой MB (в смысле третьего определения) равен 45°, есть окружность (черт. 7).



Черт. 6.

Понятие ориентированного угла в сочетании с теоремой Шаля позволяет решать задачи по геометрии методами, близкими к аналитическим, без потери геометрического содержания. Подобные решения в достаточном числе представлены в решениях задач этого раздела, поэтому в общих указаниях ограничимся одним примером.

Пример. Пусть A', B', C' — точки, симметричные вершинам A, B, C треугольника ABC относительно произвольной точки плоскости. Доказать, что окружности $(AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$ пересекаются в точке окружности (ABC), а окружности $(A'BC)$, $(AB'C)$, (ABC') — в точке окружности $(A'B'C')$ (черт. 8).

Решение. Окружности (ABC) и $(AB'C')$ имеют общую точку A, значит они имеют еще одну общую точку P. Точки A, B, C, P лежат на одной окружности, значит

$$(PA, PB) = (CA, CB) \pmod{\cdot \pi}. \tag{1}$$

Аналогично — четыре точки A, B', C', P лежат на одной окружности, значит

$$(PA, PC') = (B'A, B'C'). \tag{2}$$

Вычитая почленно из равенства (2) равенство (1), получим

$$(PA, PB) - (PA, PC') = (CA, CB) - (B'A, B'C') \pmod{\cdot \pi},$$

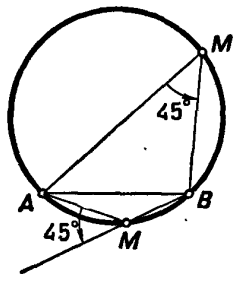
замечая, что $B'C' \parallel BC$, будем иметь

$$(PC', PB) = (CA, AB') \pmod{\cdot \pi}. \tag{3}$$

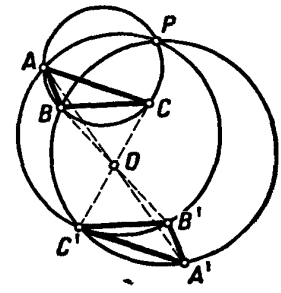
Но в силу симметрии, отрезки CA и $C'A'$ параллельны, так же как и AB' и $A'B$; значит равенство (3) можно записать так:

$$(PC', PB) = (A'C', A'B) \pmod{\cdot \pi}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что точки A', B, C', P лежат на одной окружности и значит точка P лежит на окружности $(BA'C')$. Аналогично доказывается, что точка P



Черт. 7.



Черт. 8.

лежит на окружности $(CA'B')$. Аналогично (в силу симметрии относительно точки O), если окружности $(AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$ пересекаются на окружности (ABC), то окружности $(A'BC)$, $(B'AC)$ и $(C'AB)$ пересекаются на окружности $(A'B'C')$.

Касаясь задач на отыскание геометрических мест точек, следует отметить, что в вопросах этого рода часто ограничиваются выводом лишь *необходимого* признака. Например, доказывается, что точка M лежит на той или иной фиксированной прямой или окружности. Отсюда, конечно, нельзя еще сделать вывода о том, что этим геометрическим местом является *вся* эта прямая или *вся* окружность. В этой главе имеется много задач, где геометрическим местом точек является *часть* прямой — *часть* окружности, состоящая из одной или нескольких ее дуг.

Таким образом, после получения необходимого признака (вроде: точка M лежит на окружности, точка M лежит на прямой и т. д.) следует провести рассуждения, устанавливающие, какие точки полученного, вообще говоря, более широкого множества удовлетворяют начальным условиям, определяющим то или иное геометрическое место точек. Задачи подобного рода (с решениями) даны в этом разделе, поэтому здесь примеров рассматривать не будем.

Необходимо отметить еще следующее: учащиеся часто считают, что геометрическое место точек должно быть линией; это ошибочное представление. Геометрическое место точек, определяемое тем или иным заданием, может быть частью плоскости или даже всей плоскостью. Так, например, геометрическое место точек M, таких, что

$$MA > MB,$$

где A и B — две различные точки плоскости, состоит из всех точек полуплоскости, расположенных по одну сторону от медиатрисы отрезка AB.

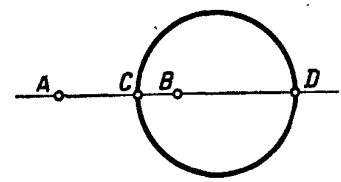
Геометрическое место точек M таких, что

$$MA < 2MB$$

состоит из всех точек плоскости, лежащих вне окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре, причем D и C — такие точки, что (черт. 9)

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = 2.$$

К подобного рода геометрическим местам приводят задачи, не обязательно связанные явно с геометрическими неравенствами. В тех случаях, когда на заданную точку M наложены достаточно общие условия, она может зачерчивать часть плоскости.



Черт. 9.

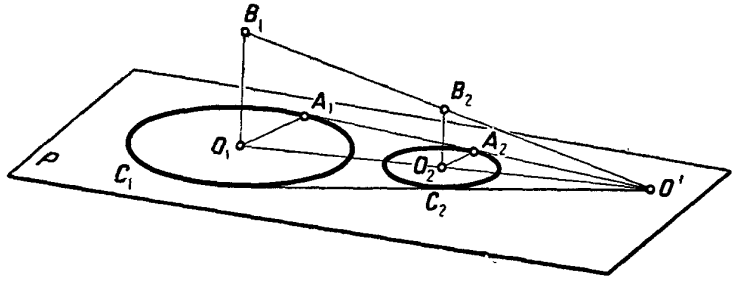
Трудно найти общий научный принцип, по которому следовало бы классифицировать задачи этого раздела. Мною они разделены так, как указано в предисловии: глава XVI — задачи на вычисление, глава XVII — задачи на доказательство, глава XVIII — геометрические места точек, глава XIX — задачи на построение. Однако и такая классификация не позволяет разделить собранные мною задачи по трем указанным разделам, так как ряд задач может быть решен как построением, так и вычислением с наличием в них вопросов «на доказательство». Такие задачи помещены в главе XX. Мы считаем, что синтез различных методов геометрии, примененных в одной задаче, будет способствовать более глубокому пониманию силы того или иного метода в геометрии. Наконец, в последнюю главу (XXI) этого раздела включены «разные» задачи, которые по своему характеру не могут быть отнесены ни к одной из первых глав планиметрии. При решении задач по планиметрии не следует ограничивать себя методами, обычно применяемыми в школе. Вполне допустимо приложение стереометрии к решению планиметрических задач, а также и тригонометрии. Этим достигается не только взаимосвязь многих разделов элементарной математики, но получается возможность сравнить силу того или иного метода.

Рассмотрим несколько примеров, показывающих применение к решению планиметрических задач перспективы, стереометрии, а также рассмотрим ряд

искусственных приемов; с применением к решению задач различных геометрических преобразований читатель познакомится в решениях ряда задач главы XV.

Пример 1. На плоскости заданы три окружности: C_1, C_2, C_3, из которых ни одна не лежит внутри другой. Доказать, что три точки, в каждой из которых пересекаются две внешние касательные, проведенные к паре окружностей, лежат на одной прямой.

Решение. Пусть p — плоскость, в которой расположены данные окружности. Сначала докажем, что если через центры O_1 и O_2 окружностей C_1 и C_2 провести лучи, перпендикулярные плоскости p и направленные в одну сторону, и отложить на этих лучах отрезки O_1B_1 и O_2B_2, равные соответственно радиусам r_1 и r_2 окружностей C_1 и C_2, то прямая B_1B_2 пройдет через точку плоскости p, в которой пересекаются внешние касательные к окружностям C_1 и C_2



Черт. 10.

(черт. 10); в самом деле, пусть O' — точка, в которой пересекаются внешние касательные к окружностям C_1 и C_2; так как точки O_1, O_2 и O' лежат на одной прямой, то треугольники O_1A_1O' и O_2A_2O' подобны, а потому

$$\frac{O_1O_2}{O_2O'} = \frac{r_1 - r_2}{r_2}.$$

Пусть O'' — точка, в которой прямая B_1B_2 пересекает прямую O_1O_2; тогда из подобия треугольников O_1B_1O'' и O_2B_2O'' находим

$$\frac{O_1O_2}{O_2O''} = \frac{r_1 - r_2}{r_2}.$$

Из полученных равенств находим $O_2O' = O_2O''$; следовательно, точки O' и O'' совпадают.

Теперь проведем через центры O_1, O_2, O_3 данных окружностей лучи, перпендикулярные плоскости p и направленные в одну сторону, и отложим на этих лучах отрезки O_1B_1, O_2B_2, O_3B_3, равные соответственно радиусам r_1, r_2 и r_3 данных окружностей (черт. 11). Тогда, по доказанному, три точки, в каждой из которых пересекается пара внешних касательных, проведенных к двум из данных окружностей, будут точками пересечения прямых B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 с плоскостью p.

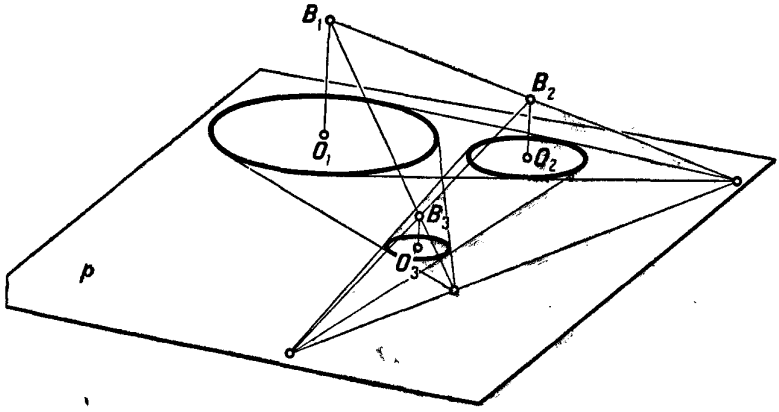
Эти точки лежат на одной прямой, по которой плоскость p пересекается плоскостью $B_1B_2B_3$.

Пример 2. Три круга расположены на плоскости так, что имеется часть плоскости, общая всем трем кругам. Доказать, что три хорды, общие этим кругам, взятым попарно, проходят через одну точку.

Решение. Рассмотрим три полусферы, граничными окружностями которых являются данные окружности. Полусферы расположены по одну сторону от плоскости p, на которой находятся данные окружности. Эти три полусферы имеют (и притом только одну) общую точку; хорда, общая каким-нибудь двум

окружностям, будет проекцией в плоскость p полуокружности, по которой пересекаются две полусферы, для которых эти окружности являются граничными (черт. 12).

На каждой из трех полуокружностей, по которым пересекаются рассматриваемые полусферы, взятые попарно, лежит точка, общая всем этим полу-



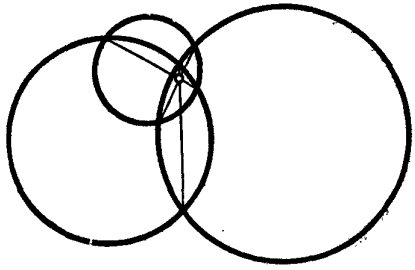
Черт. 11.

сферам, поэтому три хорды, общие данным окружностям, взятым попарно, проходят через одну точку, которая является проекцией на плоскость p точки, общей для трех построенных полусфер.

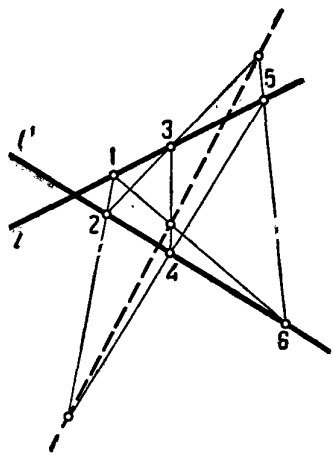
Пример 3. Пусть l и l' — две произвольные прямые плоскости. Возьмем на прямой l три произвольные точки: 1, 3, 5, а на прямой l' — точки 2, 4, 6; все точки отличны от точки пересечения прямых l и l'. Доказать, что три точки, в которых пересекаются прямые

16 и 34,
56 и 32,
54 и 12,

лежат на одной прямой (черт. 13).



Черт. 12.

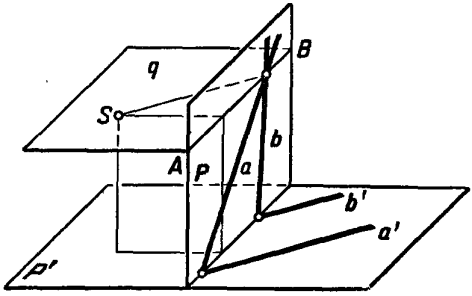


Черт. 13.

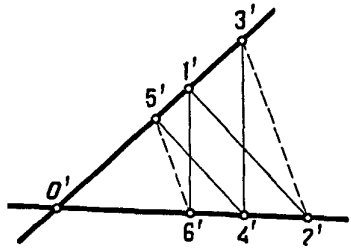
Решение. Прежде всего докажем, что две пересекающиеся прямые, лежащие в какой-либо плоскости, можно из точки спроектировать в две параллельные прямые.

В самом деле, пусть a и b — две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости p. Проведем через точку пересечения этих прямых произвольную плоскость q и выберем в ней произвольную точку S. Проведем еще плоскость p', параллельную плоскости q. Тогда проекциями прямых a и b из точки S на

плоскость p' будут две параллельные прямые a' и b'; в самом деле, две плоскости, проходящие через точку S, и прямые a и b, которые проектируют эти прямые a и b в плоскость p' из точки S, пересекаются по прямой, параллельной плоскости p', поэтому проектирующие плоскости пересекут плоскость p' по двум параллельным прямым: a' и b', являющимся проекциями прямых a и b из точки S в плоскость p' (черт. 14).



Черт. 14.



Черт. 15.

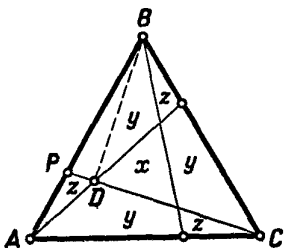
Возвращаясь к данной задаче, спроектируем данную нам конфигурацию, изображенную на черт. 13, из точки S, лежащей в плоскости q, проходящей через точки пересечения прямых 16 и 34, 45 и 12 в плоскость p, параллельную плоскости q; мы получим в проекции конфигурацию K' того же типа, что и конфигурация K, изображенная на чертеже 13; в конфигурации K', однако, $1'6'$ и $3'4'$ будут параллельны, прямые $4'5'$ и $1'2'$ также параллельны (черт. 15). Докажем, что прямые $6'5'$ и $2'3'$ будут параллельны. В самом деле,

$$\frac{0'6'}{0'4'}=\frac{0'1'}{0'3'},\quad \frac{0'4'}{0'2'}=\frac{0'5'}{0'1'},$$

откуда (перемножая)

$$\frac{0'6'}{0'2'}=\frac{0'5'}{0'3'},$$

значит, $5'6' \parallel 3'2'$, а потому при обратном проектировании конфигурации K' плоскости p' из точки S в плоскость p мы получим, что параллельные прямые $5'6'$ и $3'2'$ спроектируются в прямые 56 и 32, пересекающиеся в некоторой точке C, лежащей на «линии горизонта» AB.



Черт. 16.

Пример 4. Каждая из сторон равностороннего треугольника разделена на 3 равные части, и точки деления соединены с противоположными вершинами так, как указано на черт. 16. Найти отношение площади треугольника, образованного проведенными прямыми, к площади заданного треугольника.

Решение. Пусть s — площадь данного треугольника, а x — площадь треугольника, образованного проведенными прямыми (черт. 16).

Обозначим через y площадь каждого из четырехугольников и через z — площадь каждого из треугольников, на которые разбивается данный треугольник проведенными прямыми. Тогда

$$x+3y+3z=s,\quad y+2z=\frac{s}{3}. \tag{1}$$

Для составления третьего уравнения соединим точку D с точкой B. Тогда площадь $\triangle DBP = 2z$, и так как

$$\frac{\text{пл.}\triangle ADC}{\text{пл.}\triangle BDA}=2,$$

то

$$\frac{z+y}{3z}=2,$$

откуда

$$y=5z. \qquad (2)$$

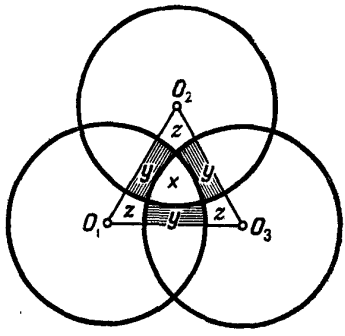
Решая системы уравнений (1), (2), получим

$$x=\frac{s}{7},$$

так что искомое отношение равно $\frac{1}{7}$.

Замечание. Отметим, что это положение верно для произвольного треугольника и метод решения остается тем же.

Число «неизвестных» будет тем же самым. Для того чтобы доказать равенство площадей четырехугольников и треугольников, прилегающих к сторонам данного треугольника, достаточно, например, заметить, что всякий треугольник можно рассматривать как проекцию равностороннего треугольника и что при параллельном проектировании равные площади проектируются в равные.



Черт. 17.

Пример 5. Три окружности одного и того же радиуса пересекаются под прямыми углами. Найти площадь криволинейного треугольника, общую для всех кругов.

Решение. Соединим центры данных окружностей; получим равносторонний треугольник, который дугами окружностей разделен на 7 частей. Обозначим искомую площадь через x; введем еще в рассмотрение площади y (на черт. 17 они заштрихованы) и площади z (черт. 17). Тогда*

$$x+3y+3z=\text{пл. } O_1O_2O_3=\frac{r^2\sqrt{3}}{2}, \quad x+2y+z=\frac{1}{6}\pi r^2,$$

$$x+y=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2} \text{ (пл. кругового сегмента)}.$$

Решая написанную систему, найдем

$$x=\frac{r^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6).$$

Пример 6. Вычислить площадь сферического треугольника, углы которого A, B, C и который расположен на сфере радиуса r.

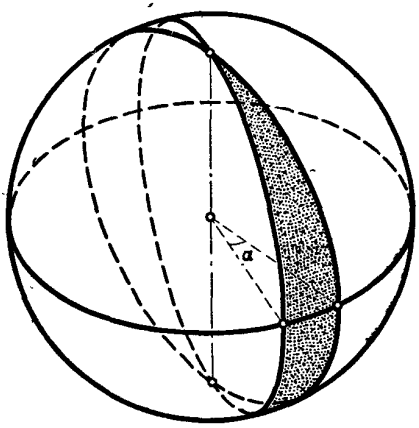
Замечание. Сферическим треугольником называется часть сферы, ограниченная дугами трех больших ее кругов. Углами сферического треугольника называются внутренние двугранные углы трехгранного угла, вершина которого находится в центре сферы, а ребрами являются лучи, выходящие из центра сферы и проходящие через вершины сферического треугольника.

Решение. Заметим сначала, что площадь части сферы, высекаемой из нее гранями двугранного угла величиной α, ребром которого служит диаметр, равна

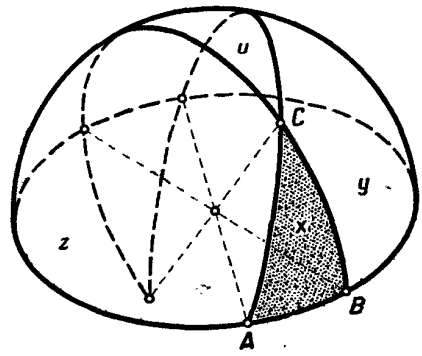
$$\frac{\alpha S}{2\pi},$$

* $O_1O_2=r\sqrt{2}$, так как данные окружности пересекаются под прямыми углами.

где s — поверхность сферы (черт. 18). Пусть ABC — сферический треугольник (черт. 19). Так как все дуги $\overset{\smile}{AB}$, $\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{CA}$ — дуги больших кругов, то, проводя через дугу $\overset{\smile}{AB}$ плоскость, заключаем, что она пройдет через центр сферы,

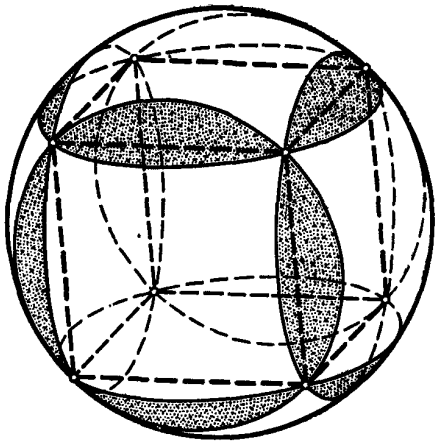


Черт. 18.



Черт. 19.

а сферический треугольник ABC окажется расположенным на одной из полусфер, на которые разделится сфера проведенной плоскостью (черт. 19). Дугами $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{BC}$ (продолженными за точку C) полусфера разделится на 4 части, площади которых обозначим через x, y, z, u. На основании только что высказанного соображения о величине сферического «двуугольника» находим:



Черт. 20.

$$x+y=\frac{A}{2\pi}s=\frac{A}{2\pi}4\pi r^2=2Ar^2,$$

$$x+z=\frac{B}{2\pi}s=\frac{B}{2\pi}\cdot 4\pi r^2=2Br^2,$$

$$x+u=\frac{C}{2\pi}s=\frac{C}{2\pi}4\pi r^2=2Cr^2$$

и, наконец,

$$x+y+z+u=2\pi r^2.$$

Решая полученную систему, находим

$$x=(A+B+C-\pi)r^2.$$

Такова формула для площади сферического треугольника. Отметим попутно, что

$$A+B+C=\pi+\frac{x}{r^2},$$

т. е. что сумма углов сферического треугольника больше π (180°) на величину, равную отношению площади этого треугольника к квадрату радиуса сферы, на которой расположен треугольник. Это число

$$\frac{x}{r^2}$$

называется «сферическим избытком».

Отметим, что дробью $\frac{x}{r^2}$ можно практически пренебречь, если x мало сравнительно с r, так что «небольшой» сферический треугольник (сравнительно с размерами сферы) имеет сумму углов, приблизительно равную 180°.

Пример 7. В шар, поверхность которого равна s, вписан куб, и все его грани продолжены до пересечения с поверхностью шара. Найти площади тех частей, на которые разделится поверхность сферы.

Решение. Поверхность сферы разделится на 18 частей: 12 «двуугольников», примыкающих к каждой из 12 граней куба, и 6 «четырехугольников», каждый из которых вырезается из сферы четырьмя гранями куба, проходящими через пары четырех параллельных между собою ребер (черт. 20).

Обозначая площадь «двуугольника» через x, а площадь «четырехугольника»— через y, будем иметь

$$12x+6y=s.$$

С другой стороны, грань куба отсекает от сферы сегмент, площадь которого равна $4x+y$:

$$4x+y=s_1,$$

где s_1 — площадь сегмента шара, отсекаемого от него гранью куба, вписанного в этот шар.

Нетрудно вычислить площадь этого сегмента:

$$s_1=\frac{s}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Решая систему

$$12x+6y=s,\quad 4x+y=s_1,$$

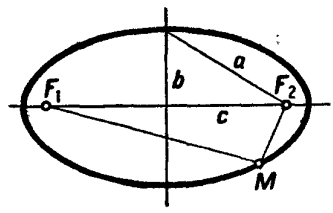
находим:

$$x=\frac{2-\sqrt{3}}{12}s,\quad y=\frac{\sqrt{3}-1}{6}s.$$

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Эллипс

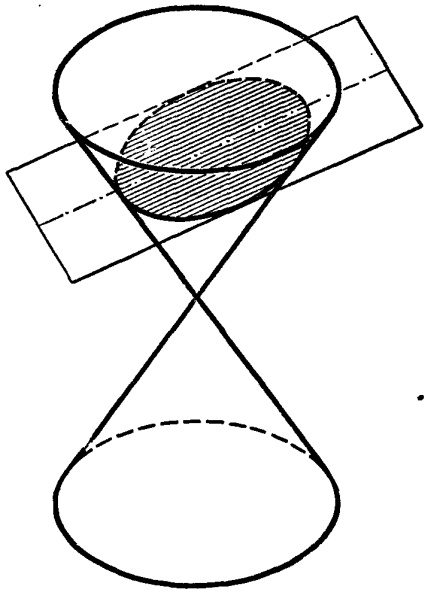
Пусть на плоскости фиксированы две различные точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$. Фиксируем число $2a$, большее, чем $2c$. *Геометрическое место точек* M, для каждой из которых $MF_1+MF_2=2a$, *называется эллипсом.*



Черт. 21.

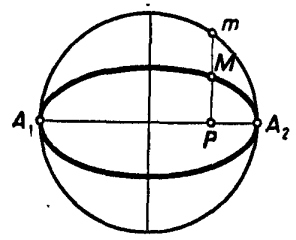
Эллипс есть замкнутая выпуклая линия (черт. 21); точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, прямая F_1F_2 — *фокальной осью* эллипса (или его большей осью); медиатриса отрезка F_1F_2 называется *малой осью* эллипса. Точки пересечения эллипса с его осями называются *вершинами* эллипса (у эллипса 4 вершины). Точка пересечения осей эллипса называется его *центром*; она является центром симметрии эллипса. Расстояние a от центра эллипса до любой его вершины, лежащей на фокальной оси, называется *большей полуосью* эллипса; расстояние же b от центра эллипса до вершины, не лежащей на фокальной оси, называется *меньшей полуосью* эллипса. Числа a, b и c связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$. Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс превращается в окружность. Эллипс можно определить так же, как плоское сечение прямой круговой конической поверхности плоскостью, которая пересекает все образующие этой поверхности, но не проходит через ее вершину (черт. 22). Если секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности (но не проходит через ее вершину), то в сечении получаем окружность. Эллипс можно определить и как результат сжатия окружности к любой прямой, в частности к диаметру окружности (черт. 23). Это означает, что эллипс может быть получен так: пусть A_1A_2 — фиксированный диаметр окружности, P — основание перпендикуляра, опущенного из точки m на A_1A_2, M — точка прямой Pm такая, что $\frac{\overline{PM}}{\overline{Pm}}=k$,

где k — фиксированное число, не равное О $\left(\text{на черт. } k=\frac{1}{2}\right)$. Когда точка m описывает окружность с диаметром A_1A_2, точка M описывает эллипс, одна из полуосей которого равна $a=\frac{1}{2}A_1A_2$, другая же b определяется из соотношения $\frac{b}{a}=|k|$.



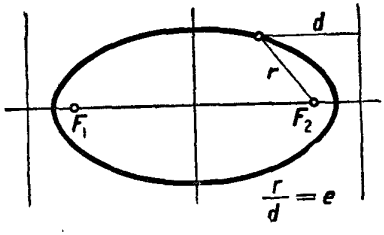
Черт. 22.

В случае $0<|k|<1$, b — меньшая полуось, a — большая, в случае $|k|>1$ — наоборот. Прямые, отстоящие от центра эллипса (не являющегося окружностью) на расстояниях $\frac{a^2}{c}$ от его центра и перпендикулярные его

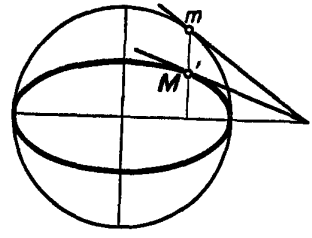


Черт. 23.

фокальной оси, называются директрисами эллипса. Окружность директрис не имеет. Директрисой, соответствующей данному фокусу эллипса, называется директриса, ближайшая к этому фокусу. Отношение $\frac{c}{a}=e$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Отметим, что $0\leqslant e<1$ ($e=0$ для окружности). Отсюда следует, что собственно для эллипса ($0<e<1$) $\frac{a^2}{c}=\frac{a}{e}>a$ и значит директриса не пересекает эллипс. Отношение расстояний от любой точки эллипса до его фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы, соответствующей рассматриваемому фокусу, равно эксцентриситету эллипса (черт. 24).



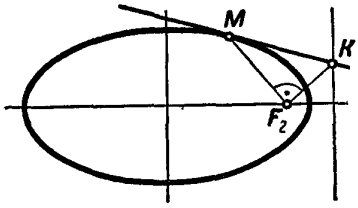
Черт. 24.



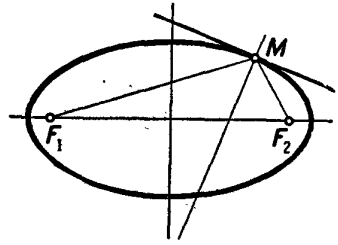
Черт. 25.

Обратно: пусть на плоскости заданы прямая (D) и не лежащая на ней точка F. Фиксируем число e, $0<e<1$. Тогда геометрическое место точек M, для каждой из которых отношение расстояний от точки F к расстоянию до прямой (D) равно e, есть эллипс с фокусом F и соответствующей ему директрисой (D). Касательной к эллипсу в точке M называется предельное положение секущей MM' эллипса, когда точка M' эллипса, оставаясь на эллипсе неограниченно, приближается к точке M. Касательную к эллипсу в точке M можно

определить и как прямую, проходящую через точку M и имеющую с эллипсом только одну общую точку (M). При сжатии окружности к ее диаметру касательная к окружности в точке m переходит в касательную к эллипсу в точке M,

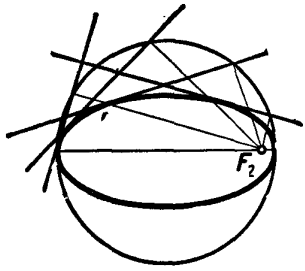


Черт. 26.

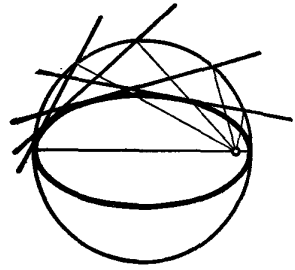


Черт. 27.

в которую переходит m (черт. 25). Отрезок MK касательной к эллипсу в точке M, заключенный между точкой касания M и точкой K, в которой эта касательная пересекает директрису, виден из фокуса, соответствующего этой директрисе

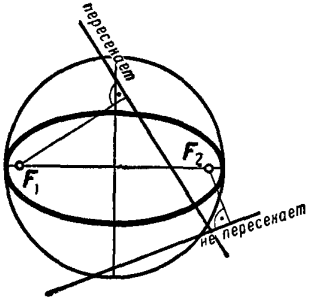


Черт. 28.

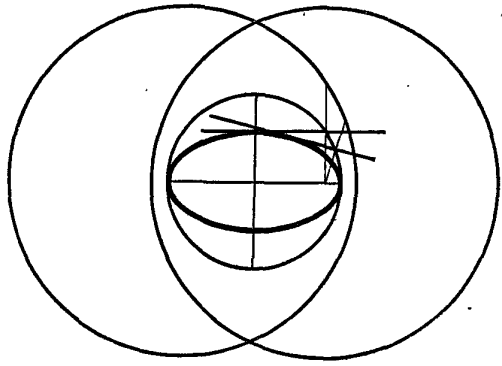


Черт. 29.

под прямым углом (черт. 26). Касательная к эллипсу в точке M образует равные углы с отрезками MF_1 и MF_2; следовательно, нормалью к эллипсу в точке M является биссектриса угла F_1MF_2 (черт. 27). Геометрическое место оснований



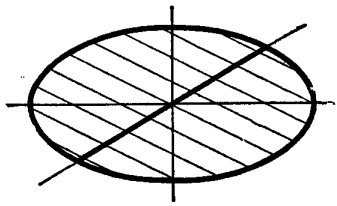
Черт. 30.



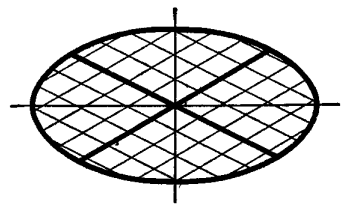
Черт. 31.

перпендикуляров, опущенных из фокуса эллипса на касательную к нему, есть окружность, построенная на большей оси эллипса как на диаметре (главная окружность эллипса; черт. 28). Если одна сторона прямого угла проходит через фиксированную точку F, а вершина угла описывает окружность, внутри которой лежит F, то вторая сторона угла огибает эллипс, у которого F — фокус, а указанная окружность — главная (черт. 29). Если прямая пересекает эллипс, то

проекция на нее любого фокуса лежит внутри главной окружности, а если не пересекает, то вне (черт. 30). Геометрическое место точек, симметричных фокусу эллипса относительно касательных к нему, есть окружность с центром в другом фокусе, радиус которой равен большей оси эллипса (направляющая окружность эллипса; их у эллипса две; черт. 31). *Геометрическое место середин параллельных хорд эллипса* есть отрезок прямой, называемый диаметром эллипса, сопряженным этим хордам (черт. 32). Все диаметры эллипса проходят через его центр



Черт. 32.



Черт. 33.

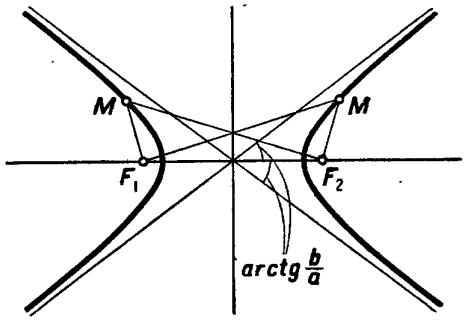
и обратно. Два диаметра эллипса называются *сопряженными*, если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому (черт. 33). Для каждого диаметра эллипса существует, и притом только один, ему сопряженный.

§ 2. Гипербола

Фиксируем на плоскости две различные точки: F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$. Фиксируем положительное число $2a$, меньшее, чем $2c$. Геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

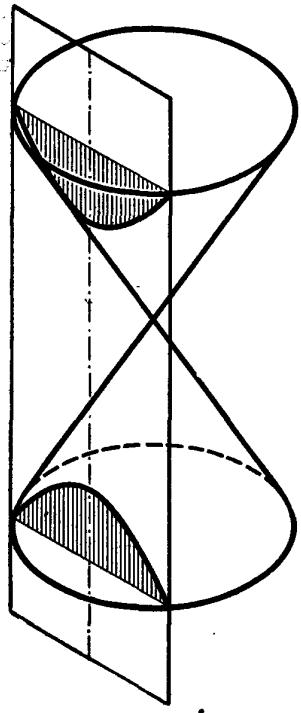
называется *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей (черт. 34); для всех точек одной ветви $MF_1 - MF_2 = 2a$, для всех точек другой $MF_1 - MF_2 = -2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*, прямая F_1F_2 — *фокальной*, или действительной, осью гиперболы. Медиатриса отрезка F_1F_2 называется *мнимой осью* гиперболы. Точки пересечения гиперболы с ее действительной осью называются ее вершинами (у гиперболы 2 вершины). Точка пересечения осей гиперболы называется ее *центром*; она является центром симметрии гиперболы. Расстояние a от центра гиперболы до ее вершины называется *действительной полуосью*. *Мнимой полуосью* гиперболы называется действительное число $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, отсюда $a^2 + b^2 = c^2$. Прямые, проходящие через центр гиперболы и образующие с ее действительной осью острые углы $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$, называются *асимптотами гиперболы*. Гиперболу можно также определить как плоское сечение прямой круговой конической поверхности плоскостью, которая не проходит через вершину этой поверхности и параллельна двум ее образующим (иначе — пересекает обе полости поверхности; черт. 35).



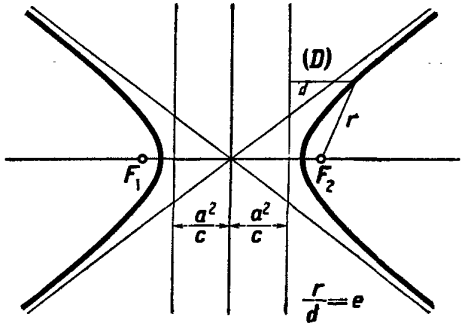
Черт. 34.

Прямые, перпендикулярные фокальной оси гиперболы и отстоящие от ее центра на расстоянии $\frac{a^2}{c}$, называются *директрисами* гиперболы (черт. 36). Директрисой гиперболы, соответствующей рассматриваемому фокусу, называется директриса, ближайшая к этому фокусу. Отношение $\frac{c}{a} = e$ называется *эксцен-*

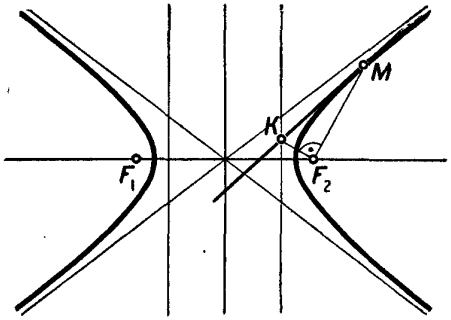
триситетом гиперболы; отметим, что для гиперболы $e > 1$. Отсюда следует, что $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{e} < a$ и значит директрисы гиперболу не пересекают. Отношение расстояний любой точки гиперболы от фокуса к расстоянию от этой точки до директ-



Черт. 35.

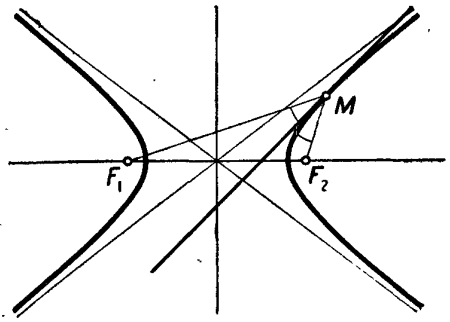


Черт. 36.

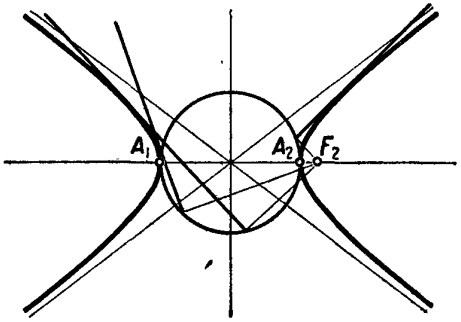


Черт. 37.

рисы, соответствующей рассматриваемому фокусу, равно эксцентриситету гиперболы. Обратно: пусть на плоскости заданы прямая (D) и точка F, не лежащая на (D). Фиксируем число $e > 1$. Тогда геометрическое место точек M, для каждой



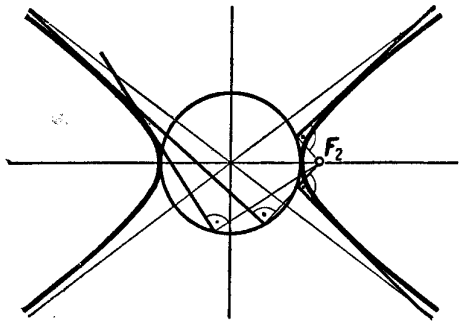
Черт. 38.



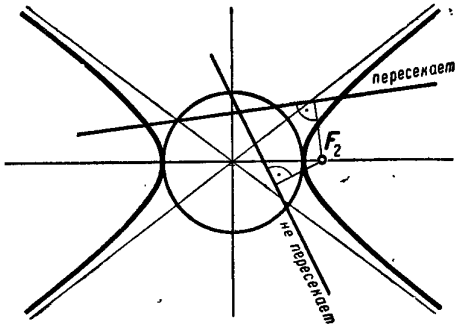
Черт. 39.

из которых отношение расстояний от точки F к расстоянию до прямой (D) равно e, есть гипербола с фокусом F и соответствующей ему директрисой (D). Касательная к гиперболе определяется так же, как и для эллипса (см. выше — первое определение). Отрезок MK касательной к гиперболе, заключенный между точкой касания M и точкой K пересечения этой касательной с директрисой (D), виден из фокуса F, соответствующего директрисе (D) под прямым

углом (черт. 37). Касательная к гиперболе в точке M является биссектрисой угла F_1MF_2 (черт. 38). Геометрическое место оснований перпендикуляров,

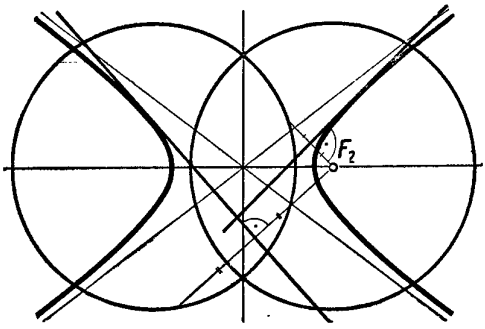


Черт. 40.

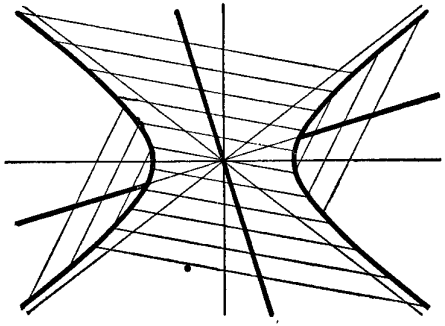


Черт. 41.

опущенных из фокуса гиперболы на касательные к ней, есть окружность, построенная на действительной оси гиперболы A_1A_2 как на диаметре (главная окружность гиперболы; черт. 39).

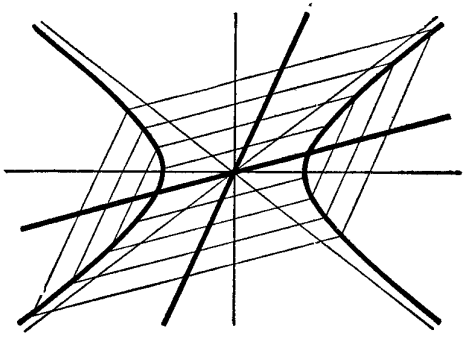


Черт. 42.



Черт. 43.

Если одна сторона прямого угла проходит через фиксированную точку F, а вершина угла описывает окружность, для которой F — внешняя точка, то вторая сторона угла огибает гиперболу, для которой F — фокус, а указанная окружность — главная (черт. 40). Если прямая пересекает гиперболу, то проекция на нее любого фокуса лежит вне главной окружности, а если не пересекает, то — внутри (черт. 41).



Черт. 44.

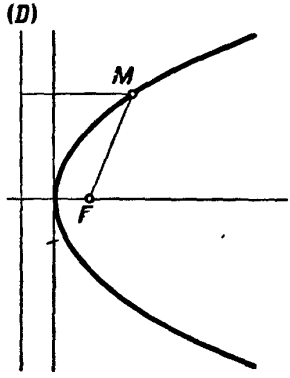
Геометрическое место точек, симметричных фокусу гиперболы относительно касательных к ней, есть окружность радиуса $2a$ с центром в другом фокусе (направляющая окружность гиперболы; гипербола имеет две направляющие окружности; черт. 42). Геометрическое место середин параллельных хорд гиперболы есть прямая, проходящая через центр гиперболы, если концы каждой хорды лежат на разных ветвях гиперболы; это геометрическое место есть прямая за вычетом отрезка (ограниченного точками пересечения этой прямой с гиперболой), если концы каждой хорды лежат на одной и той же ветви гиперболы (черт. 43).

Эта прямая (т. е. прямая, на которой лежат середины параллельных хорд гиперболы) называется *диаметром гиперболы*, сопряженным с рассматриваемыми хордами. Все диаметры гиперболы проходят через ее центр. Обратно: любая прямая, проходящая через ее центр, кроме двух асимптот, является диаметром гиперболы.

Два диаметра гиперболы называются *сопряженными*, если любой из них делит пополам хорды, параллельные другому (черт. 44). Для каждого диаметра гиперболы существует, и притом только один, ему сопряженный. Гипербола называется *равносторонней*, если ее асимптоты взаимно-перпендикулярны. Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$ (и обратно).

§ 3. Парабола

Фиксируем на плоскости точку F и прямую (D), не проходящую через точку F. Геометрическое место точек M, расстояние каждой из которых до точки F равно расстоянию до прямой (D), называется *параболой* (черт. 45).

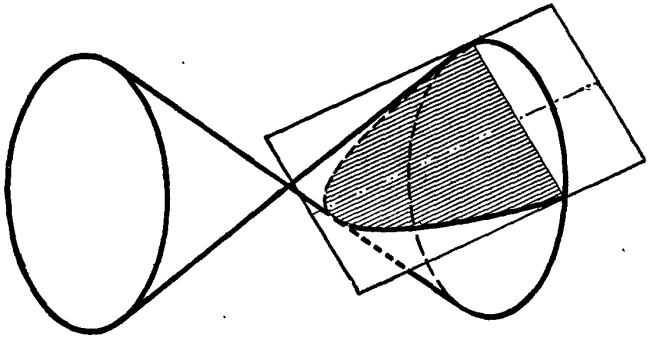


Черт. 45.

Точка F называется *фокусом* параболы, а (D) — *директрисой*. Прямая, проходящая через точку F перпендикулярно директрисе (D), называется *осью параболы*; ось параболы является ее осью симметрии. Точка пересечения оси параболы с самой параболой называется ее *вершиной*. Парабола имеет одну вершину. Расстояние от фокуса до директрисы называется *параметром параболы*.

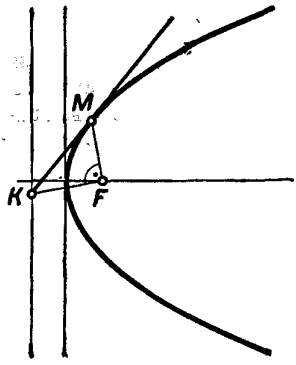
Параметр p параболы равен половине хорды параболы, проходящей через фокус перпендикулярно оси. Параболу можно также определить как *плоское сечение прямой круговой поверхности плоскостью, не проходящей через ее вершину и параллельной только одной образующей поверхности*, иначе — плоскостью, пересекающей одну полость конической поверхности (черт. 46).

Касательная к параболе определяется также и для эллипса (см. выше первое определение касательной к эллипсу). Отрезок MK касательной к параболе, заключенный между точкой касания M и точкой K, в которой эта касательная

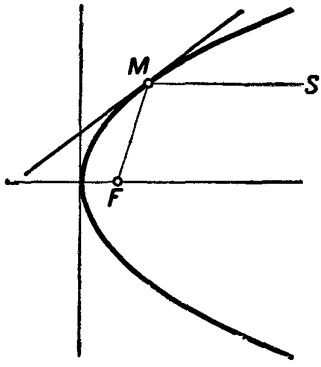

Черт. 46.

пересекает директрису, виден из фокуса под прямым углом (черт. 47). Если через точку M параболы провести луч MS, идущий в область внутренних точек по отношению к параболе, то касательная к параболе в точке M будет одинаково наклонена к лучам MF и MS (черт. 48) (оптическое свойство параболы).

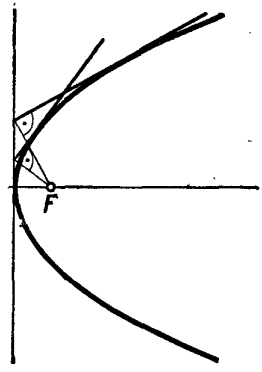
Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней, есть касательная к параболе в ее вершине (главная «окружность»; черт. 49).



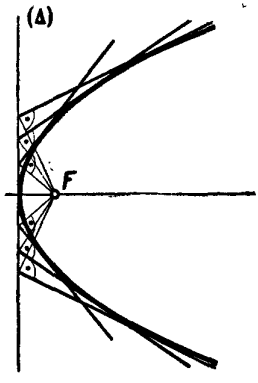
Черт. 47.



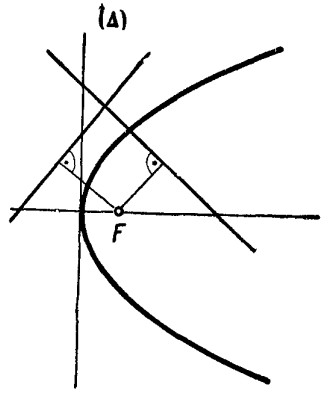
Черт. 48.



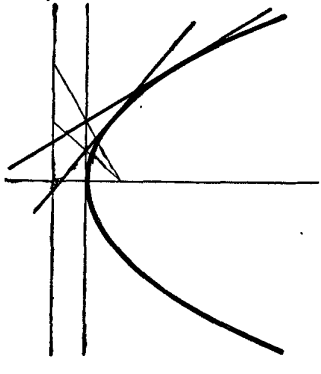
Черт. 49.



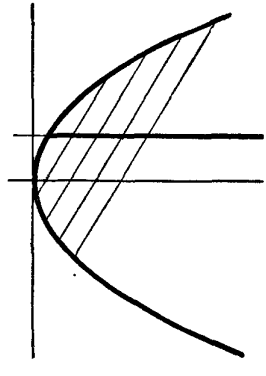
Черт. 50.



Черт. 51.



Черт. 52.



Черт. 53.

Если одна сторона прямого угла проходит через фиксированную точку F, а вершина угла скользит по некоторой прямой (Δ), не проходя цей через точку F, то другая сторона угла огибает параболу с фокусом F, касательной в вершине которой является Δ (черт. 50).

Если прямая пересекает параболу, то проекция на эту прямую фокуса лежит по ту сторону от касательной (Δ) к параболе в ее вершине, где и фокус F, а если не пересекает, то в другой полуплоскости от Δ (черт. 51).

Геометрическое место точек, симметричных фокусу параболы относительно касательных к ней, есть директриса (черт. 52). Геометрическое место середины параллельных хорд параболы есть часть прямой, параллельной оси параболы, состоящая из всех точек этой прямой, лежащей внутри параболы (черт. 53). Сама эта прямая называется диаметром параболы, сопряженным хордам выбранного направления. Любая прямая, параллельная оси параболы, является ее диаметром.

Глава XVI

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Треугольник

1. Найти катеты прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна a, а один из острых углов равен 15°.
2. Определить стороны прямоугольного треугольника, если его периметр равен 12 *см*, а площадь 6 *см*^{2}.
3. Расстояние от вершины прямоугольника до диагонали, не проходящей через эту вершину, равно 2,4. Найти стороны прямоугольника, если их разность равна 1.
4. Меньший из отрезков гипотенузы треугольника, на которые делит ее перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла, равен 1,8. Найти стороны треугольника, если разность катетов равна 1.
5. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b, c определить периметр треугольника, образованного основаниями его высот.
6. Выразить стороны треугольника через три его высоты.
7. Определить вид треугольника, если длины a, b, c его сторон связаны соотношением
$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$
8. Определить углы треугольника, зная, что два из них относятся как 2 : 1, а биссектриса третьего угла делит площадь треугольника в отношении $1 : \sqrt{3}$.
9. Найти катеты прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вневписанного круга, касающегося гипотенузы, равен 2, а высота, опущенная на гипотенузу, равна $\sqrt{6} - 2$.
10. Определить углы равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной окружности.
11. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC, вне его, построен квадрат. Зная, что сумма катетов равна a, определить расстояние от вершины A до центра квадрата.
12. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны p и q Найти площадь треугольника.
13. В прямоугольный треугольник с катетами b и c вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти площадь этого квадрата.
14. Определить площадь треугольника, если основание его равно 10, а углы, прилежащие к основанию, 30° и 45°.
15. Даны стороны a, b, c треугольника ABC. Найти расстояния от вершин B и C до биссектрисы угла BAC.
16. Вычислить стороны прямоугольного треугольника, зная его периметр $2p$ и длину h перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.
17. Внутри угла 60° расположена точка на расстояниях a и b от его сторон. Найти расстояние от этой точки до вершины данного угла.
18. Площадь прямоугольного треугольника равна 6, а радиус вневписанной окружности, касательной к одному из катетов, равен 3. Найти стороны треугольника.

19. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найти длину биссектрисы прямого угла.
20. Определить отношение сторон прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного в него круга, как 5 : 2.
21. Дан ромб $ABCD$, острые углы B и D которого равны 60°. Прямая MN отсекает от сторон CB и CD отрезки CM и CN, сумма которых равна стороне ромба. Определить углы треугольника AMN.
22. Вычислить катеты прямоугольного треугольника, зная его гипотенузу c и длину l биссектрисы одного из острых углов.
23. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.
24. Стороны треугольника связаны соотношением

$$a^3 = b^3 + c^3.$$

Может ли угол A быть острым? Тупым? Прямым?

25. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна 5. Из медиатрисы этой медианы больший катет и медиана высекают отрезок длиной $\frac{15}{8}$. Найти катеты.

Выразить через стороны a, b, c треугольника следующие элементы треугольника:

26. Высоты h_a, h_b, h_c.
27. Медианы m_a, m_b, m_c.
28. Биссектрисы внутренних углов l_a, l_b, l_c.
29. Биссектрисы внешних углов l_a^*, l_b^*, l_c^*.
30. Радиус R описанной окружности.
31. Радиус r вписанной окружности.
32. Радиусы r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей.
33. Расстояния h_a', h_b', h_c' от ортоцентра H до вершин треугольника.
34. Расстояния l_a', l_b', l_c' от центра вписанного круга до вершин.
35. Отрезки медиан m_a', m_b', m_c', заключенные между точкой их пересечения и вершинами.
36. Расстояния h_a'', h_b'', h_c'' от ортоцентра до сторон треугольника.
37. Отрезки l_a'', l_b'', l_c'' биссектрис между точкой их пересечения и сторонами треугольника.
38. Отрезки m_a'', m_b'', m_c'' медиан между точкой их пересечения и сторонами треугольника.
39. Расстояния d_a, d_b, d_c центра описанной окружности от центров вневписанных окружностей.
40. Расстояния k_a, k_b, k_c от центра описанной окружности до сторон треугольника.
41. Расстояние d от центра описанной окружности до центра вписанной окружности.
42. В круг радиуса r вписаны два правильных треугольника, стороны которых пересекаются так, что каждая сторона оказывается разделенной на три равные части. Определить площадь, общую обоим треугольникам.
43. Даны стороны b и c треугольника. Найти третью сторону x, зная, что она равна высоте, на нее опущенной. При каком соотношении между b и c задача возможна?
44. На сторонах угла от вершины O отложены отрезки OA и OB, причем $OA > OB$. На отрезке OA взята точка M, а на продолжении отрезка OB за точку B взята точка N так, что $AM = BN = x$. Найти значение x, при котором отрезок MN имеет наименьшую длину.

45. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. По данным сторонам b и c найти a.

46. Из двух углов треугольника один в два раза больше другого. Найти стороны треугольника, зная, что они выражаются целыми числами.

47. В треугольнике ABC биссектриса BD внутреннего угла B равна медиане AE. Найти соотношение между сторонами треугольника.

48. В треугольнике ABC высота h_a составляет половину биссектрисы внешнего угла этого треугольника при вершине A. Найти $|B-C|$.

49. Равнобедренные треугольники ABC, ABC_1 и ABC_2 имеют общее основание AB, а высоты их равны соответственно $\frac{1}{2}AB$, AB и $\frac{3}{2}AB$. Вычислить сумму углов при вершинах этих треугольников.

50. Найти длину гипотенузы такого прямоугольного треугольника, который можно расположить на клетчатой бумаге так, чтобы гипотенуза лежала на одной из линий сетки, а все вершины треугольника лежали в вершинах квадрата, образованного линиями сетки.

51. Рассмотрим три произвольные, различные пары действительных чисел:

$$a_1,\ b_1;\quad a_2,\ b_2;\quad a_3,\ b_3,$$

причем

$$a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1-a_3b_2-a_2b_1-a_1b_3\neq 0.$$

Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого выражаются числами

$$a=\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2},$$
$$b=\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2},$$
$$c=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

и вычислить его площадь.

52. Рассмотрим три тройки действительных чисел:

$$a_1,\ b_1,\ c_1;$$
$$a_2,\ b_2,\ c_2;$$
$$a_3,\ b_3,\ c_3,$$

причем

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2\neq 0.$$

Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого

$$a=\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(c_2-c_3)^2},$$
$$b=\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2+(c_3-c_1)^2},$$
$$c=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2},$$

и вычислить его площадь.

53. Определить сторону правильного треугольника, зная, что расстояния от точки, лежащей внутри этого треугольника, до его вершин равны a, b и c.

54. Высота, биссектриса и медиана треугольника, проведенные из его вершины, делят внутренний угол треугольника на 4 равные части. Найти углы треугольника.

55. В треугольнике со сторонами a, b, c проведены высоты AL, BM и CN. Определить отношение площади треугольника MNL к площади треугольника ABC.

56. Вычислить стороны треугольника и его площадь, если даны: радиус r вписанного круга, радиус R описанного круга и высота h_a.

57. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, а один из углов его равен 144°. Найти площадь треугольника, не применяя таблиц.

58. Найти стороны прямоугольного треугольника, зная его катет b и проекцию c' другого катета на гипотенузу.

59. Определить углы треугольника, зная, что медиана и высота этого треугольника, проведенные из вершины A, делят угол A на три равные части.

60. В треугольнике радиусы описанного и вписанного кругов равны R и r. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, образованного точками касания вписанного круга.

61. Из произвольной точки M, взятой внутри правильного треугольника ABC, проведены перпендикуляры MD, ME и MF соответственно на стороны BC, CA и AB. Найти отношение

$$\frac{MD+ME+MF}{BD+CE+AF}.$$

62. В треугольнике ABC определить сторону BC, если $AB+AC=m$, а проекция биссектрисы угла A на сторону AB равна p.

63. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB=c$, $AM^2+BN^2=m^2$, где AM и BN — биссектрисы острых углов. Определить длину MN.

64. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущен перпендикуляр CD на гипотенузу. Из точки D на катеты опущены перпендикуляры $DE=p$ и $DF=q$. Определить длину гипотенузы.

65. В треугольнике ABC определить биссектрису AD, если известно, что $AC+CD=m$, $AB-BD=n$.

66. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведена высота AD, на ней и на катетах отложены отрезки $AA'=BB'=CC'=1$. Найти площадь треугольника $A'B'C'$, зная, что $AB=3$, $AC=4$.

67. Вычислить стороны b и c треугольника, зная, что $a=5$, $b-c=2$, $B=2C$.

68. В треугольнике ABC угол $C=120°$ и $\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Определить угол B.

69. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q, R такие, что $AR:RB=\nu$, $BP:PC=\lambda$, $CQ:QA=\mu$. Вычислить отношение площади треугольника PQR к площади треугольника ABC.

70. На сторонах AC, CB и AB треугольника ABC отложены соответственно отрезки $AK=\frac{1}{3}AC$, $CL=\frac{1}{3}CB$, $BM=\frac{1}{3}BA$. Точки пересечения AL, BK и CM служат вершинами треугольника, площадь которого равна 10. Найти площадь треугольника ABC.

71. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены высота CH и биссектриса CL. На стороне CB ($BC>CA$) отложен отрезок $CP=CA$. Прямые AP и CH пересекаются в точке K. Найти длину отрезка KL, если дано $AC=b$, $BC=a$.

72. Через вершину B прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена прямая l, не пересекающая гипотенузы. Из вершин A, C опущены перпендикуляры AA_1, CC_1 на прямую l (точки A_1 и C_1 лежат на прямой l). При каком значении угла $\varphi=\angle CBC_1$ площадь трапеции A_1ACC_1 будет наибольшей?

73. В равнобедренном треугольнике длины боковых сторон равны a каждая, а длина отрезка прямой, проведенного из вершины треугольника к его основанию и делящего угол между равными сторонами в отношении 1 : 2, равна t. Определить площадь этого треугольника.

74. Вычислить площадь треугольника, зная его стороны:

$$a=(y+z)(yz-r^2),$$
$$b=y(r^2+z^2),$$
$$c=z(r^2-y^2).$$

75. Найти углы прямоугольного треугольника, в котором отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности наибольшее.

76. С вершины башни высотой 30 *м* виден мост, направление которого лежит в одной вертикальной плоскости с осью башни. Лучи зрения, идущие к концам моста, составляют с вертикалью углы в 60° и 45°. Определить длину моста.

77. Определить площадь треугольника, если даны a и b — длины его сторон и t — длина биссектрисы угла между этими сторонами.

78. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, точка E — на стороне AC, точка F — на стороне BC, причем

$$AD : DB = BF : FC = CE : EA = m : n.$$

Зная, что площадь треугольника ABC равна s, определить площадь треугольника, образованного прямыми AF, BE и CD.

79. В треугольнике со сторонами a, b, c через точку пересечения биссектрис проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длину отрезков этих прямых, заключенных внутри треугольника.

80. В треугольнике ABC дано:

$$a = 78, \quad R = 65, \quad r = 28,$$

где R и r — радиусы описанной и вписанной в треугольник окружностей. Вычислить без таблиц длины сторон b и c.

81. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b, c определить величину выражения

$$h_a \cdot HA + h_b \cdot HB + h_c \cdot HC,$$

где H — точка пересечения высот треугольника.

82. Биссектриса среднего по величине угла треугольника равна меньшей его стороне и делится другими биссектрисами в отношении 1 : 2. Определить стороны треугольника, если его периметр равен 21.

83. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и продолжена до пересечения в точке K с описанной окружностью. Выразить через стороны разность

$$\frac{AO}{OD} - \frac{OD}{DK},$$

где O — центр вписанной окружности.

84. Даны длины a, b, c сторон треугольника ABC. Две окружности равных радиусов, расположенные внутри треугольника ABC, касаются друг друга, причем одна из них касается еще сторон AC и BC. Найти радиус.

85. Периметр треугольника равен 20. Сумма его высот равна $\frac{131\sqrt{3}}{14}$ и радиус описанной окружности равен $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Определить стороны.

86. l_1, l_2, l_3 — три параллельные между собой прямые, причем прямая l_2 проходит между прямыми l_1 и l_3. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно a, расстояние между прямыми l_2 и l_3 равно b. Вычислить площадь равностороннего треугольника, вершины которого лежат на данных прямых.

87. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R такие, что

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \alpha, \quad \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \beta, \quad \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \gamma.$$

Найти отношение площади треугольника PQR к площади треугольника ABC.

88. AB — сторона правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R. В меньший сегмент этой окружности, отсекаемый от нее хордой AB, вписан правильный треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна AB. Найти длину стороны этого треугольника.

89. Определить площадь равнобедренного треугольника, зная площади s_1 вписанного и s_2 описанного около него кругов.

90. Стороны треугольника ABC равны соответственно a, b, c. Определить, в каком отношении биссектриса угла BAC делит отрезок стороны BC, заключенный между точками пересечения BC с медианой и высотой треугольника, проведенными из вершины A.

91. Правильный треугольник ABC разбивается прямой на два треугольника: ABD и ACD. В каком отношении прямая AD делит сторону BC, если радиус круга, вписанного в треугольник ABD, в два раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ACD?

92. В треугольник ABC вписаны четыре круга таким образом, что один из них касается трех сторон треугольника и трех других кругов, а каждый из остальных касается двух сторон треугольника ABC и первого круга. Определить радиус первого круга, если радиусы трех остальных кругов равны r_1, r_2, r_3.

93. Стороны треугольника ABC разделены в отношениях

$$\frac{BP}{PC}=\lambda, \quad \frac{CQ}{QA}=\mu, \quad \frac{AR}{RB}=\nu.$$

Найти отношение площади треугольника $A'B'C'$, образованного прямыми AP BQ и CR, к площади треугольника ABC.

94. Внутри треугольника ABC, площадь которого равна s, взята точка O. Прямые AO и BO делят треугольник на 4 части:

$$\text{пл. } \triangle AOB=a, \quad \text{пл. } \triangle OPCQ=b.$$

Найти площади треугольников BOP и OAQ.

95. Дан угол $ABC=60^\circ$ (B — вершина). Точка M отстоит от сторон угла на расстоянии d_1 и d_2. Найти расстояние от точки M до биссектрисы угла ABC.

§ 2. Многоугольники

1. $ABCD$—параллелограмм, P—середина AB, Q—середина BC, R—середина CD и S — середина AD. Прямые AQ, CS, BR и DP при взаимном пересечении образуют параллелограмм. Найти отношение площади этого параллелограмма к площади данного параллелограмма.

2. Вершина A квадрата $ABCD$ соединена прямой с некоторой точкой M на CD, причем $AM=d$. Биссектриса AN угла BAM пересекает сторону BC в точке N. Определить сумму $DM+BN$.

3. Определить площадь ромба $ABCD$, зная, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, равны соответственно R и r.

4. В треугольник со сторонами 13, 14 и 15 вписан прямоугольник, одна из диагоналей которого параллельна меньшей стороне, а одна из сторон параллельна большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

5. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, причем $BC=CD$. Отрезки AB, AC и AD удалены от центра окружности соответственно на 8 *см*, 5 *см* и 1 *см*. Определить CD.

6. На двух смежных сторонах квадрата со стороной $2a$ как на диаметрах во внешнюю сторону построены две полуокружности и к этим полуокружностям проведены касательные, параллельные соответствующим сторонам квадрата. Найти радиус окружности, касающейся этих полуокружностей внешним образом и проведенных касательных.

7. В прямоугольной трапеции, высота которой равна $2h$, на стороне, не перпендикулярной основанию, как на диаметре, описана окружность; оказалось, что она касается противоположной стороны трапеции. Найти площадь прямоугольного треугольника, у которого катеты — основания трапеции.

8. Найти длину отрезка прямой, заключенного внутри трапеции, если эта прямая параллельна основаниям a и b трапеции и делит ее площадь пополам.
9. Определить площадь трапеции, если площади треугольников, образованных пересечением диагоналей и прилегающих к основаниям трапеции, соответственно равны m^2 и n^2.
10. По четырем сторонам трапеции вычислить ее диагонали.
11. Найти площадь трапеции по ее четырем сторонам.
12. Вычислить стороны равнобочной трапеции, зная, что периметр равен $2p$, диагональ равна d и что в эту трапецию можно вписать окружность.
13. На сторонах параллелограмма AB, BC, CD и DA взяты соответственно точки D_1, A_1, B_1 и C_1 такие, что

$$\frac{AD_1}{D_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1D}=\frac{DC_1}{C_1A}=\frac{m}{n}.$$

Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, пересекаясь, образуют четырехугольник $MNEF$. Зная, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна Q, определить площадь четырехугольника $MNEF$.

14. Площадь пятиугольника $ABCDE$ равна $68\frac{26}{27}$ $см^2$. Если из вершины A провести диагонали, то площади треугольников ABC, ACD и ADE составят геометрическую прогрессию. Если на стороне DE взять точку F так, чтобы $EF=\frac{369}{625}FD$, то площади треугольников ABC, ACD и AEF будут составлять арифметическую прогрессию. Найти площадь каждого треугольника.
15. Выразить диагонали и площадь вписанного в круг четырехугольника через его стороны.
16. Найти отношение площади правильного пятиугольника к площади треугольника, образованного стороной пятиугольника и двумя его диагоналями, выходящими из концов этой стороны.
17. Даны: p — периметр правильного описанного n-угольника, P — периметр правильного описанного $2n$-угольника. Определить p_1 — периметр правильного вписанного $2n$-угольника.
18. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны между собой. Дано: $AB=CD=EF=a$, $BC=DE=FA=b$. Вычислить площадь этого шестиугольника.
19. Из точки, взятой на большей стороне прямоугольника, неравные стороны его видны под равными углами. Найти расстояние этой точки до одной из меньших сторон прямоугольника, если измерения последнего суть 65 и 63.
20. Точки P и Q делят стороны BC и CA треугольника ABC в данных отношениях:

$$\frac{BP}{PC}=\alpha,\quad \frac{CQ}{QA}=\beta.$$

Пусть O — точка пересечения прямых AP и BQ. Найти отношение площади четырехугольника $OPCQ$ к площади данного треугольника.

§ 3. Окружность

1. Две окружности, радиусы которых равны r и R, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.
2. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Определить радиус окружности, касающейся этих окружностей и их общей внешней касательной.
3. Центр окружности S_1 лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника. Эта окружность касается большого катета BC в точке, расстояние которой до вершины B острого угла равно p, и проходит через вершину A острого

угла треугольника, касаясь в ней внутренним образом второй окружности, центр которой лежит в точке пересечения D первой окружности с гипотенузой треугольника. Найти радиус первой окружности, если хорда второй окружности, проведенная через вершину B острого угла треугольника, перпендикулярна его гипотенузе и видна из точки A под углом 60°.

4. Две окружности, отношение радиусов которых равно 2 : 3, касаются друг друга внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, и из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.
5. В круге радиуса r проведена хорда, стягивающая дугу в 108°. Найти длину этой хорды.
6. К каждой из двух данных окружностей, касающихся друг друга внешним образом в точке A, проведены две параллельные касательные, проходящие через точки, диаметрально противоположные точке A. Отношение радиусов данных окружностей равно k. Найти отношение радиусов окружностей, каждая из которых касается внешним образом двух данных окружностей и одной из построенных касательных.
7. Круг радиуса $\frac{2}{3}$ касается внутренним образом круга радиуса 2. Найти радиус третьего круга, касательного к двум первым и к диаметру, соединяющему их центры.
8. Равнобедренный прямоугольный треугольник вписан в окружность радиуса R. Найти радиус окружности, которая касается равных сторон этого треугольника и данной окружности.
9. Дана окружность с центром в точке O, диаметр AB которой равен $2R$. На касательной к окружности в точке A отложен отрезок AM, длина которого больше радиуса R, и из точки M проведена к окружности вторая касательная, пересекающая AB в точке P. Определить стороны треугольника AMP при условии, что его периметр равен $8R$.
10. Две окружности, радиусы которых равны a и b, пересекаются. Расстояние между их центрами равно c. Найти радиус окружности, касающейся данных окружностей и их общей касательной.
11. Даны длины a и b хорд круга радиуса R. Найти длину хорды, соответствующую сумме дуг, которые стягиваются данными хордами.
12. На отрезке и двух его неравных частях как на диаметрах построены полуокружности (расположенные по одну сторону от данного отрезка). Даны радиусы a и b меньших полукругов. Определить радиус окружности, касающейся всех полукругов.
13. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной a. Радиусы всех кругов также равны a. Вычислить площадь части плоскости, общей для всех кругов.
14. Два круга одного и того же радиуса R расположены так, что центр каждого из них лежит на окружности другого. Определить радиус круга, вписанного в общую часть этих кругов и касающегося их линий центров.
15. Даны два смежных прямых угла с вершиной в точке O. В один из них вписана окружность радиуса R, а в другой — окружность радиуса r ($R > r$). Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает стороны углов в точках A и B. Определить площадь треугольника AOB.
16. Точка внутри круга отстоит от его центра на расстоянии d. Хорда, проходящая через эту точку, делится в ней на части a и b. Определить радиус круга.
17. В окружности радиуса R диаметр продолжен на длину радиуса и из конечной точки проведена к окружности секущая, делящаяся этой окружностью пополам. Найти длину этой секущей.

18. AB — диаметр окружности радиуса r. В точке M окружности проведена к ней касательная, встречающая прямую AB в точке P. Найти проекцию AM на AB, если $AM = 2MP$.

19. В круге, радиус которого равен 4, проведена хорда AB так, что сумма расстояний точки B до касательной, проходящей через точку A, и до точки касания равна 6. Найти длину хорды AB.

20. Внутренняя и внешняя общие касательные к двум окружностям равны a и b. Определить длину общей касательной после того, как окружности будут сближены до соприкосновения.

21. В окружности хорда CD пересекает диаметр MN и параллельную ему хорду AB. Найти условие, при котором произведение отрезков хорды AB равнялось бы произведению отрезков диаметра MN.

22. Дана четверть круга AOB радиуса r (O — центр). На отрезке OA как на диаметре строится полуокружность (внутри данной четверти круга). Прямая, проходящая через середину отрезка OA перпендикулярно OA, пересекает построенную полуокружность в точке N, а данную четверть окружности — в точке M. Найти периметр и площадь криволинейной трапеции $MNOB$.

23. Три окружности радиусов r, r_1 и R касаются попарно одна другой внешним образом. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

24. В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг единичного радиуса. Найти сторону ромба.

25. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что касательная к ней из третьей вершины равна двойной стороне квадрата. Найти радиус этой окружности, если площадь квадрата равна 10.

26. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит третью сторону на два отрезка: 8 и 17. Найти радиус этой окружности.

27. Дана равнобочная трапеция с боковой стороной, равной 5, и основаниями 1 и 7. Найти площадь круга, описанного около этой трапеции.

28. В окружность радиуса R вписан треугольник. Даны проекции a_1, b_1, c_1 сторон a, b, c этого треугольника на диаметры, проведенные соответственно из A, B и C. Найти площадь треугольника.

29. Стороны вписанного в окружность шестиугольника последовательно равны a, b, c, d, e, f. Найти необходимое и достаточное условие того, что три прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

30. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника, зная длину высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из одной вершины.

31. O — точка пересечения диагоналей в описанном четырехугольнике $ABCD$. Найти зависимость между радиусами окружностей, описанных вокруг треугольников AOB, BOC, COD и DOA.

32. Круга радиуса r касаются внешним образом три равные окружности, касающиеся, кроме того, попарно между собой. Найти площади трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

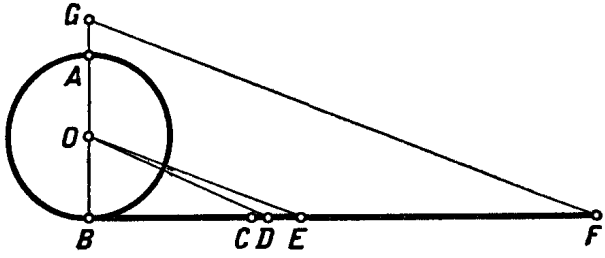
33. Три окружности радиусов R_1, R_2, R_3 касаются внешне попарно друг друга. Найти радиус окружности, проходящей через точки касания.

34. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

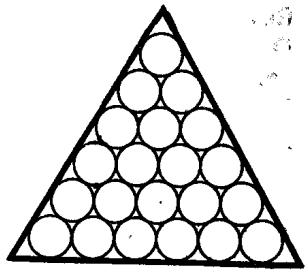
35. Радиус окружности (O) равен 1. Продолжим диаметр BA этой окружности за точку A (черт. 54). Проведем касательную к окружности (O) в точке B и отложим на ней от точки B отрезки $BC = 2$, $CD = \frac{1}{5}$, $CE = \frac{3}{5}$.

На диаметре BA от точки B отложим отрезок $BG = OD$. Далее построим $FG \| EO$. Найти $\frac{1}{2}\ BF$ с точностью до 0,000 001 (Шпехт).

36. Вычислить радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника, если известны радиусы R_a, R_b, R_c и R_d окружностей, описанных вокруг треугольников AOB, BOC, COD и DOA, где O — точка пересечения диагоналей.



Черт. 54.



Черт. 55.

37. В равносторонний треугольник вписываются окружности равных радиусов так как указано на чертеже 55. Найти предел, к которому стремится отношение площади, занимаемой всеми вписанными кругами, к площади треугольника, когда число кругов неограниченно возрастает.

Глава XVII

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§ 1. Треугольник

Доказать, что во всяком треугольнике в соответствии с обозначениями, введенными в задачах 26—41, гл. XVI, § 1, имеют место следующие соотношения (проверка всех соотношений после того, как решены задачи 26—41, может быть сведена к проверке тождеств; однако почти все предлагаемые ниже задачи могут быть решены более коротко из геометрических соображений):

1. $$s=\frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}.$$

2. $$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

3. $$s=\frac{l_al_a^*(b^2-c^2)}{4bc}\quad (b>c).$$

4. $$\frac{bc}{l_al_a^*}+\frac{ab}{l_cl_c^*}=\frac{ac}{l_bl_b^*}\quad (a>b>c).$$

5. $$4b^2c^2=l_a^2(b+c)^2+l_a^{*2}(b-c)^2.$$

6. $$4(h_ak_a+h_bk_b+h_ck_c)=a^2+b^2+c^2.$$

7. $$4\left(\frac{a}{k_a}+\frac{b}{k_b}+\frac{c}{k_c}\right)=\frac{abc}{k_ak_bk_c}.$$

8. $$s=\frac{1}{4}(ah_a'+bh_b'+ch_c').$$

9. $$h_a'h_a''=h_b'h_b''=h_c'h_c''.$$

10. $$al_a'^2+bl_b'^2+cl_c'^2=abc.$$

11. $IM=MI_a$, где I — центр вписанной окружности, I_a — центр окружности, вневписанной в $\angle A$, а M — точка пересечения I_aI с описанной окружностью.

12. $$s=\frac{l_al_bl_c(b+c)(c+a)(a+b)}{8abcp}.$$

13. $$s=\sqrt{rr_ar_br_c}.$$

14. $$s=\frac{r_ar_br_c}{p}.$$

15. $$s=rr_a\sqrt{\frac{4R-r_a+r}{r_a-r}}.$$

16. $$s=\frac{rr_a(r_b+r_c)}{a}.$$

17. $$s=\frac{arr_a}{r_a-r}.$$

18. $$s=\frac{ar_br_c}{r_b+r_c}.$$

19. $$s=\frac{(a-b)\,r_ar_b}{r_a-r_b}.$$

20. $$s=\frac{(a+b)\,rr_c}{r+r_c}.$$

21. $$rr_a=(p-b)(p-c).$$

22. $$4Rr_a(p-a)=abc.$$

23. $$a^2+(r_a-r)^2=4R(r_a-r).$$

24. $$r_ar_b-rr_c=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

25. $$ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr.$$

26. $$4Rrp=abc.$$

27. $$p^2r=r_ar_br_c.$$

28. $$a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr.$$

29. $$h_a+h_b+h_c=\frac{ab+bc+ca}{2R}.$$

30. $$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

31. $$\frac{h_a+h_c}{r_b}+\frac{h_b+h_a}{r_c}+\frac{h_c+h_b}{r_a}=6.$$

32. $$\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=\frac{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}.$$

33. $$r_a+r_b+r_c=4R+r.$$

34. $$a(k_b+k_c)+b(k_c+k_a)+c(k_a+k_b)=2pR.$$

35. $$4(k_bk_c+k_ck_a+k_ak_b)=bc+ca+ab-4R(R+r).$$

36. $$9\cdot\overline{GO'}^2=p^2+5r^2-16Rr\ *.$$

37. $$\overline{HO'}^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2.$$

38. $$9\overline{GO}_a^2=p^2+6r_a^2-r^2+4R(3r_a-r)\ **.$$

39. $$\overline{O_aO_b}^2=(r_a+r_b)^2+c^2.$$

40. $$\overline{GO'}^2+\overline{GO}_a^2+\overline{GO}_b^2+\overline{GO}_c^2=16R^2-\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

41. $$\overline{HO'}^2+\overline{HO}_a^2+\overline{HO}_b^2+\overline{HO}_c^2=48R^2-4(a^2+b^2+c^2).$$

42. $$\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}=4.$$

43. $$a^2=(r_a-r)\cdot(r_b+r_c).$$

44. $$O'O_a\cdot O'O_b\cdot O'O_c=16R^2r.$$

45. $$AO_a\cdot BO_b\cdot CC_c=4Rr_a^2.$$

46. $$O_bO_c\cdot O_cO_a\cdot O_aO_b=16R^2p.$$

47. $$d_a^2=R^2+Rr_a.$$

---

* G — точка пересечения медиан, O' — центр вписанной окружности.
** O_a, O_b, O_c — центры вневписанных окружностей, r_a, r_b, r_c — их радиусы.

48. $$d^2+d_a^2+d_b^2+d_c^2=12R^2.$$

49. $$3\left(d^2+d_a^2+d_b^2+d_c^2\right)=4\left(a^2+b^2+c^2\right)+4\cdot\overline{OH}^2.$$

50. $$h_a'+h_b'+h_c'=2(R+r).$$

51. $$k_a+k_b+k_c=R+r.$$

52. $$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=4R^2+h_a'^2+h_b'^2+h_c'^2.$$

53. $$h_b'h_c'+h_c'h_a'+h_a'h_b'=2R\left(h_a''+h_b''+h_c''\right).$$

54. $$a^2+h_a'^2=b^2+h_b'^2=c^2+h_c'^2=4R^2.$$

55. $$4\left(k_a^2+k_b^2+k_c^2\right)=12R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

56. $$s=2R^2\frac{h_ah_bh_c}{abc}.$$

57. $$r_br_c+r_cr_a+r_ar_b=p^2.$$

58. $$r^3=\frac{abc}{(a+b+c)^3}h_ah_bh_c.$$

59. $$\frac{R}{r}=\frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r}-1\right)\left(\frac{r_b}{r}-1\right)\left(\frac{r_c}{r}-1\right).$$

60. $$ar=r_a(r_b+r_c).$$

61. $$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{rr_ar_br_c}.$$

62. $$\frac{r_a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{r_b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{r_c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{4R+r}{p}.$$

63. $$\frac{r_a^2}{(b+c)(a-b)(a-c)}+\frac{r_b^2}{(c+a)(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{r_c^2}{(a+b)(c-a)(c-b)}+\frac{r^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}=\frac{4R}{s}.$$

64. $$\frac{4\left(ar_a^2+br_b^2+cr_c^2\right)+(a+b+c)^3}{(a+b+c)(r_a+r_b+r_c)}=8R.$$

65. $$\frac{a^2}{r_br_c}+\frac{b^2}{r_cr_a}+\frac{c^2}{r_ar_b}=4\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

66. $$\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r}=2(r_a+r_b+r_c).$$

67. $$\frac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_ar_br_c}=\frac{4Rr}{p^2}.$$

68. $$\frac{bc}{AO_a^2}+\frac{ca}{BO_b^2}+\frac{ab}{CO_c^2}=1.$$

69. $$\frac{AO'^2}{bc}+\frac{BO'^2}{ca}+\frac{CO'^2}{ab}=1.$$

70. $$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_a}.$$

71. $$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}.$$

72. $$s=r_ar_b\sqrt{\frac{O_aO_b^2}{(r_a+r_b)^2}-1}.$$

73. $a^2+b^2+c^2+r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=16R^2.$

74. $\dfrac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}=4R.$

75. $\sqrt{\dfrac{rr_br_c}{r_a}}+\sqrt{\dfrac{rr_cr_a}{r_b}}+\sqrt{\dfrac{rr_ar_b}{r_c}}=p.$

76. $k_a=\dfrac{r+r_b+r_c-r_a}{4}.$

77. $\dfrac{R}{2r}=\dfrac{p^2}{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}.$

78. $s=\sqrt{\dfrac{1}{2}Rh_ah_bh_c}.$

79. $\dfrac{l'_al'_bl'_c}{r}=\dfrac{abc}{p}.$

80. $k_a\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)+k_b\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+k_c\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)=6R.$

81. $\dfrac{1}{r_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}.$

82. $\dfrac{CO'\cdot CO_c}{BO'\cdot BO_b}=\dfrac{b}{c}.$

83. $AO'\cdot AO_a=bc.$

84. $AO'^2+BO'^2+CO'^2=bc+ca+ab-12Rr.$

85. Доказать, что отношение суммы квадратов сторон треугольника к сумме квадратов его медиан равно $\frac{4}{3}$.

86. Доказать, что из медиан любого треугольника можно построить треугольник.

87. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

88. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

89. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанного круга.

90. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки от вершин треугольника равна сумме квадратов расстояний центра тяжести треугольника от его вершин, сложенной с утроенным квадратом расстояния данной точки от центра тяжести.

91. Доказать, что условие

$$ab=ch_c.$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $\angle C=90°$.

92. Доказать, что во всяком треугольнике сумма трех его медиан меньше периметра и больше полупериметра.

93. Доказать, что

$$s\geqslant 3\sqrt{3}r^2,$$

где s — площадь треугольника, а r — радиус вписанного в него круга.

94. Доказать, что если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M и соединить ее с противолежащей вершиной B, то

$$BC^2-BM^2=AM\cdot CM.$$

95. Дан треугольник, вписанный в окружность. Доказать, что три дуги, симметричные дугам окружности относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

96. Доказать, что если основания высот треугольника соединить, то получим треугольник, для которого эти высоты будут биссектрисами.

97. Доказать, что площадь остроугольного треугольника равна произведению радиуса описанного круга на полупериметр треугольника, вершины которого — основания высот данного треугольника.

98. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

99. Доказать, что прямая, симметричная с медианой относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

100. Доказать, что в треугольнике со сторонами 3 *см*, 8 *см* и 10 *см* наибольший угол в три раза больше среднего по величине угла.

101. Доказать, что высота треугольника и прямая, соединяющая вершину с центром описанного круга, образуют одинаковые углы с боковыми сторонами.

102. Доказать, что если a — гипотенуза прямоугольного треугольника, b и c — длины катетов, s — площадь и p — полупериметр, то

$$s = p(p-a) = (p-b)(p-c).$$

103. Дан треугольник ABC. На каждой из его сторон построен равносторонний треугольник (во внешнюю сторону). Доказать, что окружности, описанные вокруг этих треугольников, имеют общую точку.

104. Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

105. Доказать, что если у треугольника равны две высоты, то он равнобедренный.

106. Доказать, что угол треугольника будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли противоположная сторона меньше, равна или больше удвоенной соответствующей медианы.

107. Доказать, что треугольник ABC будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли выражение

$$a^2+b^2+c^2-8R^2$$

соответственно положительно, равно нулю или отрицательно.

108. Доказать, что во всяком треугольнике большей стороне соответствует меньшая высота.

109. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка D. Доказать, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки D на боковые стороны, не зависит от выбора точки D на стороне AC.

110. На сторонах AB, AC и BC треугольника, как на основаниях, построены три равнобедренных подобных треугольника: ABP, ACQ, BCR, два первых — вне данного треугольника, а третий — по ту же сторону, что и данный треугольник. Доказать, что $APRQ$ — параллелограмм.

111. Доказать, что если разделить хорду окружности на три равные части и соединить с центром окружности концы хорды и точки деления, то соответствующий центральный угол разделится на три части, одна из которых больше двух других.

112. На радиусе AO окружности (O — центр), как на диаметре, построена вторая окружность и из произвольно взятой на радиусе точки B восставлен к нему перпендикуляр, пересекающий малую и большую полуокружности соответственно в точках C и D. Доказать, что

$$AD^2 = 2AC^2.$$

113. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла.

114. Доказать, что сумма произведений высот остроугольного треугольника на отрезки их от ортоцентра до вершин равна полусумме квадратов сторон. Обобщить это предложение на случай тупоугольного треугольника.

115. Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания. Выяснить, во что переходит указанное равенство в случае равнобедренного треугольника.

116. Доказать, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной вокруг этого треугольника.

117. Две вершины треугольника неподвижны, а третья перемещается по некоторому контуру. Доказать, что центр тяжести данного треугольника описывает контур, подобный данному.

118. Доказать, что для любого треугольника отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам.

119. Доказать, что если в треугольнике между его сторонами a, b и c существует зависимость

$$a^2 = b^2 + bc,$$

то

$$\angle A = 2\angle B.$$

120. Доказать, что из всех треугольников с общим углом при вершине и данной суммой длин боковых сторон равнобедренный треугольник имеет наименьшее основание.

121. Внутри прямоугольного треугольника ABC (C — вершина прямого угла) дана точка O, служащая вершиной равновеликих треугольников OAB, OBC и OCA. Доказать, что

$$OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2.$$

122. Доказать, что прямая, соединяющая основания двух высот треугольника, перпендикулярна радиусу описанного вокруг треугольника круга, идущему в третью вершину.

123. Доказать, что периметр треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника, равен удвоенной площади данного треугольника, разделенной на радиус описанной окружности.

124. Доказать, что произведения расстояний любой точки круга, описанного около треугольника, от одной из его сторон и от противоположной вершины равны между собой.

125. A — острый угол прямоугольного треугольника ABC; AM — медиана, AD — биссектриса. Доказать, что

$$AD < AM.$$

126. В прямоугольный треугольник вписан квадрат $MNPQ$ так, что его вершины M и N лежат на гипотенузе AB, а вершины P и Q — на катетах BC и AC. Доказать, что

$$PN^2 = BN \cdot AM.$$

127. В треугольнике ABC проведена высота AD. Доказать, что разность квадратов боковых сторон равна разности квадратов соответствующих отрезков основания треугольника.

128. В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, c — гипотенуза, h — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник, стороны которого $a+b$, h и $c+h$, также прямоугольный. Какова его гипотенуза?

129. Биссектриса угла B, заключенного между неравными сторонами треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке D. Из середины отрезка BD восставлен к нему перпендикуляр, пересекающий сторону AC (или ее продолжение) в точке E. Доказать, что

$$DE^2 = AE \cdot CE.$$

130. Треугольник вписан в окружность. Доказать, что произведение расстояний любой точки окружности до двух сторон треугольника равно произведению расстояний этой точки до третьей стороны и до касательной, проведенной через вершину, противоположную этой стороне.

131. Доказать, что точки пересечения сторон треугольника с биссектрисами одного внешнего угла и двух внутренних (не смежных с этим внешним) лежат на одной прямой.

132. Доказать для треугольника соотношение

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant a.$$

133. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка P так, что $AP=m$, $PB=n$, $PC=d$. Доказать, что

$$a^2m^2 + b^2n^2 = c^2d^2,$$

где a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы.

134. Через вершины A и B равностороннего треугольника ABC проведена окружность. Через вершины A и C этого же треугольника проведена другая окружность, пересекающая первую в точке P под прямым углом. Доказать, что можно построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны отрезкам $BP=n$ и $CP=p$, гипотенуза — отрезку $AP=m$.

135. На отрезке AB и на его продолжении взяты точки P и Q такие, что

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}.$$

Доказать, что середина H отрезка PQ лежит вне отрезка AB.

136. Доказать, что площадь треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей треугольников, подобных этому треугольнику, построенных на катетах (гипотенуза и катеты являются сходственными сторонами подобных треугольников).

137. Доказать, что если в треугольнике ABC угол A меньше угла C, то биссектриса угла A больше биссектрисы угла C.

138. Периметр треугольника равен 2. Доказать, что

$$\frac{a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 - abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 2$$

(a, b, c — длины сторон треугольника).

139. Доказать, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах любого треугольника и примыкающих к нему извне, служат также вершинами правильного треугольника.

140. Доказать, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты гипотенуз, то треугольники подобны.

141. Доказать, что в треугольнике

$$s = \frac{abc(h_a + h_b + h_c)}{2(ab + bc + ca)}.$$

142. Если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью d, то

$$b^2 - 4d^2 = 12r^2,$$

где b — средняя по величине сторона треугольника, а r — радиус вписанного круга.

143. Доказать, что если стороны остроугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то сумма расстояний от центра описанного круга до большей и меньшей сторон равна диаметру вписанного круга.

144. Доказать, что если стороны тупоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то разность расстояний от центра описанного круга до меньшей и большей сторон треугольника равна диаметру вписанного круга.

145. Доказать, что во всяком треугольнике сумма расстояний от центра описанного круга до сторон треугольника равна сумме радиусов кругов вписанного и описанного.

146. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками прикосновения вневписанных окружностей, касающихся противоположных сторон, проходят через одну точку (точка Нагеля).

147. Доказать, что если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то точка Нагеля (см. № 146) лежит на прямой, соединяющей центр тяжести треугольника с центром вписанного круга.

148. Доказать, что в треугольнике, у которого разность углов при основании равна 90°, биссектриса внутреннего угла при вершине равна биссектрисе внешнего угла.

149. На прямой даны три точки: A, B и C (точка B лежит между A и C). На отрезках AB и BC по одну сторону от прямой построены равносторонние треугольники ABC_1 и BCA_1. Точки M и N — середины отрезков AA_1 и CC_1. Доказать, что треугольник BMN — равносторонний.

150. В треугольнике ABC прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке O (точки P, Q и R лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB). Для того чтобы имели место равенства

$$\frac{AO}{OP} = \frac{BO}{OQ} = \frac{CO}{OR},$$

необходимо (и достаточно), чтобы AP, BQ и CR были медианами треугольника ABC (доказать).

151. Доказать, что центр тяжести системы из трех однородных отрезков, образующих треугольник ABC, лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника PQR, где P, Q, R — соответственно середины сторон BC, CA и AB.

152. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса проходит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины (исключается случай равнобедренного треугольника).

153. Доказать, что если стороны треугольника $a < b < c$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$ac = 6Rr.$$

154. Доказать вычислением, что если биссектрисы двух внутренних углов треугольника равны между собой, то треугольник — равнобедренный.

155. Доказать, что для всякого треугольника выполнено соотношение

$$\frac{p_1}{p} = \frac{r}{R},$$

где p — полупериметр данного треугольника, p_1 — полупериметр треугольника, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.

156. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB и BC построены по одну сторону от прямой AC равносторонние треугольники ABD и BCD_1. Пусть M и N — середины отрезков DC и D_1A. Доказать, что треугольник MNB равносторонний.

157. Около треугольника ABC со сторонами a, b, c описана окружность. Обозначим через m, n, p соответственно расстояния от какой-нибудь точки окружности до сторон a, b, c треугольника. Доказать, что

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}+\frac{c}{p}.$$

158. Стороны треугольника равны:

$$a=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1,$$
$$b=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n,$$
$$c=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n.$$

Доказать, что a, b, c — целые числа (n — целое положительное число). Вычислить площадь этого треугольника и доказать, что она выражается целым числом.

159. Треугольник ABC движется на плоскости таким образом, что его стороны AB и BC все время касаются двух окружностей. Доказать, что сторона AC треугольника тоже касается некоторой окружности.

160. Доказать, что для того, чтобы треугольник со сторонами a, b, c был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{a}{b}=\frac{l_b}{l_a}\sqrt{\frac{a+c}{b+c}},$$

где l_b и l_a — длины биссектрис углов A и B.

161. Доказать, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, то необходимым и достаточным условием пересечения в одной точке трех перпендикуляров к сторонам треугольника, восставленных в точках A_1, B_1 и C_1, является равенство

$$AC_1^2+BA_1^2+CB_1^2=B_1A^2+C_1B^2+A_1C^2.$$

162. Доказать, что если два круга радиусов R и r расположены так, что расстояние между их центрами равно $\sqrt{R^2-2rR}$, то можно построить бесконечное множество треугольников, вписанных в один круг и касающихся другого.

163. Доказать, что если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то биссектриса внутреннего угла, противолежащего средней стороне, перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанного и описанного кругов.

164. Доказать, что если в треугольнике линия центров вписанной и описанной окружностей перпендикулярна одной из биссектрис внутреннего угла треугольника, то стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию.

165. Доказать, что если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен $\frac{1}{3}$ высоты, опущенной на среднюю сторону.

166. Доказать, что если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то прямая, соединяющая центр тяжести треугольника с центром вписанного круга, параллельна средней стороне.

167. Доказать, что если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то $r_b=h_b$, где b — средняя по величине сторона треугольника, h_b — высота на нее и r_b — радиус вневписанного круга, касающегося этой стороны.

168. В треугольнике ABC возьмем на основании BC или на его продолжении произвольным образом точку D и опишем вокруг треугольников ABD и ACD окружности. Доказать, что отношение радиусов этих окружностей есть величина постоянная. Найти такое положение точки D, для которого эти радиусы будут иметь наименьшую величину.

169. Доказать, что проекции вершины одного из углов треугольника на четыре биссектрисы (внутренние и внешние) двух других его углов лежат на одной прямой.

170. Доказать, что прямые, симметричные относительно сторон треугольника с какой-либо прямой, проходящей через его ортоцентр, пересекаются в одной точке.

171. Доказать, что перпендикуляры к биссектрисам треугольника, в их серединах пересекаются с противоположными сторонами в точках, лежащих на одной прямой.

172. Доказать, что биссектрисы равных углов подобных треугольников пропорциональны сходственным сторонам.

173. Доказать, что медианы, проведенные к сходственным сторонам подобных треугольников, пропорциональны сходственным сторонам.

174. В равнобедренном треугольнике $ABC\,(AB = BC)$ проведена высота AD. Доказать, что

$$DC \cdot BC = \frac{1}{2} AC^2.$$

175. Доказать, что если две стороны и высота, проведенная к третьей стороне одного треугольника, пропорциональны двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне другого треугольника, то такие треугольники подобны.

176. В треугольник вписана окружность. Вокруг нее описан квадрат. Доказать, что вне треугольника лежит меньше половины периметра квадрата.

177. Доказать, что если в треугольнике ABC угол $C = 120°$, то из отрезков 1) $a, c, a+b$ и 2) b, c и $a+b$ можно построить треугольник. Определить один из углов этого треугольника.

178. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены прямые, соответственно параллельные его сторонам a, b, c. Доказать, что отрезки a', b' и c' этих прямых, ограниченные сторонами треугольника, удовлетворяют соотношению

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2.$$

179. Доказать, что если a, b, c — стороны треугольника ABC, k_a, k_b, k_c — биссектрисы углов этого треугольника, m и n; p и q; s и t — отрезки, на которые биссектрисы делят соответственно стороны a, b, c, то

$$a\left(k_a^2 + mn\right) = b\left(k_b^2 + pq\right) = c\left(k_c^2 + st\right).$$

180. Доказать, что если точка M есть середина отрезка AB, то для любой точки C, лежащей на прямой AB, отрезок CM равен полуразности отрезков AC и BC, если C лежит между A и B; CM равен полусумме AC и BC, если C лежит на продолжении отрезка AB.

181. Доказать, что если из вершин треугольника ABC опустить перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 на произвольную прямую l, лежащую в плоскости этого треугольника, и из оснований A_1, B_1, C_1 этих перпендикуляров вновь опустить перпендикуляры на стороны BC, CA и AB, то эти последние перпендикуляры пересекутся в одной точке.

182. AF — медиана треугольника ABC. Из вершины B и из точки M пересечения медиан опущены перпендикуляры BD и ME на сторону AC. Доказать, что

$$AD - CD = 3\,(AE - CE).$$

183. Доказать, что прямая BD, делящая сторону AC треугольника ABC на части, пропорциональные сторонам AB и BC, есть биссектриса угла B.

184. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены квадраты; вершина D, противолежащая вершине B первого квадрата, соединена с вершиной E, противолежащей вершине C второго квадрата. Доказать, что

$$DE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2).$$

185. Из произвольно взятой на плоскости точки M опущены перпендикуляры на стороны данного треугольника. Доказать, что сумма квадратов трех отрезков сторон треугольника, взятых через один, равна сумме квадратов остальных трех отрезков.

186. В остроугольном треугольнике ABC проведены три высоты: AE, BF и CD. Доказать, что отрезки DE, EF и DF, соединяющие основания высот треугольника, образуют с его сторонами треугольники, подобные данному.

187. Доказать, что для любого треугольника

$$s \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

где s — его площадь, а p — полупериметр. При каком условии имеет место знак равенства?

188. Доказать для треугольника соотношение

$$\frac{h_1 h_2 h_3}{b_1 b_2 b_3} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{16pR^2},$$

где h_1, h_2, h_3 — высоты, b_1, b_2, b_3 — биссектрисы, p — полупериметр, R — радиус описанной окружности, a, b, c — стороны.

189. Из точки D, взятой на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC, восставлен перпендикуляр, который пересекает катет BA, описанную вокруг этого треугольника окружность и продолжение другого катета соответственно в точках K, E и F. Доказать, что

$$KD \cdot DF = DE^2.$$

190. Доказать, что произведение $AB \cdot BC$ двух сторон треугольника ABC равно произведению высоты BD на диаметр описанной вокруг треугольника окружности.

191. Доказать, что во всяком треугольнике расстояние между центрами круга, описанного вокруг треугольника и вписанного в треугольник, определяется равенством

$$l^2 = R(R - 2r),$$

где r — радиус вписанного, а R — радиус описанного круга.

192. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника; A, B, C — величины противоположных углов. Доказать, что

$$Aa + Bb + Cc \geqslant \frac{1}{2}(Ab + Ba + Ac + Ca + Bc + Cb).$$

193. Через точку O плоскости проведены четыре луча (т. е. полупрямые): OA, OB, OC, OD. Проведена произвольная прямая l, пересекающая эти лучи соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что при любом положении прямой l выражение

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} : \frac{A_1D_1}{D_1B_1}$$

имеет одно и то же числовое значение.

194. Точка M лежит внутри треугольника. Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны x, y, z, а соответствующие высоты треугольника равны a, b, c. Доказать, что

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(следствие из теоремы Жергона).

195. Внутри треугольника ABC взята точка O. Прямые AO, BO, CO пересекают стороны BC, CA и AB соответственно в точках P, Q, R. Доказать, что

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1.$$

Сформулировать и доказать обратную теорему

196. Доказать, что

$$Ra\sqrt{4R^2-a^2}+Rb\sqrt{4R^2-b^2}+Rc\sqrt{4R^2-c^2}=abc,$$

где a, b, c — стороны треугольника, а R — радиус описанного круга.

197. Из точки M, взятой внутри прямоугольного треугольника ABC, проведены перпендикуляры MX, MY и MZ соответственно на гипотенузу AB и на катеты BC и AC. Доказать, что $aa_1+bb_1+cc_1=c^2$, где $a_1=BY$, $B_1=CZ$, $c_1=AX$, а c — длина гипотенузы.

198. В плоскости равностороннего треугольника со стороной a дана точка, расстояния которой до вершин треугольника равны m, n и p. Доказать, что

$$a^4+m^4+n^4+p^4=a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2.$$

199. Все углы треугольника ABC разделены на три равные части прямыми l, l'; m, m' и n, n'. Точки пересечения прямых l' и m; m' и n; n' и l обозначим соответственно через P, Q и R. Доказать, что треугольник PQR правильный.

200. Доказать равенство

$$\frac{d_1d_2d_3}{r}=\frac{abc}{p},$$

где d_1, d_2, d_3 — расстояния от центра вписанной окружности (r — ее радиус) до вершин треугольника.

201. В треугольнике ABC сторона $BC=2AC$. Доказать, что медиана AD этого треугольника делит пополам угол между стороной AB и медианой AE треугольника ADC.

202. Доказать, что если стороны треугольника пересечь прямой, то произведение всех отрезков сторон, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков (теорема Карно).

203. Доказать, что прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из ортоцентра треугольника ABC на биссектрисы угла A, делит BC пополам.

204. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ сумма углов A и A' равна 180°, а углы B и B' равны. Доказать, что $aa'=bb'+cc'$.

205. Доказать, что если один из углов прямоугольного треугольника равен 15°, то произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы.

206. В серединах E и F сторон AB и AC треугольника ABC восставлены перпендикуляры

$$EP=\frac{AB}{2}\quad\text{и}\quad FM=\frac{AC}{2}$$

во внешнюю сторону треугольника. Доказать, что $DP=DM$, если D — середина стороны BC.

207. Доказать для треугольника соотношение

$$(b+c)\sqrt{4R^2-a^2}+(c+a)\sqrt{4R^2-b^2}+(a+b)\sqrt{4R^2-c^2}=4pR.$$

208. Доказать, что если стороны треугольника выражаются тремя последовательными целыми числами, то между радиусами описанного и вписанного кругов существует соотношение

$$R=2r+\frac{1}{2r}.$$

209. В окружность (O) вписан правильный треугольник $A_1A_2A_3$. Окружность (O') касается окружности (O). Отрезки касательных, проведенных из вершин треугольника к окружности (O'), равны a_1, a_2, a_3. Доказать, что эти отрезки удовлетворяют соотношению

$$a_1^4+a_2^4+a_3^4=2\left(a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2+a_1^2a_2^2\right).$$

210. На прямой даны три равных отрезка: $AB=CD=BC$. Через точку S, не лежащую на данной прямой, проведены прямые SA, SB, SC, SD. Произвольная прямая, не проходящая через S, пересекает эти прямые в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что

$$\frac{AA_1}{A_1S}+\frac{DD_1}{D_1S}=\frac{BB_1}{B_1S}+\frac{CC_1}{C_1S}.$$

211. На стороне AC треугольника ABC взята точка D. Через точки A, B, D и B, C, D проведены окружности. Доказать, что диаметры этих окружностей пропорциональны тем сторонам треугольника, которые для них являются хордами.

212. Доказать, что если из произвольной точки, взятой внутри треугольника ABC, опустить перпендикуляры на его стороны: $OP\perp AC$, $ON\perp BC$ и $OM\perp AB$, то отрезки, на которые основания перпендикуляров делят стороны: $AP=u$, $PC=v$, $CN=t$, $NB=z$, $BM=y$, $AM=x$, находятся в следующей зависимости:

$$b(u-v)+a(t-z)+c(y-x)=0.$$

213. Доказать геометрически, что если в треугольнике две биссектрисы внутренних углов равны, то он равнобедренный.

214. Доказать, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот, заключенных между каждой из вершин и точкой пересечения высот, представляют собой девять точек, лежащих на одной окружности (окружность Эйлера), центр которой лежит на середине отрезка, соединяющего точку пересечения высот данного треугольника с центром описанного круга и радиус которой равен половине радиуса описанного круга.

215. На сторонах AB и AC треугольника отложим в противоположных направлениях два равных отрезка: $BD=CE$. Доказать, что отрезок DE делится стороной BC в отношении, обратном отношению сторон AB и AC.

216. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O. Пусть P, Q и R — точки, в которых прямые AO, BO и CO пересекают соответственно стороны BC, CA и AB. На продолжении сторон BC, CA и AB взяты точки P', Q', R' такие, что

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BP'}{P'C},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{CQ'}{Q'A},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{AR'}{R'B}.$$

Доказать, что точки P', Q', R' лежат на одной прямой.

217. Доказать, что точка M пересечения медиан треугольника, центр O описанного круга и точка H пересечения высот лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем

$$OM:MH=1:2.$$

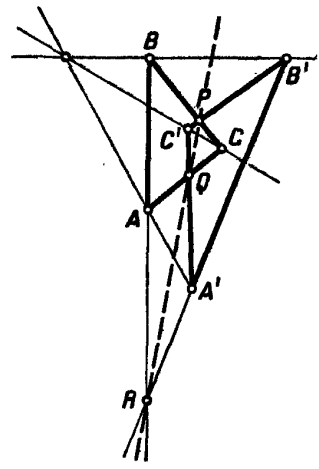
218. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, а H — точка их пересечения. Доказать, что

$$AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1.$$

219. Доказать, что если прямые AA', BB' и CC', проходящие через соответственные вершины треугольников ABC и $A'B'C'$, проходят через одну точку, то точки P, Q, R пересечения соответственных сторон этих треугольников

BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$

лежат на одной прямой (черт. 56) (теорема Дезарга).



Черт. 56.

Указание. Спроектировать из точки данную конфигурацию в другую плоскость так, чтобы прямые AB и $A'B'$, а также AC и $A'C'$ спроектировались в две параллельные прямые. Тогда и прямые BC и $B'C'$ спроектируются в две параллельные прямые.

220. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме, сформулированной в предыдущей задаче.

221. Проведем две прямые, пересекающие стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Проведем прямые A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 и назовем точки их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и CA треугольника через C_{12}, A_{12}, B_{12}. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой. Проведем прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 и обозначим через C_{21}, A_{21}, B_{21} точки их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и CA. Доказать, что точки C_{21}, A_{21}, B_{21} также лежат на одной прямой.

222. Доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо соотношение

$$(2s)^2 = h_a h_b AH \cdot HB + h_b h_c BH \cdot HC + h_c h_a CH \cdot HA,$$

где s — площадь треугольника ABC, h_a, h_b и h_c — его высоты, а H — точка пересечения высот.

223. Доказать, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

224. В треугольнике ABC проведены прямые AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в одной точке O_1 (точка A_1 лежит на стороне BC и т. д.) Кроме того, проведены прямые BB_2, AA_2 и CC_2, также пересекающиеся в одной точке O_2. Проведем следующие прямые:

через точку пересечения прямых BB_1 и CC_2 — прямую AA_{12};
то же CC_1 и AA_2 — прямую BB_{12};
» » AA_2 и BB_1 — прямую CC_{21};
» » BB_2 и CC_1 — прямую AA_{21};
» » CC_2 и AA_1 — прямую BB_{21};
» » AA_1 и BB_2 — прямую CC_{12}

(точки C_{12} и C_{21} лежат на AB, точки A_{12} и A_{21} лежат на BC, точки B_{12} и B_{21} лежат на AC). Доказать, что прямые AA_{12}, BB_{12}, CC_{12} проходят через одну точку. Доказать, что прямые AA_{21}, BB_{21}, CC_{21} также проходят через одну точку.

225. Доказать, что если высоты треугольника ABC пересекаются (при продолжении) с описанной окружностью в точках A', B', C', то точки пересечения прямых $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ со сторонами AB, BC и CA лежат на одной прямой (теорема Брокара).

226. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр тяжести треугольника и центр круга, вписанного в него, находятся на прямой, параллельной средней (по величине) стороне (теорема Лезана).

227. Доказать, что если соединить вершины треугольника ABC с произвольной точкой M описанной окружности и обозначить через A', B', C' точки пересечения сторон BC, CA и AB с прямыми AM, BM и CM, то ортоцентр треугольника $A'B'C'$ совпадает с центром круга, описанного вокруг треугольника ABC (теорема Брокара).

228. Доказать, что треугольник, образованный основаниями биссектрис данного треугольника, будет прямоугольным тогда и только тогда, когда один из углов данного треугольника равен 120°.

229. Доказать, что если H — ортоцентр треугольника ABC, то треугольники ABC, AHB, BHC и CHA имеют общую окружность (O_9) Эйлера (Гамильтон).

230. Доказать, что во всякий треугольник можно вписать два таких треугольника, стороны которых параллельны биссектрисам углов данного треугольника. Доказать, что оба эти треугольника имеют общую окружность Эйлера.

231. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника из какой-либо точки описанной окружности, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

232. Доказать, что отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника с какой-либо точкой описанной окружности, делится пополам прямой Симпсона, соответствующей этой точке.

233. Доказать, что прямые Симпсона, соответствующие концам диаметра круга, описанного около треугольника, взаимно перпендикулярны и пересекаются на окружности Эйлера.

234. Стороны треугольника неограниченно уменьшаются. Справедливо ли утверждение, что при этом радиус описанного вокруг этого треугольника круга также будет неограниченно уменьшаться?

235. Может ли быть правильным треугольник, расстояния вершин которого от двух данных взаимно перпендикулярных прямых выражаются целыми числами?

236. Существует ли треугольник, длины сторон которого выражаются тремя последовательными целыми числами, наибольший внутренний угол которого в два раза больше наименьшего внутреннего угла этого треугольника?

237. Доказать, что для всякого прямоугольного треугольника имеет место соотношение

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2,$$

где l — произвольный линейный элемент данного треугольника, а l_1 и l_2 — сходственные элементы треугольников, на которые разбивает его высота, опущенная на гипотенузу.

238. Из основания высоты прямоугольного треугольника под углом 45° к гипотенузе проведены две прямые до пересечения с катетами. Доказать, что отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с катетами, равен биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла данного треугольника.

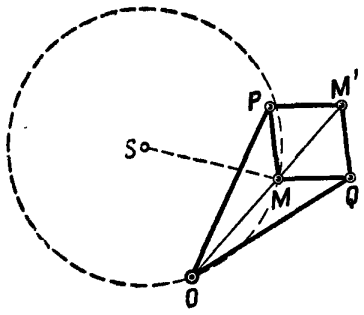
239. Доказать, что если стороны треугольника ABC связаны соотношением $b^2 + c^2 = 5a^2$, то медианы, выходящие из вершин B и C, взаимно перпендикулярны.

240. На отрезке MN, соединяющем основания внутренних биссектрис AM и BN треугольника ABC, взята произвольная точка P, из которой опущены перпендикуляры PD, PC и PF соответственно на стороны BC, CA и AB треугольника. Доказать, что $PF = PD + PE$.

§ 2. Многоугольники

1. Доказать, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.
2. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов непараллельных сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.
3. Диагонали AC и BD вписанного в круг четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Доказать, что
$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot CD} = \frac{BE}{ED}.$$
4. Отрезки AB и CD пересекаются при их продолжении в точке M. Доказать, что если $AM \cdot BM = MC \cdot MD$, то вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.
5. Доказать, что если вокруг четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность, то его площадь равна корню квадратному из произведения его сторон.
6. Внутри равнобедренной трапеции $ABCD$ дана произвольная точка M. Доказать, что из отрезков MA, MC, MB, MD можно построить четырехугольник.
7. В параллелограмме проведены биссектрисы углов между диагоналями. Доказать, что точки пересечения биссектрис со сторонами параллелограмма суть вершины некоторого ромба.
8. Доказать, что при пересечении биссектрис внутренних углов параллелограмма получается прямоугольник, диагонали которого равны разности двух смежных сторон параллелограмма.
9. Доказать, что из всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вокруг которого можно описать окружность.
10. Доказать, что прямая, соединяющая точки пересечения непараллельных сторон трапеции и ее диагоналей, делит основания трапеции пополам.
11. На сторонах выпуклого четырехугольника построены подобные равнобедренные треугольники так, что третьи вершины двух из них (противоположных друг другу) находятся вне четырехугольника, а двух других — внутри него. Доказать, что эти четыре вершины служат вершинами параллелограмма.
12. Доказать, что произведение длин перпендикуляров, опущенных из какой-нибудь точки окружности на две противоположные стороны вписанного в нее четырехугольника, равно произведению длин перпендикуляров, опущенных из той же точки на две другие стороны этого четырехугольника.
13. Доказать, что из всех четырехугольников с данными диагоналями a и b и данным углом α между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.
14. Доказать, что для четырехугольника $ABCD$ соотношение $AB^2 \cdot OC \cdot OD + BC^2 \cdot OA \cdot OD + CD^2 \cdot OA \cdot OB + AD^2 \cdot OB \cdot OC = AC \cdot BD\,(OB \cdot OD + OA \cdot OC)$, где O — точка пересечения диагоналей.
15. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD и стороны BC и CD соответственно в точках E, F и K. Доказать, что
$$AE^2 = EF \cdot EK.$$
16. На сторонах квадрата $ABCD$ от его вершин отложены отрезки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = x$. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат. При каком значении x сторона квадрата $A_1B_1C_1D_1$ будет наименьшей?

17. Пусть OP, OQ, PM, PM', QM, QM' — шесть твердых стержней, соединенных друг с другом с помощью шарниров, причем точка O неподвижна. Доказать, что если точка M описывает окружность, проходящую через точку O, то точка M' описывает прямую линию (инверсор Поисселе; (черт. 57).



Черт. 57.

18. Доказать, что сумма площадей параллелограммов, построенных на двух сторонах треугольника, равна площади параллелограмма, построенного на третьей стороне треугольника так, что его вторая сторона равна и параллельна отрезку, соединяющему общую вершину двух первых параллелограммов с точкой пересечения продолжений их сторон, не имеющих общих точек со сторонами треугольника.

19. Доказать, что если на сторонах четырехугольника построить квадраты, то центры этих квадратов образуют четырехугольник, диагонали которого равны и взаимно-перпендикулярны.

20. Доказать, что если четырехугольник, длины сторон которого a, b, c, d, вписан в окружность радиуса R, то $ad(a\sqrt{4R^2-d^2}+d\sqrt{4R^2-a^2})+bc(b\sqrt{4R^2-c^2}+c\sqrt{4R^2-b^2})=ab(a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{4R^2-a^2})+cd(c\sqrt{4R^2-d^2}+d\sqrt{4R^2-c^2})$.

21. Дан четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность и вокруг которого можно описать окружность. Доказать, что сумма расстояний центра описанной окружности от сторон четырехугольника равна сумме радиусов окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC, CMD, DMA, где M — точка пересечения диагоналей четырехугольника.

22. Середины сторон AB и CD, BC и DE выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Середины полученных отрезков вновь соединены. Доказать, что отрезок, их соединяющий, параллелен отрезку AE и равен $\frac{1}{2}AE$.

23. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Доказать, что отрезок прямой между непараллельными сторонами точкой пересечения диагоналей делится пополам.

24. Доказать, что вершины подобных равнобедренных треугольников, построенных на сторонах четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, служат вершинами четырехугольника с равными диагоналями (Нейберг).

25. Доказать, что сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом расстояния между серединами диагоналей (Эйлер).

26. Через точку B, в которой пересекаются две противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, проведена к окружности касательная BT(T — точка касания). Доказать, что если одна диагональ четырехугольника параллельна касательной, то другая диагональ делит отрезок BT пополам.

27. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, то эти последние стороны параллельны.

28. Доказать, что если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ провести внутренние биссектрисы, то четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на окружности.

29. Доказать, что диагонали четырехугольника взаимно-перпендикулярны, если его последовательные стороны a, b, c, d удовлетворяют соотношению $c^2-d^2=b^2-a^2$ ($b>a$, $c>d$).

30. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют также квадрат.

31. Доказать, что разность между суммой квадратов расстояний произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин параллелограмма и суммой квадратов расстояний от той же точки до двух других вершин есть величина постоянная.

32. $ABCD$ — параллелограмм. Пусть l и m лучи, выходящие из вершины A и идущие по его сторонам AD и AB, а n — луч, выходящий из вершины A и идущий по диагонали AC. Пусть P, Q, R — точки, в которых произвольная прямая пересекает лучи l, m и n. Доказать, что

$$\frac{AD}{AP}+\frac{AB}{AQ}=\frac{AC}{AR}.$$

33. Доказать, что если диагонали четырехугольника равны между собой, то биссектрисы углов между ними параллельны прямым, проходящим через середины противоположных сторон.

34. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — соответственно радиусы окружностей, вписанных в ломаные $DABC$, $ABCD$, $BCDA$ и $CDAB$.

Доказать, что

$$\frac{AB}{r_1}+\frac{CD}{r_3}=\frac{BC}{r_2}+\frac{AD}{r_4}.$$

35. Доказать, что для четырехугольника, который одновременно может быть вписан в окружность и описан вокруг нее, справедливо соотношение

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2},$$

где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей, а d — расстояние между их центрами.

36. Доказать, что если в квадрат вписать прямоугольник с неравными сторонами, то диагонали квадрата будут служить его осями симметрии (на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника).

37. Дана трапеция $ABCD$. Доказать, что имеют место соотношения

$$\frac{AO\cdot OC}{AC^2}=\frac{OB\cdot OD}{BD^2} \quad \text{и} \quad \frac{OA\cdot OD}{AD^2}=\frac{OB\cdot OC}{BC^2},$$

где O — точка пересечения диагоналей трапеции.

38. Доказать, что прямые, соединяющие середины диагоналей каждого из пяти четырехугольников, составленных пятью прямыми, пересекаются в одной точке.

39. Доказать, что прямые, соединяющие каждую из вершин четырехугольника с центром тяжести треугольника, образованного тремя остальными вершинами, пересекаются в одной точке.

40. Через середину каждой диагонали четырехугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали; точка пересечения этих прямых соединена с серединами сторон четырехугольника. Показать, что последними четырьмя прямыми данный четырехугольник разбивается на четыре равновеликие части.

41. Доказать, что всякий четырехугольник, не являющийся параллелограммом, можно спроектировать (из точки) в квадрат.

42. В треугольнике из основания каждой высоты опущены перпендикуляры на две другие стороны. Доказать, что:

а) основания этих перпендикуляров являются вершинами шестиугольника, три из сторон которого параллельны сторонам треугольника;

б) вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

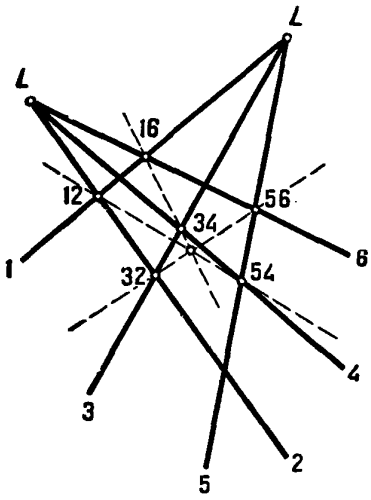
43. Даны треугольники ABC и DEF, а также точка O. Берется любая точка X в треугольнике ABC и любая точка Y в треугольнике DEF. Треугольник OXY достраивается до параллелограмма $OXYZ$. Доказать, что все полученные таким образом точки образуют многоугольник. Сколько сторон он имеет? Доказать, что его периметр равен сумме периметров исходных треугольников.

44. В произвольном шестиугольнике соединены, через одну, середины сторон. Доказать, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

45. Дан выпуклый многоугольник. Внутри взята произвольная точка M. Из точки M опускаются перпендикуляры на стороны многоугольника или на их продолжение. Доказать, что по крайней мере один перпендикуляр пересечет сторону многоугольника, а не ее продолжение.

46. Доказать, что к квадрату нельзя приложить более 8 не налегающих друг на друга квадратов такого же размера.

47. Доказать, что если у шестиугольника противоположные стороны параллельны и три диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны, то вокруг него можно описать окружность.



Черт. 58.

48. A, B, C, D — четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Доказать, что

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

49. Через произвольные точки L и L' проведены прямые: 1, 3, 5 через точку L и 2, 4, 6 через точку L'. Доказать, что три прямые, каждая из которых проходит через пару точек:

16 и 34,
56 и 32,
54 и 12,

проходят через одну точку.

Замечание. 15, 32, 56 и т. д. — точки, в которых пересекаются прямые 1 и 6; 3 и 2; 5 и 6 и т. д. Каждая из прямых 1, 2, 3, 4, 5, 6 предполагается отличной от прямой LL' (черт. 58).

50. Из каждой вершины квадрата как из центра проведена окружность радиуса, равного стороне квадрата. Доказать, что фигура, полученная в пересечении четырех кругов, может вращаться внутри треугольника так, что все время каждая из сторон треугольника будет иметь одну общую точку с периметром фигуры.

§ 3. Окружность

1. Доказать, что расстояние любой точки окружности от какой-либо ее хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями этой точки от касательных к кругу в концах взятой хорды.

2. Доказать, что произведение расстояний какой-либо точки окружности, описанной вокруг треугольника до его сторон, равно произведению расстояний этой же точки до касательных, проведенных в вершинах этого треугольника.

3. Доказать, что четыре окружности, описанные вокруг четырехугольников, образованных четырьмя прямыми, имеют общую точку.

4. Доказать, что расстояния от любой окружности, описанной вокруг правильного треугольника, до одной из его вершин равно сумме расстояний этой точки до двух других вершин.
5. Доказать, что точка G пересечения медиан треугольника, центр O' вписанной окружности и центр O'' окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого служат середины сторон данного, лежат на одной прямой.
6. MA и MB — две касательные к окружности (A и B — точки касания), BC — диаметр, AD — перпендикуляр к диаметру. Доказать, что прямая CM делит отрезок AD в точке E пополам.
7. Центр O данной окружности соединен с точкой C, произвольно взятой на данной хорде AB. Доказать, что

$$OC^2 + AC \cdot BC = R^2.$$

8. На продолжении общей хорды двух пересекающихся окружностей взята точка и из нее проведены касательные к обеим окружностям. Доказать, что части касательных от их общей точки до точек касания равны.
9. Из данной точки M, лежащей вне окружности с центром O, проведена секущая MAB. Доказать, что

$$MO^2 - MB \cdot MA = R^2.$$

10. Доказать, что если R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной в треугольник ABC окружности, то имеет место соотношение

$$OA \cdot OB \cdot OC = 4Rr^2,$$

где O — центр вписанной в треугольник окружности.
11. Даны круг и касательная к нему AP в точке A. Проведены диаметр AB и хорды BC и BD по одну сторону от диаметра AB. В точках C и D проведены касательные к кругу; пусть E — точка их пересечения. Хорды BC и BD продолжены до пересечения с AP в точках M и H. Доказать, что медиана стороны MH треугольника BMH проходит через точку E.
12. На касательной к окружности даны точки B и C, симметрично расположенные относительно точки касания A. Через эти точки проведены две произвольные секущие, из которых одна встречает окружность в точках M и N, а другая — в точках P и Q. Доказать, что прямые MQ и PN пересекают касательную в точках E и F, симметрично расположенных относительно точки A.
13. В круг вписаны трапеция, основанием которой служит диаметр, и равнобедренный треугольник, стороны которого параллельны сторонам трапеции. Доказать, что треугольник и трапеция равновелики.
14. Из точки K, делящей пополам дугу окружности, стягиваемую хордой AB, проведены хорды, пересекающие хорду AB. Доказать, что произведение каждой такой хорды на ее отрезок от точки K до точки пересечения с хордой AB равно квадрату хорды AK, стягивающей половину дуги AKB.
15. Доказать, что если через одну из точек пересечения двух окружностей провести диаметр в каждой окружности, то прямая, соединяющая другие концы этих диаметров, пройдет через вторую точку пересечения тех же окружностей.
16. Внутри окружности с центром O_1 дана точка O. Через нее проведены диаметр OO_1 и перпендикулярная к нему хорда GK. Если теперь через точку O провести произвольные хорды AB и CD и соединить их концы, то хорды AC и BD отсекут на CK отрезки OF и OE, равные между собой.
17. В четырехугольник можно вписать окружность радиуса r и описать вокруг него окружность радиуса R. Доказать, что

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2),$$

где d — расстояние между центрами окружностей.

18. На окружности, описанной вокруг треугольника ABC, выберем произвольную точку M. Обозначим через MA, MB и MC расстояния от точки M до вершин A, B и C, а через MD, ME и MF — расстояния от точки M до сторон BC, CA и AB. Доказать, что

$$MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF.$$

19. Доказать, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника, в 2 раза больше радиуса окружности, проходящей через основания высот этого треугольника.

20. Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей описанного четырехугольника, проходит через центр вписанного круга (Ньютон).

21. Доказать, что сумма квадратов расстояний от двух точек, расположенных на диаметре на одинаковом расстоянии от центра до любой точки окружности, есть величина постоянная.

22. Доказать, что геометрическое место точек, расстояния которых до данных точек A и B находятся в данном отношении $\frac{p}{q} \neq 1$, есть окружность с центром на прямой AB. Выразить через AB диаметр этой окружности. Исследовать также случай $p = q$.

23. Три окружности с центрами O_1, O_2 и O_3 проходят через одну точку O. Другие точки пересечения окружностей (O_1) и (O_2); (O_2) и (O_3); (O_3) и (O_1) соответственно — A, B и C. Из произвольной точки M окружности (O_1) проведены секущие MAP и MCQ [P и Q — точки соответственно на (O_2) и (O_3)]. Доказать, что точки P, B и Q лежат на одной прямой.

24. Доказать, что точка G пересечения медиан треугольника, центр O' вписанной окружности и точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника A, B, C с точками прикосновения к сторонам BC, CA и AB окружностей (O_a), (O_b), (O_c), лежат на одной прямой.

25. Доказать, что если из концов диаметра круга провести две пересекающиеся хорды, то сумма произведений каждой хорды на ее отрезок от концов диаметра до точки пересечения есть величина постоянная.

26. Из точки C, лежащей на диаметре AB окружности, проведены касательные CP и CQ. Пусть D — точка пересечения PQ и AB, а H — середина CD. Доказать, что

$$CH^2 = HA \cdot HB.$$

27. Из точки вне окружности проведены две касательные, и точки касания соединены. Доказать, что расстояние от любой точки окружности до этой хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от этой точки до касательных.

28. Точка C лежит вне окружности. Пусть CAB — произвольная секущая, а D — такая точка этой секущей, что $AC : CB = AD : DB$. Доказать, что геометрическое место точек D есть отрезок PQ (см. № 26).

29. Из точки M, взятой внутри угла A на окружности, описанной вокруг треугольника ABC, проведены перпендикуляры к сторонам треугольника. Длины этих перпендикуляров p_a, p_b и p_c. Доказать, что

$$\frac{a}{p_a} = \frac{b}{p_b} + \frac{c}{p_c}.$$

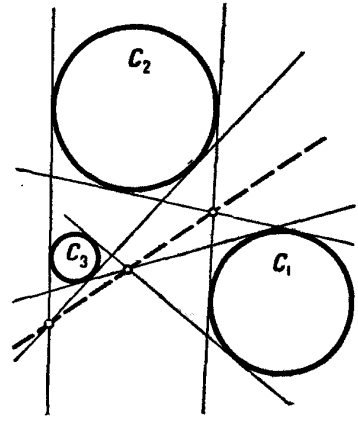
30. Из произвольно взятой точки диаметра окружности проведены два отрезка. Один отрезок проведен перпендикулярно диаметру до пересечения с окружностью, другой соединяет взятую на диаметре точку с серединой полуокружности. Доказать, что сумма квадратов этих отрезков равна удвоенному квадрату радиуса.

31. AB и CD — две пересекающиеся в точке E хорды окружности, центр которой O, F — середина хорды AB. Доказать: 1) что $FE^2+CE\cdot DE=AF^2$; 2) что если хорда CD пересекает хорду AB под углом 45° и проходит через центр, то $AF^2+EF^2=R^2$, где R — радиус окружности.

32. Из точки C окружности на хорду AB опущен перпендикуляр CD. Из концов хорды опущены перпендикуляры AE и BF на касательную к окружности в точке C. Доказать, что

$$CD^2=AE\cdot BF.$$

33. Доказать, что если на плоскости заданы три окружности: C_1, C_2, C_3, из которых ни одна не лежит внутри другой, то две точки, в которых пересекаются внутренние касательные к окружностям C_1, C_2 и к окружностям C_1 и C_3 лежат на одной прямой с точкой, в которой пересекаются внешние касательные к окружностям C_2 и C_3 (черт. 59).



Черт. 59.

34. Доказать, что сумма квадратов длин хорд, соединяющих произвольную точку окружности радиуса $R=1$ с вершинами правильного вписанного в эту окружность пятиугольника, равна 10.

35. Пусть B и D — точки, лежащие на дуге AC, представляющей собою четверть некоторой окружности, причем $AB=DC$. Доказать, что если из этих точек опустить перпендикуляры BE и DF на радиус OC, то полученная криволинейная трапеция $BEFD$, ограниченная прямыми линиями и дугой окружности, равновелика сектору OBD.

36. Дан круг радиуса R. Доказать, что в плоскости этого круга можно начертить 7 кругов радиуса $\frac{R}{2}$ так, чтобы каждая точка данного круга принадлежала, по крайней мере, одному из семи кругов.

37. Доказать соотношение

$$b_{2n}=d^2\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right),$$

где d — диаметр круга, a_n и b_n — стороны правильных вписанного и описанного n-угольников.

38. Даны окружность и точка вне ее. Из этой точки мы совершаем путь по замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, а заканчиваем путь в начальной точке. Участки пути, по которым мы приближались к центру окружности, берем со знаком + (плюс), а участки пути, по которым мы удалялись от центра, — со знаком — (минус). Доказать, что для любого такого пути алгебраическая сумма длин участков пути, взятых с указанными знаками, равна нулю.

39. Дан ряд концентрических окружностей с радиусами r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ..., причем площадь любого кругового кольца, заключенного между двумя соседними окружностями радиусов r_k и r_{k+1}, равна площади внутреннего круга, радиус которого r_1. Доказать, что наибольшая хорда, целиком лежащая внутри любого такого кругового кольца, равна диаметру внутреннего круга $2r_1$.

40. Даны окружности O_1, O_2, O_3, проходящие через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3 и O_3 с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2 и A_3. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через B_2 и A_2

прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Если B_3 не совпадает с A_3, то проводим через B_3 и A_3 прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_4. Доказать, что B_4 совпадает с B_1.

41. Дано n окружностей: O_1, O_2, ..., O_n, проходящих через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3, ..., O_n с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2, ..., A_n. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Продолжая таким же образом, мы получим точку B_n на окружности O_n. Если O_n не совпадает с A_n, то проводим через B_n и A_n прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_{n+1}. Доказать, что B_{n+1} совпадает с B_1.

42. Доказать, что три окружности, имеющие диаметрами три хорды четвертой окружности, выходящие из одной ее точки, попарно пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой (теорема Сальмона).

43. Доказать, что четыре окружности, касающиеся трех данных окружностей, подобно тому, как вписанная и вневписанные окружности треугольника касаются его сторон, касаются некоторой пятой окружности (теорема Гарта).

44. На каждой стороне данного треугольника во внешнюю сторону строится равносторонний треугольник, и вокруг каждого из этих построенных треугольников описывается окружность (внешние окружности Торичелли данного треугольника). Доказать, что три внешние окружности Торичелли имеют общую точку. Доказать, что аналогичным образом построенные внутренние окружности Торичелли также имеют общую точку.

45. Доказать, что если O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, симметричных с описанным кругом треугольника ABC относительно его сторон, то треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ равны и имеют общую окружность (O_9) Эйлера (теорема Карно).

46. Если построить окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3 так, что каждая из них касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон, и если построить еще три других окружности Γ_1', Γ_2', Γ_3' так, что каждая из них касается двух из трех внешним образом, а третьей — внутренним образом, то эти три последних круга пересекутся в одной точке P, а прямые, соединяющие эту точку P с центрами трех первых окружностей, будут соответственно перпендикулярны трем сторонам треугольника (теорема Штейнера).

47. Доказать, что если стороны BC, CA, AB треугольника ABC пересекаются окружностью в точках A', A'', B', B'' и C', C'', то

$$\frac{A'B \cdot B'C \cdot C'A}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = \frac{A''C \cdot B''A \cdot C''B}{A''B \cdot B''C \cdot C''A}$$

(теорема Карно).

48. Доказать, что если стороны BC, CA и AB треугольника ABC пересекаются окружностью в точках A', A''; B', B'' и C', C'' и прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то прямые AA'', BB'', CC'' также пересекаются в одной точке (теорема Теркема).

49. Доказать, что если все стороны четырехугольника при продолжении касаются одной окружности, то разность двух противоположных сторон равна разности двух других сторон (теорема Штейнера).

50. Доказать, что произведение расстояний от какой-либо точки окружности до двух противоположных сторон вписанного четырехугольника равно произведению расстояний той же точки до двух других сторон (теорема Паппа).

51. В многоугольник вписана окружность, и точки касания последовательно соединены. Доказать, что произведение расстояний любой точки окружности до сторон полученного вписанного многоугольника равно произведению расстояний этой точки до сторон описанного многоугольника.

Глава XVIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

1. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.
2. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний каждой из которых до двух данных точек равна данному числу.
3. Найти геометрическое место точек, разность квадратов каждой из которых до двух данных точек равна данному числу.
4. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний каждой из которых до двух данных точек равно данному числу $k(>0)$.
5. Найти геометрическое место точек, степени каждой из которых относительно двух данных окружностей (или относительно окружности и точки) равны.
6. Найти геометрическое место центров окружностей, делящих две данные окружности пополам.
7. Найти геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и пересекающих данную окружность под данным углом.
8. O — фиксированная точка данной окружности, а M — переменная точка той же окружности. Найти геометрическое место точек M', лежащих на луче OM и таких, что $OM \cdot OM' = a^2$, где a — данное положительное число.
9. Даны точка O и не проходящая через нее прямая l. Пусть M — произвольная точка прямой l, а M' — точка луча OM такая, что $OM \cdot OM' = a^2$, где a — данное положительное число. Найти геометрическое место точек M'.
10. Пусть M — произвольная точка окружности (S) и O — точка, не лежащая на окружности (S). Найти геометрическое место точек M', лежащих на лучах OM и таких, что $OM \cdot OM' = a^2$, где a — данное положительное число.
11. Найти геометрическое место средин хорд, проходящих через данную точку, лежащую внутри окружности.
12. В треугольнике ABC вершины B и C неподвижны, а A перемещается так, что периметр треугольника остается постоянным. Определить геометрическое место центров вписанных окружностей,
13. Найти геометрическое место точек, для которых разности расстояний до двух данных прямых равны отрезку данной длины. Разобрать случай параллельных и пересекающихся прямых,
14. Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M, для которых
$$MC^2 = MA^2 + MB^2.$$
15. Отрезок $BC = a$ движется своими концами по сторонам угла A; найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника ABC.
16. Найти геометрическое место вершин прямого угла неизменяемого прямоугольного треугольника, если две другие его вершины скользят по двум взаимно-перпендикулярным прямым.
17. A и B — две заданные неподвижные точки окружности, M — подвижная точка этой же окружности. На продолжении отрезка AM в сторону, внешнюю к окружности, откладывается отрезок $MN = MB$. Найти геометрическое место точек N.

18. Стороны деформирующегося многоугольника остаются соответственно параллельными определенным направлениям, в то время как все вершины, кроме одной, скользят по заданным прямым. Найти геометрическое место положений последней вершины.

19. На плоскости даны окружность S и точка A вне этой окружности. Через точку A и произвольную точку окружности проводится прямая L_1. Пусть C и D — точки пересечения этой прямой с окружностью S, причем $AC < AD$. В точке C проводится прямая $L_2 \perp AD$. Найти геометрическое место точек C_1 и C_2 пересечения прямой L_2 с окружностью, построенной на AD как на диаметре при вращении прямой L_1 вокруг точки A.

20. В плоскости даны треугольник ABC и две точки: M и N. Через точку N проводится прямая d, на которой берутся две точки P и Q так, чтобы треугольник PMQ был подобен треугольнику ABC. Определить геометрические места точек P и Q, образующиеся при вращении прямой d вокруг точки N.

21. Найти геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных прямых равна данной величине. Разобрать случаи пересекающихся и параллельных прямых.

22. На сторонах треугольника PQR отложены отрезки AB, CD, EF. Внутри этого треугольника задана точка S_0. Найти геометрическое место точек S, лежащих внутри треугольника, для которых сумма площадей треугольников SAB, SCD и SEF равна сумме площадей треугольников S_0AB, S_0CD и S_0EF.

23. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q. Найти геометрическое место точек, описываемое серединой M отрезка PQ, когда секущая вращается вокруг точки A.

24. Даны окружность радиуса r и ее хорда AB, равная $2a$. Пусть CD — подвижная хорда той же окружности, имеющая постоянную длину $2b$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD. Найти, кроме того, расстояние от середины хорды AB до точки искомого геометрического места, наиболее удаленной от середины, и до точки, наиболее близкой.

25. Даны две параллельные прямые и точка O, лежащая между ними на расстоянии a от одной и b от другой. Через эту точку проводят произвольную секущую, которая пересекает параллельные прямые в точках A и A'. Найти геометрическое место концов перпендикуляра к секущей, проведенного через точку A' и имеющего длину OA.

26. Окружность радиуса R катится внутри окружности радиуса $2R$. Какие линии описывают точки катящейся окружности?

27. Дан неподвижный отрезок $AB = a$. Квадрат $APNM$ вращается вокруг вершины A в положительном направлении, изменяясь при этом так, что

$$AN^2 = BM^2 + BP^2.$$

Найти геометрические места центра I квадрата $APNM$, а также его вершин. Определить положение квадрата, если сторона PN (или ее продолжение) проходит через заданную точку C. Решить те же вопросы, если размеры квадрата изменяются так, что сумма квадратов расстояний от точки B до четырех вершин квадрата постоянна и равна $10AB^2 = 10a^2$.

28. В плоскости дан треугольник ABC. Найти геометрическое место точек, каждая из которых обладает тем свойством, что ее расстояние до точки A меньше каждого из расстояний ее до точек B и C.

29. Внутри правильного треугольника определить геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что из перпендикуляров, опущенных из этих точек на стороны, можно построить треугольник.

Глава XIX

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 1. Метод геометрических мест

1. Построить окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей. Исследовать.
2. Даны две концентрические окружности и еще окружность, их пересекающая. Построить окружность, касающуюся этих трех окружностей.
3. Построить ромб так, чтобы две его противоположные вершины были в двух данных точках, а третья лежала бы на данной окружности.
4. Построить треугольник, если даны A, h_b и m_a.
5. Построить окружность с центром в данной точке, которая высекает из двух данных параллельных прямых хорды, равные между собой.
6. Построить треугольник по следующим данным:

а) A, l_a, h_c;	з) b, h_b, m_b;
б) A, l_a, h_b;	и) m_a, h_a, R;
в) b, m_a, m_b;	к) A, m_a, h_b;
г) a, c, h_b;	л) b, h_b, m_a;
д) a, b, h_b;	м) A, b, h_b;
е) A, a, b;	н) A, r, b;
ж) a, R, h_b;	о) A, l_a, r.

7. Построить ромб, зная его высоту и диагональ.
8. Построить окружность, касающуюся стороны BC треугольника ABC, в данной на ней точке M так, чтобы один из ее диаметров лежал на стороне AB.
9. Построить окружность с центром в данной точке так, чтобы стороны данного угла высекали на этой окружности хорду, параллельную данной прямой.
10. Построить окружность, пересекающую три данные прямые под данным углом.
11. Построить точку, из которой два данных отрезка видны под равными углами.
12. Построить треугольник наибольшей площади, зная A и a.
13. Построить треугольник ABC, зная $AC = b$ и радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и CBD, где BD — высота.
14. Через точки A и B провести две параллельные прямые, расстояние между которыми равно a.
15. Через точку P, лежащую внутри окружности, провести хорду, которая в пересечении с данной хордой AB делится пополам.
16. Через точку B, данную внутри окружности (O), провести хорду, вдвое бóльшую расстояния ее от центра O.
17. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы сумма или разность полученных хорд равнялась данному отрезку a.
18. Построить параллелограмм, зная основание, высоту и угол между диагоналями.

19. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

20. Через данную точку провести две прямые, образующие между собою данный угол и высекающие на данной прямой отрезок данной длины.

21. Построить квадрат, стороны которого проходят через 4 данные точки.

22. Найти на общей внешней касательной к двум данным окружностям точку, из которой данные окружности видны под углами, имеющими данную сумму.

23. В данную окружность вписать треугольник с данным углом так, чтобы сторона, противоположная этому углу, прошла через данную точку, а другая сторона — через другую данную точку.

24. В данной окружности построить хорду данной длины, которая делилась бы пополам данной прямой.

25. Разделить данный треугольник на две равновеликие части прямой, проведенной через точку, лежащую на его основании.

26. Построить треугольник, зная

а) a, A, $b^2 - c^2$;
б) R, A, $b^2 - c^2$;
в) R, A, $b^2 + c^2$.

27. Построить окружность, отрезки касательных к которой из трех данных точек имеют данные длины.

28. Построить треугольник, зная биссектрису угла и отрезки, на которые эта биссектриса разбивает основание.

29. Построить точку, из которой три данные окружности видны под равными углами.

30. На данной окружности найти точку, отрезки касательных из которой к двум данным окружностям были бы равны между собой.

31. Через данную точку провести окружность, пересекающую две данные окружности под прямыми углами.

32. Построить окружность, пересекающую под прямыми углами три данные окружности, расположенные одна вне другой.

33. Построить окружность, делящую пополам одну из трех данных окружностей и пересекающую две другие окружности под прямыми углами.

34. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и пересекающую данную окружность по хорде данной длины.

§ 2. Метод подобия

1. Построить треугольник, зная

а) A, h_a, $b : c$;
б) A, a, $b : c$;
в) A, a, $h_b : b$;
г) A, h_c, $a : c$;
д) A, r, $h_b : b$;
е) A, B, $a + b$;
ж) a, b, $c : h_c$;
з) $a : b : c$ и $m_a + m_b + m_c$;
и) A, B, $a - b$;
к) h_a, m_a, $a : c$;
л) h_a, h_c, m_a;
м) a, b, m_c.

2. В данный сегмент вписать квадрат.

3. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых.

4. Даны две окружности и на них по точке. Построить две равные окружности, касающиеся между собой и касающиеся двух данных окружностей в данных на них точках.

5. Построить хорду окружности, делящуюся двумя ее данными радиусами на три равные части.

6. Построить равносторонний треугольник с данной вершиной, две другие вершины которого лежали бы на двух данных прямых.
7. Построить равнобедренный треугольник, зная его площадь и отношение $R : r$.
8. Построить вписанный четырехугольник, зная его угол, отношение сторон, образующих этот угол, и диагонали.
9. Разделить пополам площадь треугольника прямой, имеющей данное направление.
10. Построить окружность, проходящую через данную точку, касающуюся данной окружности и данной прямой.
11. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей и данной прямой.
12. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.
13. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

§ 3. Метод обратности

1. В данный сектор вписать треугольник, равный данному.
2. В данный сегмент вписать треугольник, равный данному.
3. В данный полукруг вписать четырехугольник, подобный данному.
4. Построить окружность, которая была бы видна из трех данных точек под данными углами.
5. В данный треугольник вписать треугольник, подобный данному, так, чтобы одна из его вершин лежала в данной точке стороны данного треугольника.

§ 4. Метод симметрии и спрямления

1. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данным окружностям, образовали с данной прямой равные углы.
2. Построить треугольник, зная:

а) $b+c$, a, B;	з) $h_a : b : (a+c)$, R;
б) a, b, h_c+c;	и) A, m_b, $b+c$;
в) $b+c$, $b+a$, B;	к) A, h_a, $2p$;
г) A, b, $a+c$;	л) B, h_a, $2p$;
д) A, b, $a-c$;	м) s, A, $2p : h_a$;
е) B, a, $b-h_a$;	н) b, $C-A$, $c-a$;
ж) b, h_a, $a+c$;	о) $a=b$, $b+c$, h_c.

3. В данный угол вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна из его вершин совпала с данной точкой, лежащей внутри угла.
4. Построить ромб с данной диагональю, которая лежала бы на данной прямой так, чтобы другие две вершины лежали на данных двух окружностях.
5. Прямая MN пересекает отрезок AB в точке C. Найти на прямой MN точку, из которой отрезки AC и CB видны под равными углами.
6. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол A пополам.
7. Найти на основании равнобедренного треугольника точку, разность расстояний которой до боковых сторон треугольника равна данному отрезку.
8. Дан треугольник ABC. Найти точку X такую, чтобы вокруг четырехугольника $ABCX$ можно было описать окружность и чтобы в него можно было вписать окружность.
9. Построить ромб, зная его периметр и разность диагоналей.
10. На данной окружности найти точку, сумма расстояний которой до двух данных прямых равна данной длине.

11. Вписать в данный круг трапецию, зная ее высоту и разность оснований.
12. В данный треугольник вписать прямоугольник данного периметра.
13. В окружность вписать равнобедренный треугольник, зная сумму его высоты и основания.
14. В данный сегмент вписать прямоугольник данного периметра.

§ 5. Метод параллельного переноса

1. Через две данные точки окружности провести две параллельные хорды, разность которых дана.
2. Построить четырехугольник, зная три его стороны и углы, прилежащие к четвертой стороне.
3. Построить четырехугольник, зная его диагонали, две противоположные стороны и угол между ними.
4. С корабля два маяка видны под известным углом. После того как корабль в известном направлении прошел данное расстояние, они стали видны под другим, также известным, углом. Найти построением местонахождение корабля.
5. В окружности даны хорды AB и CD. Построить на окружности такую точку X, что AX и BX высекают на CD отрезок данной длины.
6. Построить трапецию, зная диагонали и непараллельные стороны.
7. Построить треугольник, зная:

а) B, m_a, m_c;
б) m_a, m_b, $\angle(m_a, m_b)$;
в) m_a, m_b, m_c;
г) h_a, h_c, m_b;
д) m_a, m_c, h_a;
е) h_a, h_b, m_c;
ж) m_a, m_c, $\angle(m_b, a)$;
з) h_a, h_b, m_a;
и) A, m_a, h_a;
к) m_a, h_a, $h_b : b$;
л) a, h_a, $\angle(m_b, c)$;
м) A, h_a, m_b;
н) h_a, h_b, $\angle(b, m_a)$.

8. Построить четырехугольник, зная две его диагонали, угол между ними и две какие-либо стороны.
9. Построить трапецию, зная ее диагонали, угол между ними и одну из сторон.
10. Построить трапецию, зная ее диагонали и две параллельные стороны.

§ 6. Метод вращения

1. Построить четырехугольник, зная его стороны и зная, что вокруг него можно описать окружность.
2. Построить четырехугольник $ABCD$, зная AB, AD, $\angle B$, $\angle D$ и зная, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.
3. Провести секущую данного направления, на которой две данные окружности высекают хорды так, что их разность равна данному отрезку.
4. Даны окружность и точки A и B. Провести к данной окружности касательную так, чтобы расстояния точки A до этой касательной и до перпендикуляра, проведенного из точки B к касательной, были равны между собой.
5. Построить четырехугольник, зная $AB : AD$, B — D, AC, BC и разность углов BAC и DAC.
6. В данный параллелограмм вписать треугольник, подобный данному.
7. В квадрат вписать равностороний треугольник.
8. Построить треугольник, подобный данному, одна из вершин которого лежит в данной точке, а две другие — на данных окружностях.
9. В данный прямоугольник вписать ромб с данным отношением диагоналей.
10. Даны прямые AR и BQ. Через данную точку M провести прямую MN, пересекающую данные прямые в точках X и Y таких, что отношение $AX : BY$ равно данному числу (точки A и B заданы).

11. На плоскости даны точки A, B, C, D. Найти точку O такую, чтобы треугольники AOB и COD были подобны и углы при вершине O равны между собой.
12. Даны окружности (O_1), (O_2), (O_3) радиусов R_1, R_2, R_3. Построить треугольник ABC, равный треугольнику $O_1O_2O_3$, так, чтобы вершины A, B, C лежали на данных окружностях.
13. Построить четырехугольник, зная его углы и диагонали.
14. Даны 4 луча, выходящих из одной точки. Построить параллелограмм с данными сторонами так, чтобы его вершины лежали на данных лучах.

§ 7. Метод инверсии

1. В данную окружность вписать четырехугольник, стороны которого проходили бы соответственно через четыре данные точки, лежащие вне окружности.
2. В данную окружность вписать треугольник, стороны которого проходили бы через три данные точки, лежащие вне окружности.
3. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.
4. Построить треугольник, зная

   а) A, a и $BD \cdot AB$, где $BD = h_b$;

   б) $A - C$, ac и h_b.
5. Через две данные точки провести окружность, пересекающую данную окружность под данным углом.
6. Через данную точку провести окружность, касающуюся двух данных окружностей.
7. Три данные окружности проходят через одну точку. Построить окружность, пересекающую их под данным углом.
8. Построить окружность, пересекающую две данные пересекающиеся окружности под данными углами и касающуюся третьей данной окружности.
9. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.
10. Построить окружность, пересекающую две данные окружности и данную прямую под данными углами.

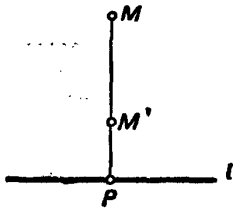
§ 8. Алгебраический метод

1. Построить окружности с центрами в данных точках, которые попарно касаются друг друга.
2. Через две данные точки провести окружность так, чтобы касательная к ней из третьей данной точки имела данную длину.
3. Построить прямую, делящую пополам и площадь, и периметр данного треугольника.
4. Построить прямоугольный треугольник по данной сумме катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.
5. На биссектрисе угла дана точка. Через эту точку провести прямую, на которой стороны данного угла высекают отрезок данной длины.
6. Построить окружность, проходящую через две данные точки и высекающую на данной прямой отрезок данной длины.
7. В данную окружность вписать равнобедренный треугольник, зная сумму (или разность) боковой стороны и высоты, опущенной на основание.
8. Из данной точки провести к данной окружности секущую так, чтобы она разделилась окружностью на части, разность которых равна данному отрезку.
9. Построить прямоугольный треугольник, зная разность (или сумму) его катетов и площадь.

10. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе острого угла.
11. Построить радиус r окружности, вписанной в треугольник, зная его площадь и периметр.
12. Через точку, лежащую внутри треугольника, провести прямую, делящую площадь треугольника пополам.

§ 9. Сжатие, сдвиг, перспектива, гомологии (задачи на доказательство и построение)

1. Фиксируем на плоскости произвольную прямую l (черт. 60). Пусть M — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой l. Проведем через точку M прямую, перпендикулярную прямой l, и пусть эта прямая пересечет прямую l в точке P. Возьмем на луче PM точку M' такую, что



Черт. 60.

$$\frac{PM'}{PM}=k,$$

где k — некоторое данное положительное число. Поставим точке M в соответствие точку M'. Наконец, каждой точке M, лежащей на прямой l, поставим в соответствие эту точку.

Указанное соответствие, определенное для всех точек плоскости, называется равномерным сжатием или просто сжатием плоскости* к прямой l с коэффициентом сжатия k. Будем всегда обозначать точки, соответствующие точкам M, N, P, ..., так: M', N', P', ... Доказать, что:

а) если точки M, N, P лежат на одной прямой, то соответствующие им точки M', N', P' также лежат на одной прямой;

б) если отрезок AB параллелен отрезку CD, то отрезок $A'B'$ параллелен отрезку $C'D'$ и

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'};$$

в) если ABC — произвольный треугольник, то пл. $\triangle A'B'C'=k\cdot$ пл. $\triangle ABC$;

г) параллельные прямые после сжатия переходят в параллельные прямые;

д) можно геометрически построить точку N', соответствующую данной точке N, если даны l и пара соответственных точек M и M', причем точка M не лежит на прямой l; выполнить построение для случая, когда точки M и M' лежат по одну сторону от прямой l и когда они лежат по разные стороны от l.

2. Фиксируем на плоскости произвольные пересекающиеся прямые l и m. Пусть M — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой l. Проведем через точку M прямую, параллельную прямой m, и пусть эта прямая пересекает прямую l в точке P (черт. 61). Возьмем на луче PM точку M' такую, что

$$\frac{PM'}{PM}=k,$$

---

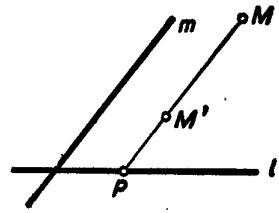
* Сжатие плоскости к прямой l можно определить и соотношением

$$\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}}=k \quad \left(\text{вместо } \frac{PM'}{PM}=k\right),$$

где k — произвольное действительное число, не равное нулю (положительное или отрицательное), а P — проекция точки M на прямую l (каждой точке M прямой l ставим в соответствие ее самое).

Если точка M не лежит на прямой l, то в случае $k>0$ образ M' точки M и сама точка M лежат по одну сторону от прямой l, а в случае $k<0$ точки M и M' лежат по разные стороны от прямой l.

где k — некоторое данное положительное число*. Поставим точке M в соответствие точку M'. Наконец, каждой точке M, лежащей на прямой l, поставим в соответствие эту же точку M. Указанное соответствие, определенное для всех точек плоскости, называется косым равномерным сжатием плоскости к прямой l по направлению прямой m с коэффициентом сжатия k. Доказать, что косое сжатие плоскости к прямой обладает свойствами а) — г), сформулированными в предыдущей задаче. Решить для косого сжатия и вопрос д) задачи № 1 этого параграфа.



Черт. 61.

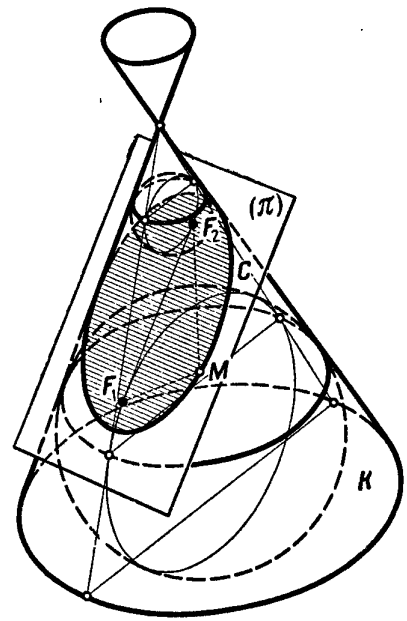
Доказать еще следующее свойство косого сжатия: на плоскости существует два и только два перпендикулярных направления такие, что две произвольные взаимно-перпендикулярные прямые, имеющие эти направления после косого сжатия, останутся взаимно-перпендикулярными. Найти стороны прямоугольника, в который при этом переходит квадрат со стороной 1 (дан угол α между прямыми l и m и коэффициент сжатия k).

3. В треугольнике F_1MF_2 длина стороны F_1F_2 равна $2c$, а сумма $F_1M + MF_2$ равна $2a$. Пусть l — прямая, перпендикулярная стороне F_1F_2 и проходящая через середину O отрезка F_1F_2. Произведем сжатие плоскости к прямой l с коэффициентом сжатия

$$k = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Пусть при этом сжатии точка M перейдет в точку M'. Найти длину отрезка OM'.

4. Пусть K — поверхность прямого кругового конуса, образующие которого неограниченно продолжены в обе стороны. Рассмотрим плоскость π, которая не проходит через вершину конуса и пересекает все его образующие. Пусть C — линия, по которой эта плоскость пересекает конус K. Впишем в конус K две сферы, каждая из которых касается конуса K и секущей плоскости π. Обозначим точки касания этих двух сфер с плоскостью π через F_1 и F_2. Доказать, что $F_1M + F_2M = \text{const}$, где M — любая точка линии C (линия C, по которой плоскость, не проходящая через вершину конуса K и не параллельная ни одной из его образующих, пересекает конус K, называется эллипсом; черт. 62). Указать на значение этой постоянной. Доказать, что и обратно: если точка M лежит в плоскости (π) и если сумма $F_1M + F_2M$ равна этой постоянной, то точка M лежит и на конусе K, т. е. на линии C.



Черт. 62.

---

* И здесь можно ограничиться лишь условием $k \neq 0$ и указанное соотношение заменить следующим:

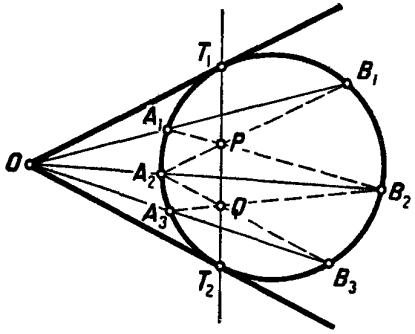
$$\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}} = k$$

(см. предыдущее подстрочное примечание).

5. На плоскости даны точки F_1 и F_2, прямая l и отрезок AB. Найти на прямой l точку M такую, что

$$F_1M + F_2M = AB.$$

6. Доказать правильность следующего способа построения касательных к окружности, проведенных к ней из внешней точки O, с помощью линейки: через точку O проводим три произвольные секущие: OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 (черт. 63). Пусть P — точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, а Q — точка пересечения прямых A_2B_3 и A_3B_2. Пусть T_1 и T_2 — точки, в которых прямая PQ пересекает окружность. Тогда OT_1 и OT_2 — касательные, проведенные из точки O к окружности.



Черт. 63.

Указание. Спроектировать прямым круговым конусом данную окружность и точку O в другую плоскость так, чтобы прямые OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 спроектировались бы в параллельные прямые, а окружность спроектировалась бы в эллипс. На основании задачи № 3 можно затем произвести сжатие, при котором эллипс перейдет в окружность; параллельность прямых при этом сохранится.

Для окружности и трех параллельных секущих положение, указанное в условии задачи, будет иметь место (только пучок прямых с центром в O заменится пучком параллельных прямых); производя преобразования в обратном порядке и замечая, что и при сжатии и при проектировании касательная переходит в касательную, получим требуемое.

7. а) p и q — две пересекающиеся прямые, O — произвольная точка, не лежащая ни на прямой p, ни на прямой q. Через точку O проведены секущие OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3. Пусть P — точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, Q — точка пересечения прямых A_2B_3 и A_3B_2. Доказать, что прямая PQ проходит через точку пересечения прямых p и q.

б) Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O. Пусть P, Q, R — точки, в которых прямые AO, BO и CO пересекают соответственно стороны BC, CA и AB. На продолжении сторон BC, CA и AB взяты точки P', Q', R' такие, что

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{CQ'}{Q'A}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{AR'}{R'B}.$$

Доказать, что точки P', Q', R' лежат на одной прямой.

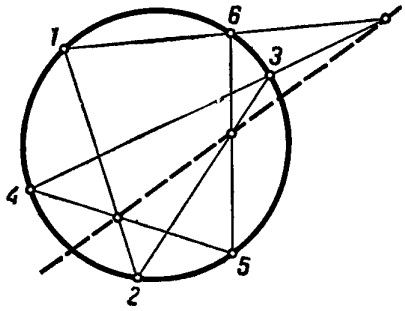
8. Прямая l пересекает окружность в точках A и B. Из произвольной точки M прямой l, внешней по отношению к окружности, проведены две касательные MC и MD к этой окружности (C и D — точки касания). Доказать, что прямая CD проходит через точку пересечения касательных к окружности в точках A и B.

9. На окружности взяты произвольные точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Доказать, что точки пересечения прямых:

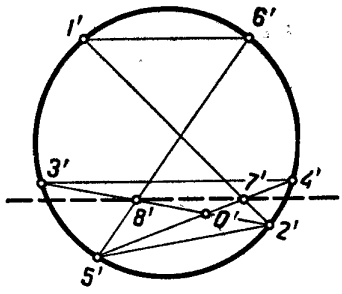
12 и 45,
23 и 56,
34 и 62,

лежат на одной прямой.

Указание. Спроектируем конфигурацию (черт. 64) из точки S, не лежащей в этой плоскости, в другую плоскость так, чтобы данная окружность



Черт. 64.



Черт. 65.

спроектировалась в эллипс, а прямые 16 и 34 спроектировались в параллельные прямые; затем произведем сжатие, при котором эллипс перейдет в окружность (черт. 65).

Тогда

$$\triangle 0'5'2' \backsim \triangle 0'3'4',$$

следовательно,

$$\frac{0'5'}{0'2'} = \frac{0'3'}{0'4'}.$$

Далее

$$\triangle 0'5'8' \backsim \triangle 0'2'7',$$

поэтому

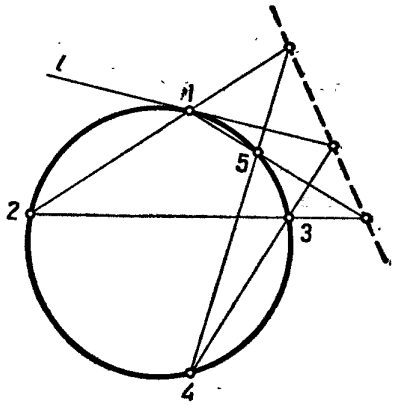
$$\frac{0'5'}{0'2'} = \frac{0'8'}{0'7'},$$

следовательно,

$$\frac{0'3'}{0'4'} = \frac{0'8'}{0'7'},$$

откуда

$$3'4' \parallel 8'7'.$$



Черт. 66.

10. На окружности взяты произвольно 5 точек:

1, 2, 3, 4, 5.

Обозначим через l касательную к окружности в точке 1. Доказать, что три точки, в которых пересекаются прямые:

12 и 45,
15 и 23,
l и 34,

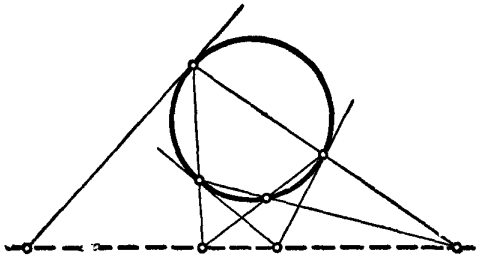
лежат на одной прямой (черт. 66).

11. Доказать, что во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность (не обязательно выпуклом), противоположные стороны и касательные в противоположных вершинах пересекаются в четырех точках, лежащих на одной прямой (черт. 67).

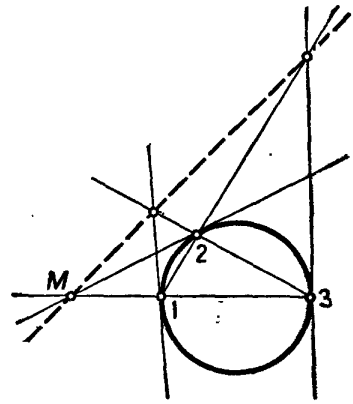
Указание. Если спроектировать данную конфигурацию из точки, не лежащей в плоскости чертежа, в другую плоскость так, чтобы касательные в противоположных вершинах перешли в параллельные прямые, а окружность спроектировалась в эллипс, затем сжать равномерно эллипс в окружность, то задача сведется к теореме о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

12. Доказать, что если в окружность вписан треугольник *1*, *2*, *3*, то три точки пересечения касательных к окружности в вершинах треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой (черт. 68).

Указание. Спроектировать треугольник так, чтобы прямые $2M$ и $M13$ перешли в параллельные прямые, а данная окружность спроектировалась бы в эллипс.



Черт. 67.



Черт. 68.

13. Доказать, что если около окружности описан шестиугольник 1, 2, 3, 4, 5, 6 (не обязательно выпуклый), то три прямые: 14; 25 и 36, проходят через одну точку (теорема Брианшона).

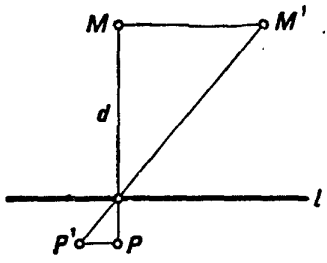
Указание. Соединяя точки прикосновения, получим шестиугольник, вписанный в окружность. Применить к этому шестиугольнику теорему Паскаля (№ 9) и воспользоваться результатом задачи 8.

14. Доказать, что если около окружности описан пятиугольник, то прямая, соединяющая одну из вершин этого пятиугольника с точкой прикосновения противоположной стороны, и две диагонали, соединяющие остальные несмежные вершины по две, проходят через одну точку.

15. Доказать, что если около окружности описан четырехугольник, то две диагонали и две прямые, соединяющие точки прикосновения противоположных сторон, проходят через одну точку.

16. В треугольник вписана окружность. Доказать, что три прямые, соединяющие вершины треугольника с точками прикосновения соответствующих противоположных сторон, проходят через одну точку.

17. Сдвигом называется следующее преобразование плоскости: фиксируем на плоскости произвольную прямую l и поставим в соответствие каждой точке M плоскости, не лежащей на прямой l, точку M' такую, что отрезок MM' параллелен прямой l, а длина его равна kd, где d — расстояние от точки M до прямой l, а k — фиксированное положительное число. Если точка M лежит на прямой l, то такой точке мы поставим в соответствие эту самую же точку. Наконец, если точки M и P лежат по одну сторону от прямой l, то отрезки MM' и PP' будем предполагать направленными в одну сторону, а если точки M и P лежат по разные стороны от прямой l, то будем отрезки MM' и PP' брать противоположно направленными (черт. 69).



Черт. 69.

Доказать следующие свойства сдвига:

а) если точки M, N, P лежат на одной прямой, то соответствующие им точки M', N', P' также лежат на одной прямой;

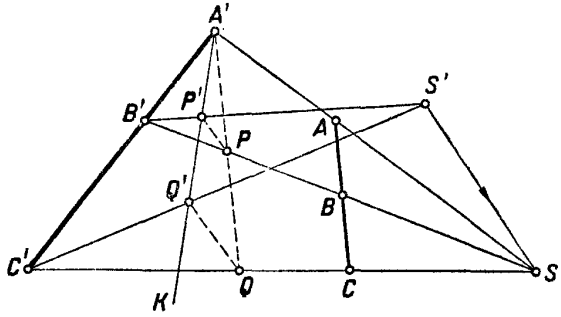
б) если отрезок AB параллелен отрезку CD, то отрезок $A'B'$ будет параллелен отрезку $C'D'$ и $\frac{AB}{DC}=\frac{A'B'}{C'D'}$;

в) площади фигур при сдвиге сохраняются;
г) параллельные прямые после сдвига остаются параллельными;
д) как геометрически построить точку N', соответственную данной точке N (даны прямая l и пара соответственных точек M и M' при сдвиге, причем ни точка M, ни точка M' не лежат на прямой l).

18. ABC — произвольный треугольник; прямая $MN \| BC$ (точка M лежит на AB, точка N лежит на AC); пусть O — точка пересечения прямых CM и AN. Доказать, что AO — медиана.

Указание. Произвести преобразование сдвига, принимая прямую BC за прямую l и поставив в соответствие точке A такую точку A', что $A'B = A'C$.

19. Дано изображение $A'B'C'$ (черт. 70) центральной проекции отрезка AC и его середины B. Как построить изображение точек, которые делят отрезок AB на произвольное число равных между собою частей.



Черт. 70.

Указание. Проведем через точку A' произвольный луч $A'K$ и отложим на нем отрезки $A'P' = P'Q'$. Пусть S' — точка, в которой пересекаются прямые $B'P'$ и $C'Q'$. Тогда, проектируя из точки S' точки A', P', Q' на прямую $A'B'C'$, мы получим соответственно точки A', B', C'. Пусть S — истинный центр проектирования. Произведем тогда косое сжатие к прямой $A'B'C'$ (в частности сдвиг), при котором точка S' перейдет в S. Тогда точки P' и Q' перейдут в точки P и Q, лежащие на прямой $A'PQ$, и при этом в силу свойств сжатия и сдвига $A'P = PQ$. Пусть A, B, C — точки, которые были спроектированы в точки A', B', C'. Так как по условию $AB = BC$, то $AC \| A'Q$. Если разделить отрезок $A'Q'$ на n равных частей, то после преобразования отрезок $A'Q$ тоже разделится на n равных частей; значит, прямыми, соединяющими точку S с точками деления отрезка $A'Q$, отрезок AC также разделится на n равных частей. Тогда указанные прямые пройдут через те же точки отрезка $A'C'$, через которые пройдут прямые, соединяющие точку S' с точками деления отрезка $A'Q'$ на n равных частей. Отсюда следует, что знать положение истинного центра проекции нам не нужно. Достаточно разделить отрезок $A'Q'$ на n равных частей и соединить точки деления с S'; указанные прямые разделят отрезок $A'C'$ на n неравных частей, служащих изображениями частей отрезка AC, разделенного на n равных частей.

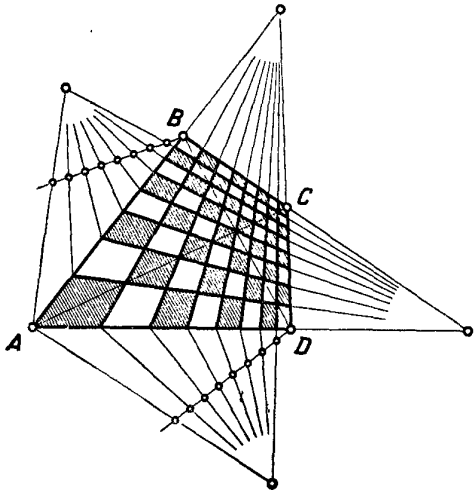
20. Дано изображение A, B, C, D углов шахматной доски в центральной проекции. Дать изображение всех клеток доски.

Указание. Решается на основании предыдущей задачи. Построение дано на черт. 71.

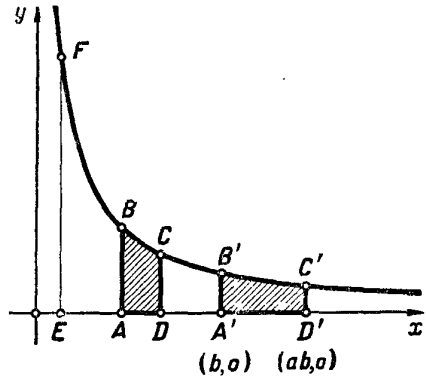
21. Пусть l и m — две взаимно-перпендикулярные прямые. Произведем два сжатия плоскости; к прямой l с коэффициентом сжатия k и к прямой m с коэффициентом сжатия $\frac{1}{k}$. Пусть в результате этих двух преобразований точка M перейдет в точку M'.

Преобразование $M \to M'$ называется гиперболическим поворотом. Доказать, что гиперболический поворот обладает свойствами сжатия а), б), г), сформулированными в задаче № 1.

Доказать, что при гиперболическом повороте сохраняются площади фигур.



Черт. 71.



Черт. 72.

22. Рассмотрим график обратной пропорциональности

$$y = \frac{1}{x}.$$

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

а) $f(1) = 0$;

б) если $x > 1$, то $f(x)$ — положительное число, равное площади криволинейной трапеции $ABCD$ (черт. 72), вершины которой имеют координаты

$$A(1,\ 0),\ B(1,\ 1),\ C\left(x,\ \frac{1}{x}\right),\ D(x,\ 0);$$

в) если $0 < x < 1$, то $f(x)$ — отрицательное число, равное по абсолютной величине площади криволинейной трапеции с вершинами

$$E(x,\ 0),\ F\left(x,\ \frac{1}{x}\right),\ B(1,\ 1),\ A(1,\ 0).$$

Доказать, пользуясь свойствами гиперболического поворота, что $f(x)$ — логарифмическая функция.

Указание. Пусть a и b — два произвольных положительных числа. Рассмотрим случай, когда $a > 1$ и $b > 1$. Рассмотрим гиперболический поворот, при котором точка $A(1, 0)$ переходит в точку $A'(b, 0)$; тогда точка $D(a, 0)$ перейдет в точку $D'(ab, 0)$. При указанном гиперболическом повороте криволинейная трапеция $ABCD$ перейдет в криволинейную трапецию $A'B'C'D'$, и в силу того, что при гиперболическом повороте сохраняются площади, мы будем иметь

$$\text{пл. } \overset{\frown}{ABCD} = \text{пл. } \overset{\frown}{A'B'C'D'}.$$

Отсюда

$$\text{пл. } \overset{\frown}{ABCD} + \text{пл. } \overset{\frown}{ABB'A'} = \text{пл. } \overset{\frown}{ABC'D'},$$

т. е.

$$f(a) + f(b) = f(ab).$$

Далее легко видеть, что при $a > 0$ мы будем иметь

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a).$$

Отсюда нетрудно установить, что равенство

$$f(a) + f(b) = f(ab)$$

верно при любых $a > 0$, $b > 0$ (далее см. С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры. «Советская наука», 1951 г., гл. VII — Показательная и логарифмическая функции над полем действительных чисел, § 92 — Характеристическое свойство показательной функции, стр. 474.)

23. Сжатие пространства к плоскости определяется аналогично тому, как в задаче № 1 было определено сжатие плоскости к прямой. Фиксируем в пространстве плоскость π; фиксируем положительное число k. Пусть M — точка пространства, не лежащая на плоскости π. Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость π. Возьмем на луче PM точку M' такую, что

$$\frac{PM'}{PM} = k, \qquad \text{(A)}$$

и поставим точке M в соответствие точку M'. Каждой точке M плоскости π поставим в соответствие ее самое*. Аналогично определяется косое сжатие пространства к плоскости (лучи PM выбираются все параллельными фиксированной прямой, пересекающей плоскость π).

Доказать, что при сжатии пространства к плоскости:

а) прямая переходит в прямую;

б) плоскость переходит в плоскость.

24. Рассмотрим множество всех прямых и плоскостей пространства, проходящих через фиксированную точку O пространства (связка прямых и плоскостей). Фиксируем в связке плоскость π и произведем косое сжатие пространства к плоскости π по направлению какой-нибудь прямой связки, не лежащей в плоскости π. Тогда каждая прямая связки перейдет в некоторую прямую той же связки. Каждая прямая связки, лежащая в плоскости π, перейдет в себя. Кроме того, в себя перейдет та прямая связки, по направлению которой производится сжатие. Будем прямые связки обозначать буквами a, b, c, d, ..., плоскости связки — буквами α, β, γ, δ, ..., соответствующие же им прямые и плоскости, в которые они перейдут после сжатия, будем обозначать буквами a', b', c', d', ... и α', β', γ', δ', ... Проведем плоскость, не проходящую через центр связки. Пусть эта плоскость пересечет плоскость π по прямой l, а прямую связки, по направлению которой производится сжатие, — в точке S. Пусть секущая плоскость пересечет прямые a, b, c, d, ... и прямые a', b', c', d', ... в точках A, B, C, D, ..., A', B', C', D', ... Поставим в соответствие точкам A, B, C, D, ... точки A', B', C', D', ... Это соответствие точек в секущей плоскости называется гиперболической гомологией. В силу свойств сжатия пространства к плоскости и определения гиперболической гомологии мы можем заключить, что:

а) в гиперболической гомологии есть прямая l, каждая точка которой переходит в себя. Эта прямая l называется ссью гомологии;

б) в гиперболической гомологии есть еще одна точка S, не лежащая на оси гомологии l, которая также переходит в себя. Эта точка S называется центром гомологии.

---

* Соотношение (А) можно обобщить: $\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}} = k$; здесь на k ограничение: $k \neq 0$.

См. подстрочное примечание к стр. 220.

Доказать, что:

а) при гиперболической гомологии прямая переходит в прямую;

б) каждой точке A плоскости соответствует точка A', лежащая на прямой SA;

в) гомология вполне задана, если заданы ее центр S, ось l и пара соответственных точек A и A', т. е. что можно геометрически для каждой точки B построить точку B', ей соответствующую; как выполнить это построение?

г) Во что превращается гиперболическая гомология, если точка S — бесконечно удаленная (т. е. указанная выше секущая плоскость параллельна прямой, по направлению которой производится сжатие)?

д) Во что обращается гиперболическая гомология, если ось гомологии — бесконечно удаленная прямая (т. е. секущая плоскость параллельна плоскости, к которой производится сжатие)?

25. Сдвиг пространства относительно плоскости по направлению прямой, параллельной этой плоскости, определяется аналогично тому, как в задаче № 17 было определено преобразование сдвига плоскости относительно прямой, а именно: фиксируем в пространстве плоскость π, прямую l, параллельную этой плоскости, и фиксируем положительное число k. Пусть M — произвольная точка пространства, не лежащая на плоскости π. Поставим ей в соответствие точку M' такую, что отрезок MM' параллелен прямой l и его длина равна kd, где d — расстояние от точки M до плоскости π. Для всех точек M, N, P, ..., лежащих по одну сторону от плоскости π, будем преобразованные точки M', N', P', ... выбирать так, чтобы направления отрезков MM', NN', PP', ... были одинаковы, для точек же M и K, лежащих по разные стороны от плоскости π, будем преобразованные точки M' и K' выбирать так, чтобы отрезки MM' и KK' имели бы противоположные направления. Каждой точке плоскости π ставим в соответствие ее самое. Доказать, что при сдвиге

а) прямая переходит в прямую;

б) плоскость переходит в плоскость.

26. Рассмотрим связку прямых и плоскостей в пространстве с центром S. Произведем сдвиг пространства относительно какой-нибудь фиксированной плоскости π связки по направлению какой-нибудь фиксированной прямой l связки, лежащей в плоскости π. Тогда каждая прямая связки перейдет в прямую связки, а каждая плоскость связки перейдет в плоскость. В этом преобразовании все прямые связки, лежащие в плоскости π, будут неподвижны. Кроме того, если a и a' — прямая связки и ей соответствующая, то прямые a, a' и l будут лежать в одной плоскости. Проводя произвольную секущую плоскость, не проходящую через центр S связки аналогично тому, как это было сделано в задаче № 24, определим преобразование секущей плоскости, ставя в соответствие произвольной точке A секущей плоскости точку A' такую, что прямая SA' получается из прямой SA в результате указанного преобразования сдвига. Это преобразование секущей плоскости называется параболической гомологией. В силу свойств сдвига пространства относительно плоскости и определения параболической гомологии мы можем заключить, что:

а) в параболической гомологии есть прямая — ось гомологии, каждая точка которой переходит в себя; других неподвижных точек в параболической гомологии нет;

б) среди неподвижных точек параболической гомологии есть одна точка L (центр гомологии) такая, что если A — произвольная точка плоскости, а A' — точка ей соответствующая в параболической гомологии, то точки A, A' и L лежат на одной прямой.

Доказать, что:

а) при параболической гомологии прямая переходит в прямую;

б) параболическая гомология вполне задана, если задана ось l гомологии, центр L гомологии и пара соответственных точек A и A' (таких, что A, A' и L лежат на одной прямой), т. е. тогда можно геометрически для каждой точки B построить точку B', ей соответствующую. Как выполнить это построение?

в) Во что обращается параболическая гомология, если ее центр — бесконечно удаленная точка (т. е. секущая плоскость параллельна прямой l, по направлению которой производился сдвиг пространства)?

г) Во что обращается параболическая гомология, если ее ось (следовательно, и центр) — бесконечно удаленная прямая (т. е. секущая плоскость параллельна плоскости, относительно которой производится сдвиг)?

27. Пусть C — окружность, l_1 и l_2 — две параллельные касательные к этой окружности, S_1 и S_2 — точки прикосновения. Возьмем на окружности произвольную точку A, соединим эту точку с точкой S_2 и на отрезке S_2A возьмем произвольную точку B. Соединим точку B с точкой S_1 и пусть прямая S_1B пересечет окружность C в точке A'. Рассмотрим гомологии Γ_1 и Γ_2; одна Γ_1 — с центром S_2, осью гомологии l_1, которая точку A переводит в точку B; другая гомология Γ_2 — с центром S_1, осью l_2, которая точку B переводит в точку A'. Выполняя над точками плоскости сначала гомологию Γ_1, а затем гомологию Γ_2, мы сможем утверждать, что точка A окружности C перейдет в точку A' той же окружности.

Доказать, что:

а) любая точка окружности C в указанном произведении гомологий перейдет в точку той же окружности;

б) все внутренние точки окружности перейдут во внутренние точки;

в) внешние точки перейдут во внешние (указанное произведение гомологий есть движение в плоскости Лобачевского, если последнюю интерпретировать как круг, хорды круга — как прямые плоскости Лобачевского и т. д.; см., например, статью Делоне Б. Н. в журнале «Математика в школе» № 6 за 1947 г.).

§ 10. Смешанный отдел

1. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане одного из катетов.

2. Построить прямоугольный треугольник по высоте, опущенной из вершины прямого угла, и разности острых углов.

3. Построить правильный треугольник по трем отрезкам — расстояниям от точки, взятой внутри треугольника, до его сторон.

4. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и высоте h, опущенной на гипотенузу. Найти длины катетов и выяснить, при каком соотношении между c и h задача возможна.

5. В данный треугольник вписать параллелограмм так, чтобы две его вершины лежали на основании треугольника, а две другие вершины — на боковых сторонах этого треугольника.

6. Построить треугольник, зная на плоскости положение трех точек, являющихся центрами квадратов, построенных на сторонах треугольника и расположенных вне треугольника.

7. Вписать в квадрат правильный треугольник так, чтобы одна из сторон была параллельна данной прямой.

8. В точке A, находящейся на расстоянии a от центра круглого биллиарда радиуса R, лежит упругий шарик, размерами которого можно пренебречь. В какую точку B нужно его пустить, чтобы, дважды отразившись от борта, он снова вернулся в точку A?

9. В данный треугольник вписать прямоугольник с диагональю данной длины.

10. Построить треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

11. Даны точки A, B и C. Через точку A провести прямую так, чтобы сумма расстояний от точек B и C до этой прямой была равна заданному отрезку.

12. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

13. Построить прямоугольный треугольник по высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, и разности катетов.

14. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и биссектрисе l прямого угла.

15. Построить треугольник, если на плоскости заданы центры вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей.

16. Построить треугольник ABC по стороне AB, биссектрисе BD и длине перпендикуляра, опущенного из вершины C на BD.

17. Через данную точку провести прямую, отсекающую от данного угла треугольник данного периметра.

18. Построить треугольник по медиане и радиусам окружностей, описанных вокруг двух треугольников, на которые данная медиана разбивает искомый треугольник.

19. Построить треугольник по стороне, противолежащему углу и медиане одной из двух других сторон.

20. В плоскости треугольника ABC найти точку M такую, что точки M_1, M_2 и M_3, симметричные с ней относительно сторон треугольника, лежат на окружности, описанной вокруг этого треугольника.

21. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного угла, вершина — на другой стороне этого угла, а боковые стороны проходили бы через две данные точки внутри данного угла.

22. Как геометрически построить центр тяжести куска однородной проволоки, согнутой в виде треугольника?

23. В данный треугольник ABC вписать треугольник MNP так, чтобы его стороны были параллельны медианам треугольника ABC. Вычислить площадь треугольника MNP и определить, сколько таких треугольников можно построить.

24. В данный треугольник ABC вписать треугольник MNP так, чтобы его стороны были параллельны биссектрисам углов треугольника ABC. Вычислить площадь треугольника MNP и определить, сколько таких треугольников можно построить.

25. Построить треугольник по:

а) двум сторонам и медиане между ними;

б) стороне и медианам двух других сторон;

в) двум сторонам и медиане к одной из этих сторон.

26. Построить треугольник по высоте AD, медиане BE и углу B.

27. Построить треугольник по стороне a, высоте h_a и медиане m_b одной из боковых сторон.

28. Даны прямые $AB \| CD \| EF$ (CD — между AB и EF). Между AB и CD даны точки M и N, между CD и EF дана точка P. Построить треугольник так, чтобы на каждой из трех данных прямых: AB, CD и EF, лежала одна из вершин треугольника, а на каждой из трех сторон треугольника — одна из трех данных точек.

29. В треугольнике ABC провести прямую DE параллельно BC так, чтобы $BD + EC = 2DE$.

30. Построить равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), если его вершины B, C находятся на данной прямой l, вершина A находится на дан-

ной прямой m, параллельной l, а стороны AB, AC проходят через данные точки M и N.

31. Построить равносторонний треугольник ABC, если дана его сторона a и известно, что стороны AB, AC и биссектриса AD проходят соответственно через данные точки M, N, P, лежащие на одной прямой.

32. Построить треугольник, если дано положение оснований его высот.

33. Построить треугольник, зная положение одной из его вершин, середину противоположной стороны и точку пересечения высот.

34. Построить треугольник, зная основания его медиан.

35. Построить треугольник по радиусу описанной окружности, сумме углов при основании и медиане одной из боковых сторон.

36. Построить треугольник по биссектрисе и радиусам окружностей, описанных вокруг треугольников, на которые данная биссектриса разбивает данный треугольник.

37. Построить квадрат, если заданы расстояния трех вершин его от данной точки.

38. Разделить прямоугольный треугольник прямой, выходящей из вершины прямого угла, на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в полученные треугольники, были бы равны.

39. Построить треугольник ABC по стороне b и высоте h_a при условии, что сторона квадрата, вписанного в этот треугольник так, что две его вершины лежат на BC, равна диаметру окружности, вписанной в треугольник.

40. Построить треугольник, вписанный в данную окружность, если известно, что одна из его сторон параллельна данной прямой и дано положение точки пересечения его высот.

41. Построить треугольник ABC, зная положение точек M, N, P, в которых медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, пересекают описанную окружность.

42. Найти на данной прямой такую точку, чтобы модуль разности расстояний ее от двух данных точек, находящихся по одну сторону от прямой, был наименьшим, а также такую точку, чтобы модуль этой разности был наибольшим.

43. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ найти такую точку E, из которой стороны AD и DC были бы видны под равными углами. При каком соотношении между сторонами прямоугольника задача возможна?

44. Данный треугольник ABC пересечь прямой $DE \| BC$ так, чтобы площадь треугольника BDE равнялась заданной величине k^2. При каком соотношении между k^2 и площадью треугольника ABC задача возможна и сколько она имеет решений?

45. Построить треугольник по его периметру $2p$, одной из высот h_a и радиусу r вписанного круга.

46. На плоскости даны прямая и по одну сторону от нее две точки. Найти на данной прямой точку, сумма расстояний от которой до двух данных точек равна данной величине d.

47. Построить ромб при условии, что две его противоположные вершины лежат в данных точках, а третья вершина лежит на данной окружности.

48. Построить трапецию по ее боковым сторонам, углу между продолжениями боковых сторон и углу между диагоналями.

49. Дан произвольный выпуклый четырехугольник. Вписать в него квадрат и описать вокруг него квадрат.

50. Через четыре данные точки провести четыре прямые так, чтобы они образовали прямоугольник с заданным углом между диагоналями.

51. Построить четырехугольник $ABCD$ по заданным диагоналям AC и BD, углам BAC и BCD и углу между диагоналями.

52. Дан треугольник ABC. Найти точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы вокруг шестиугольника $AC_1BA_1CB_1A$ можно было описать окружность и чтобы в него можно было вписать окружность.

53. Точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника проектируется на его стороны. Зная проекции, построить четырехугольник.

54. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

55. Из четырех подобных (неравных) прямоугольных треугольников составить прямоугольную трапецию.

56. Биллиард имеет форму острого угла величины α, стороны которого продолжены достаточно далеко в одном направлении. Из некоторой внутренней точки A под углом β к одному из бортов пущен упругий шарик, размерами которого можно пренебречь. Выяснить, как происходит отражение шарика от бортов в зависимости от величин α и β. Найти условия, при которых 1) шарик после нескольких отражений от бортов начинает двигаться в обратную сторону; 2) отражение от бортов прекращается и шарик вылетает из биллиарда; 3) шарик проходит вновь через точку A.

57. Дана прямая l и вне ее точки A и B. Найти на прямой l такую точку M, чтобы угол, образуемый лучом MA с прямой l, был вдвое больше угла, образуемого лучом MB с той же прямой l.

58. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Построить три окружности, пересекающиеся попарно ортогонально, центры которых находятся в данных точках.

59. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Принимая их за центры, построить три окружности, которые касались бы друг друга.

60. Построить окружность, которая из вершин данного треугольника видна под данными углами.

61. Дана полуокружность. Другая окружность проходит через ее центр и внутренне ее касается. Построить окружность, касающуюся данных окружностей и диаметра данной полуокружности.

62. Из концов данной хорды провести две параллельные между собою хорды, сумма длин которых равна данному отрезку.

63. На основании BC треугольника ABC найти точку D такую, чтобы окружности, вписанные в треугольники ABD и ADC, взаимно касались.

64. Даны точки A и B по одну сторону от данной прямой KL и точка C по другую сторону от этой прямой. Найти точки пересечения данной прямой с окружностью, проходящей через эти точки, если центр этой окружности недоступен.

65. В данную окружность вписать треугольник так, чтобы две его стороны были параллельны данным прямым, а третья проходила бы через данную точку.

66. Дана окружность. Даны также пересекающиеся хорды AB и CD этой окружности. Найти на дуге AB точку X такую, чтобы прямые XC и XD отсекали на хорде AB отрезок данной длины.

67. Даны окружность и две точки. Через эти точки провести окружность так, чтобы она пересекала данную окружность в ее двух диаметрально противоположных точках.

68. На данной прямой найти точку, из которой одна из двух концентрических окружностей видна под углом втрое большим, чем другая.

69. Дана прямая MN, окружность (O) и точки A и B на ней. Найти на окружности такую точку X, чтобы прямые AX и BX отсекали на прямой MN отрезок данной длины.

70. Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в заданной на этой прямой точке.

71. В плоскости треугольника ABC с углом при вершине, равным 120°, найти точку, сумма расстояний которой до сторон треугольника имеет наименьшее значение.

72. В плоскости треугольника ABC с углом при вершине, превышающим 120°, найти точку, сумма расстояний которой до вершин имеет наименьшее значение.

73. В данный треугольник поместить центральносимметрический многоугольник наибольшей площади.

74. Через вершину A треугольника ABC провести прямую так, чтобы сумма расстояний ее от вершин C и B была наибольшей.

75. На стороне BC треугольника ABC найти точку, сумма расстояний которой до двух других сторон имеет наименьшее значение.

76. На стороне BC треугольника ABC найти точку, сумма расстояний которой до двух других сторон имеет наибольшее значение.

77. Вокруг данного прямоугольника описать четырехугольник наибольшей площади.

78. Из всех трапеций, описанных вокруг данной окружности, найти трапецию наименьшей площади и наименьшего периметра.

79. На данной окружности найти точку, наименее удаленную от данной точки.

80. На данной окружности найти точку, наиболее удаленную от данной точки.

81. Найти отрезок наименьшей длины, концы которого лежат на двух данных окружностях.

82. Найти отрезок наибольшей длины, концы которого лежат на двух данных окружностях.

83. На отрезках AC и CB диаметра AB описаны как на диаметрах полуокружности. При каком положении точки площадь фигуры, заключенной между тремя полуокружностями, будет наибольшая?

84. Из треугольников с общим углом при вершине и данной суммой боковых сторон найти треугольник с наименьшим основанием.

85. Стороны AB и AC треугольника ABC продолжены за вершины B и C на отрезки BD и CF так, что

$$BD + CF = BC.$$

При каком условии отрезок DF будет иметь наименьшую длину?

86. Через данную точку A вне круга провести секущую ABC так, чтобы $\triangle BOC$ (O — центр круга) имел бы наибольшую площадь.

87. В $\triangle ABC$ на основании BC дана точка M. Требуется провести $DE \| BC$ так, чтобы площадь треугольника MDE была наибольшей.

88. Внутри данного выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний которой до вершин данного четырехугольника имела бы наименьшую величину.

89. Внутри прямоугольника $ABCD$ дана точка P. Найти на каждой из сторон прямоугольника по одной точке K, L, M, N так, чтобы ломаная $PKLMNP$ имела наименьшую длину.

90. Дан угол и на одной его стороне даны точки A и B. На другой стороне угла найти такую точку C, чтобы угол ACB достигал максимума.

91. В данный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.

92. Разрезать прямоугольник с измерениями 16 и 9 на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

93. Как разрезать параллелограмм на части, из которых можно затем сложить квадрат?

94. Даны окружность и ее центр. С помощью одной линейки вписать в эту окружность квадрат.

95. Даны окружность и ее центр. С помощью одной линейки вписать в эту окружность правильный треугольник.

96. Из точки, лежащей вне окружности, опустить перпендикуляр на данный диаметр окружности, пользуясь одной линейкой.

97. Даны окружность и точки A и B вне окружности. Построить точки пересечения прямой AB с данной окружностью при помощи одного циркуля.

98. Построить центр окружности при помощи одного циркуля.

99. Пользуясь только циркулем, построить по двум данным вершинам квадрата две другие его вершины.

100. В треугольнике даны середины двух сторон. Через произвольную точку в плоскости треугольника провести при помощи одной линейки прямую, параллельную третьей стороне.

101. В плоскости треугольника даны две прямые, параллельные двум сторонам треугольника. Через произвольную точку плоскости треугольника провести при помощи одной линейки прямую, параллельную третьей стороне.

102. Провести к данной окружности из внешней точки касательные, пользуясь одной линейкой.

103. Из данной точки окружности опустить перпендикуляр на ее диаметр при помощи одной линейки (центр окружности неизвестен).

104. Даны отрезок и параллельная ему прямая. Пользуясь только линейкой, разделить этот отрезок пополам.

105. При помощи одной линейки провести прямую, параллельную основаниям данной трапеции, так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри трапеции, делился диагоналями на три равные части.

106. Пользуясь одной линейкой, разделить трапецию на две равновеликие части.

107. В круг вписан правильный шестиугольник. Пользуясь одной линейкой, построить $\frac{1}{n}$-ю часть радиуса ($n = 2, 3, 4 \ldots$).

108. Найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершины треугольника наименьшая. Найти величину этой суммы.

Глава XX

ЗАДАЧИ, В РЕШЕНИИ КОТОРЫХ ПРИМЕНЯЮТСЯ КОМБИНИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ

1.* На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A', B', C'. Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2 C_2 — образы точек A, B, C в гомотетиях с одним и тем же коэффициентом гомотетии k и соответственно центрами гомотетий в точках C', A', B' и B', C', A'.

Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют один и тот же центр тяжести.

2.** Пусть ABC — треугольник, сторона BC которого лежит на фиксированной прямой (D) и угол A которого задан: $A=\alpha$, причем $0<\alpha<90°$. Кроме того, фиксирована точка H пересечения высот треугольника ABC.

1°. Показать, что окружность, описанная вокруг треугольника ABC, проходит через фиксированную точку. Построить треугольник ABC, зная точку H, прямую (D), угол α и еще длину a стороны BC. Исследовать.

2°. Пусть B' и C' — точки, полученные из точек B и C в результате преобразования инверсии с полюсом H и степенью инверсии $4k^2$, где $2k$ — расстояние от точки H до прямой (D). Найти огибающую прямой $B'C'$. Показать, что окружность, описанная вокруг треугольника HBC, касается фиксированного круга; вычислить диаметр этого круга в функции k и α.

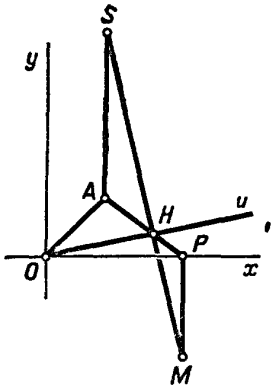
3°. Доказать, что окружность (O), описанная вокруг треугольника ABC, касается фиксированного круга. Найти геометрическое место центров O этого круга, а также геометрическое место центров тяжести треугольника ABC.

4°. Изучить окружность, полученную в результате инверсии $I(H, 4k^2)$ окружности с диаметром BC. Подсчитать радиус этой окружности. Показать, что окружность с диаметром BC касается двух фиксированных окружностей, симметрично расположенных по отношению к BC.

3. Пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки, лежащие на стороне BC треугольника ABC, N' — произвольная точка, лежащая на стороне CA, и P' — произвольная точка, лежащая на стороне AB. Обозначим точки пересечения прямых $N'M_1$ и $N'M_2$ со стороной AB через Q_1 и Q_2, а точки пересечения прямых $P'M_1$ и $P'M_2$ со стороной AC через R_1 и R_2. Доказать, что прямые BC, Q_1R_2, Q_2R_1 проходят через одну точку.

4*. Прямолинейный отрезок CD постоянной длины перемещается произвольно по прямой xy между фиксированными точками A и B этой прямой (C — со стороны A; D — со стороны B). Построим полуокружности (O_1) и (O_2) на AC и DB как на диаметрах, расположенные по одну сторону от прямой xy, затем — полуокружность (O) с диаметром AB по другую сторону от прямой xy. Найти геометрическое место середин P и Q полуокружностей (O_1) и (O_2), а также геометрическое место середин отрезков SP, SQ и PQ. Найти огибающую прямой PQ.

5. В плоскости даны две взаимно-перпендикулярные прямые Ox и Oy (черт. 73). На перпендикуляре к плоскости xOy в точке O отложен от точки O отрезок $OA = 1$. Через точку A проведен луч, параллельный оси Oy, и на нем от точки A в положительном направлении оси Oy отложен отрезок $AS = 1$. Рассмотрим переменную прямую Ou, проходящую через точку O, но все время остающуюся в плоскости AOx. Пусть H — проекция точки S на Ou. Пусть M — точка встречи прямой SH с плоскостью xOy и, наконец, пусть P — точка встречи прямых AH и Ox.



Черт. 73.

1°. Доказать, что точка H описывает окружность (Γ) с диаметром OA, расположенную в плоскости AOx.

2°. Доказать, что $PM \| SA$. Отсюда следует, что $\overline{OP} = x$ и $\overline{PM} = y$ — координаты точки M. Рассматривая отношение $\frac{\overline{PM}}{\overline{AS}}$ и используя свойство прямоугольного треугольника AOP, доказать, что $y = -x^2$. Пусть (C) — геометрическое место точек M; построить касательную к (C) в точке M_1 этой линии с абсциссой $\overline{OP}_1 = 1$.

3°. Пусть AK — высота треугольника SAH. Доказать, что AK — перпендикуляр к плоскости OSH.

6*. $A'D$ — диаметр окружности с центром в точке A; J — точка, лежащая на радиусе AD, такая, что $AJ = \frac{R}{3}$, где R — радиус окружности. Через точку J проводится произвольная прямая, пересекающая окружность в точках M и N.

1°. Касательные к окружности в точках M и N пересекаются в точке Σ. Найти геометрическое место точек Σ.

2°. Произведем инверсию с центром в точке J и с коэффициентом инверсии, равным $\overline{JA} \cdot \overline{JA'}$. Обозначим через M' и N' точки, получающиеся в результате этой инверсии из точек M и N. Геометрическое место точек M' и N' будет окружностью (B), полученной из данной в результате указанной инверсии. Найти ее центр.

3°. Касательные к окружности (B) в точках M' и N' пересекаются в точке F. Доказать, что точки E, J и F лежат на одной прямой. Найти геометрическое место (L) точек F. Найти точку, в которой линия (L) пересекает прямую AA'.

4°. Доказать, что существует окружность (T) с центром в некоторой точке C, касающаяся в точке M данной окружности и в точке M' окружности (B). Доказать, что, когда точка M описывает данную окружность, окружность (T) остается ортогональной некоторой фиксированной окружности.

5°. Найти геометрическое место точек C.

7.* Дана окружность с центром O и точки B и C на окружности. Точка A движется по этой окружности; H — точка пересечения высот треугольника ABC.

1°. Определить геометрическое место точек пересечения медиан треугольника AOH.

2°. Определить геометрическое место оснований D биссектрисы внутреннего угла A треугольника AOH.

3°. Определить положение точки A, при котором биссектриса AD имеет данную длину.

8*. Даны две окружности радиусов R и R' с центрами в точках O и O' $(OO' = d)$, пересекающиеся в точках A и B. Точка P описывает окружность (O); M и N — точки пересечения хорд PA и PB с окружностью (O').

1°. Определить огибающую MN.

2°. Определить геометрическое место центра окружности, описанной вокруг треугольника PMN, геометрическое место точки пересечения его высот и геометрическое место его центра тяжести.

3°. Определить положение точки P на окружности (O), при котором

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$

4°. Определить положения точки P, при которых окружность, описанная вокруг треугольника PMN, пересекает окружности (O) и (O') под равными углами; вычислить величину этих углов.

1°. Пусть M — произвольная точка плоскости. Доказать, что разность степеней точки M относительно окружностей (O) и (O') с центрами O и O' равна $2\overline{OO'} \cdot \overline{KM}$, где K — проекция точки M на радикальную ось окружностей (O) и (O').

2°. Рассмотрим пучок (F) окружностей и пусть (Δ) — их общая радикальная ось. Будем обозначать через (M, O) какую-нибудь точку M, лежащую на окружности (O) пучка (F), а через $\sigma(M, O)O_1$ — степень этой точки относительно окружности (O_1) того же пучка (F). Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точка M лежит на окружности (O_2) пучка (F), может быть записано в виде

$$\sigma(M, O_2)O_1 = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{KM},$$

где (O_1) — произвольная окружность пучка (F), а K — проекция точки M на радикальную ось окружностей (O_1) и (O_2).

3°. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точки M и M' лежат на одной и той же окружности (O) пучка (F), может быть записано в виде

$$\frac{\sigma(M, O)O_1}{\sigma(M', O)O_1} = \frac{\overline{KM}}{\overline{K'M'}},$$

т. е. для того, чтобы две точки M и M' плоскости лежали бы на одной и той же окружности пучка (F), необходимо и достаточно, чтобы отношение их степеней по отношению к произвольной окружности (O_1) пучка (F) было бы равно отношению ориентированных расстояний этих точек до радикальной оси пучка.

4°. Доказать, что для того чтобы точка M лежала на данной окружности (O_3) пучка, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее степеней относительно двух произвольных окружностей (O_1) и (O_2) этого пучка было равно отношению ориентированных расстояний от центров O_1 и O_2 до центра O_3:

$$\frac{\sigma(M, O_3)O_1}{\sigma(M, O_3)O_2} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_2O_3}}.$$

5°. Доказать, что геометрическое место точек, отношение степеней которых относительно двух данных окружностей (O_1) и (O_2) равно данной величине k, есть окружность (O) пучка (F) [определяемого окружностями (O_1) и (O_2)], центр которой определяется соотношением

$$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k.$$

6°. Пусть (O_1) и (O_2) — две произвольные окружности, P и N — их центры подобия. Доказать, что окружность, построенная на PN как на диаметре, принадлежит к пучку окружностей, определяемому окружностями (O_1) и (O_2).

10*. Пусть (C) — окружность с центром O и радиусом R. Возьмем внутри окружности (C) произвольную точку J, отличную от центра O, и проведем через точку J прямую, перпендикулярную прямой OJ; точки пересечения этой прямой с окружностью (C) обозначим через C и D. Пусть световой луч, выходящий из произвольной точки A окружности, отразившись в точке J от диаметра OJ, встречает окружность (C) в точке B.

1°. Доказать, что прямая AB проходит через фиксированную точку.

2°. Пусть M — середина AB. Доказать, что AB — биссектриса угла CMD.

3°. Обозначим через γ и δ точки встречи данной окружности с прямой OM. Пусть α — точка пересечения прямых $C\gamma$ и $D\delta$, а β — точка пересечения прямых $C\delta$ и $D\gamma$. Доказать, что α, β, γ, δ суть центры окружностей, вписанной и вневписанных в треугольник CMD. Найти геометрическое место этих точек при условии, что точка A описывает данную окружность (C).

4°. Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника CMD, проходит через середины шести отрезков: $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$. Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$ и $\delta\alpha\beta$, имеют один и тот же радиус; найти этот радиус.

Каково геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг указанных четырех треугольников?

11.** Рассмотрим на плоскости взаимно-перпендикулярные оси Ox и Oy и треугольники MOM', для которых ось Ox служит биссектрисой внутреннего угла MOM', причем $OM' = 2OM$. Эти треугольники будем называть треугольниками (T).

1°. Пусть I — точка пересечения MM' с осью Ox, m — проекция точки M на ось Ox, а m' — проекция на ось Ox точки M'. Изучить четверку точек O, I, m, m'. Изучить четверку точек, состоящую из точки O и точек A, A' и B — пересечения с осью Ox медиатрис треугольника MOM'.

2°. Построить треугольник (T), удовлетворяющий следующим условиям:
а) задана прямая, проходящая через точки M и M';
в) задана середина P отрезка MM';
б) задан центр ω окружности, описанной вокруг треугольника MOM'.

3°. Пусть точка M описывает окружность (C), касающуюся в точке O оси Ox. Найти геометрическое место точек M', соответствующих точке M [таких, что MOM' — треугольник (T)]. Доказать, что каждая из медиатрис треугольника (T) проходит через фиксированную точку. Найти геометрическое место центров ω окружностей, описанных вокруг треугольника (T).

4° Пусть окружности, описанные вокруг треугольника (T), проходят через фиксированную точку B оси Ox. Найти геометрическое место точек M и M' и место середины P отрезка MM'.

12.** Рассмотрим на плоскости все линии (C) второго порядка с данным эксцентриситетом e, данным фокусом F, директрисы (D) которых, соответствующие фокусу F, проходят через данную точку I.

1°. Найти геометрическое место вершин этих линий.

2°. Пусть (C_1) и (C_2) — две линии данного семейства, директрисы которых взаимно-перпендикулярны.

а) Найти геометрическое место точек пересечения линий (C_1) и (C_2).

б) Найти геометрическое место точек пересечения направляющих окружностей линий (C_1) и (C_2). Изучить огибающую общих касательных к линиям (C_1) и (C_2). При каком условии существует эта огибающая, каков ее вид в зависимости от различных значений e?

13*. Рассмотрим треугольник ABC. Обозначим через (U) окружность, которая проходит через точки A и B и центр I которой расположен на AC;

через (V) обозначим окружность, которая проходит через точки A и C и центр J которой расположен на AB; наконец, через (W) обозначим окружность, описанную вокруг треугольника ABC, а через K — ее центр.

1°. Построить треугольник ABC, зная I, J, K.

2°. Обозначим через H точку пересечения окружностей (U) и (V), отличную от A. Доказать, что центр K окружности (W) расположен на прямой AH.

3°. Предположим теперь, что $AB = AC = 2a$.
Обозначим $\angle BAC$ через $2x$. Выразить в функции a и x площадь y треугольника IJK. Изучить изменение этой площади, считая, что угол A принимает всевозможные значения (a — фиксировано). Для изучения площади треугольника IJK положить $\operatorname{tg} x = t$.

14.** Точки A, B, C лежат на одной прямой (точка C лежит между точками A и B). Обозначим через M точку пересечения касательных, проведенных из точек A и B к окружности с центром C и произвольным радиусом x.

1°. Найти геометрическое место точек M. Доказать, что это геометрическое место есть окружность (Γ), центр D которой расположен на прямой AB. Вычислить AD и радиус R этой окружности в функции $CA = a$, $CB = b$ $(a > b)$.

2°. Допустимому значению x соответствует на полуокружности (Γ), ограниченной диаметром AB, два положения M и M' точки M. Составить уравнение второй степени, определяющее длины MA и $M'A$ в функции a, b, x, и вычислить MA и $M'A$. Вычислить также MB и $M'B$. Вычислить радиусы ρ и ρ' окружностей, описанных вокруг треугольников MAB и $M'AB$. Используя инверсию с центром A, дать простое геометрическое построение касательных к этим окружностям в точках A и B, а также в точках M и M'.

3°. Рассмотреть частный случай $x^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Показать, что в этом частном случае углы A и B удовлетворяют одному из соотношений: $B \pm A = \dfrac{\pi}{2}$ — и проверить справедливость равенств

$$MA^2 + MB^2 = 4\rho^2, \quad M'A^2 + M'B^2 = 4\rho'^2.$$

15. Пусть AOB — квадрант окружности радиуса R. Из точки M дуги AB опускаются перпендикуляры MP на OA и MQ на OB.

1°. Определить точку M таким образом, чтобы $MP + 2MQ = l$, где l — данное число.

а) Принять за неизвестное $OP = x$. Исследовать.

б) Дать геометрическое решение и получить снова результаты предыдущего исследования.

2°. Определить M таким образом, чтобы отношение поверхности сферического сегмента, полученного в результате вращения дуги $\overset{\frown}{MA}$ вокруг OA, к поверхности сферического сегмента, полученного в результате вращения дуги $\overset{\frown}{MB}$ вокруг OB, было равно данному положительному числу m.

а) Принять за неизвестное $\angle AOM = \theta$ и за независимое переменное $\operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2} = t$. Исследовать.

б) Дать геометрическое решение задачи и получить геометрически снова результаты предыдущего исследования.

16.** Даны равносторонний треугольник ABC и точка P, лежащая на окружности, описанной вокруг этого треугольника. Обозначим через X, Y, Z точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно с BC, CA и AB. Проведем через X, Y, Z прямые XZ', YX', ZY', параллельные соответственно CA, AB и BC (X' — лежит на BC, Y' — на CA, Z' — на AB).

1°. Доказать, что

$$\left(1-\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\right)\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=1.$$

2°. Доказать, что $AX'\|BY'\|CZ'$.

3°. Доказать, что треугольники XYZ и $XY'Z'$ одинаково ориентированы, а их площади остаются равными и постоянными, если точка P описывает окружность (ABC).

17.** Дана окружность (C) с центром O и радиусом R. Пусть AB — фиксированный диаметр этой окружности и (D) — прямая, перпендикулярная AB в точке H, расположенной с той же стороны от O, что и B, причем H и B различны. Дано: $OH=d$; точка M описывает прямую (D), прямые MA и MB пересекают окружность (C) вторично в точках P и Q.

1°. Доказать, что окружность (Γ), описанная вокруг треугольника MPQ, ортогональна окружности (C) (можно использовать инверсию с полюсом M). Определить геометрическое место ее центра.

2°. Показать, что прямая PQ проходит через фиксированную точку S и определить положение точки S относительно (C) и (D). Найти геометрическое место второй точки N пересечения окружности (Γ) и окружности, описанной вокруг треугольника MAB.

3°. Пусть ω — центр окружности (Γ). Ориентируем прямую (D) и положим $\overline{HM}=x$, $\overline{H\omega}=y$. Установить соотношение между x, y, R и d и изучить y как функцию от x в случае $d=\frac{R}{2}$.

18.** Рассмотрим окружность (C) с центром O и радиусом R и фиксированную точку A на этой окружности. Переменная прямая (Δ) пересекает окружность (C) в точках M и N. Прямые AM и AN пересекаются соответственно в точках M' и N' с прямой, перпендикулярной AO и проходящей через точку O.

1°. Доказать, что точки M, N, M', N' лежат на одной окружности (Γ), которая при изменении (Δ) остается ортогональной к окружности с центром A и радиусом $R\sqrt{2}$.

2°. Определить радикальную ось двух окружностей (Γ_1) и (Γ_2), соответствующую двум положениям (Δ_1) и (Δ_2) прямой (Δ).

3°. Пусть I — центр окружности (Γ). Доказать, что если B — какая-нибудь точка (Δ), разность IA^2-IB^2 выражается просто в функции R и OB так, что если прямая (Δ) проходит через фиксированную точку F, точка I остается на фиксированной прямой (D). Можно ли получить этот последний результат, опираясь на результаты пункта 2° и минуя вычисление разности IA^2-IB^2?

Доказать, что (D) есть поляра по отношению к (C) точки F', полученной переносом из F, который переводит A в O [полезно вычислить расстояние от O до (D)].

4°. Доказать, что I имеет полярой по отношению к (C) прямую (Δ'), полученную из (Δ) переносом, переводящим A в O.

19.** Доказать, что окружность девяти точек треугольника ABC касается четырех окружностей, касающихся сторон треугольника, т. е. вписанной и вневписанных окружностей (теорема Фейербаха).

20.** Доказать, что окружность, ортогональная трем окружностям, имеющим центрами середины сторон треугольника и проходящим через основания соответствующих высот, касается окружности девяти точек.

21.** Рассмотрим точки H, F, K, лежащие на одной прямой, причем F — середина HK. На отрезке FK как на диаметре построена окружность (C). Через точку H проведена прямая, перпендикулярная HFK. Во всем дальнейшем через (d) обозначается переменная прямая, проходящая через

точку F и пересекающая (D) в точке B, а окружность (C) — вторично в точке A.

1°. Доказать, что $\overline{FA}\cdot\overline{FB}=\text{const}$. Какое преобразование переводит окружность (C) в прямую (D). Какая точка соответствует в этом преобразовании середине отрезка AB?

2°. Для каждого положения (d) рассматривается эллипс с фокусом F и большей полуосью AB. Доказать, что все эти эллипсы имеют постоянную длину меньшей оси. Имеется ли в этом семействе окружность? Определить (d) так, чтобы эллипс (E) имел заданную длину большей оси или чтобы он имел заданный эксцентриситет. Исследовать.

3°. Прямая KA пересекает прямую (D) в точке P. Перпендикуляр к (D) в точке P пересекает (d) в точке M. Доказать, что четверка точек B, A, F, M — гармоническая. Найти геометрическое место (L) точек M при условии, что (d) изменяется. Доказать, что касательная в точке M к (L) и касательная в точке A к окружности (C) пересекаются на прямой (D).

4°. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг треугольника KPB.

22**. На ориентированной прямой заданы точки A, F, F' такие, что $\overline{AF}=m$, $\overline{AF'}=m'$, $0<m<m'$. Пусть (F) — окружность с центром F и радиусом m, (F') — окружность с центром F' и радиусом m', (C) — переменная окружность, касающаяся (F) и (F'); C — центр окружности (C), P — точка прикосновения ее с (F), а P' — точка прикосновения с (F').

1°. Доказать, что геометрическое место точек C состоит из эллипса и прямой линии.

2°. Показать, что если точки P и P' различны, то прямая PP' проходит через фиксированную точку I. Каково положение точки I относительно точек F и F'? Вычислить AI в функции m и m'.

3°. Получить из 2° геометрическое построение точек пересечения эллипса с фокусами F и F', проходящего через A, с прямой, проходящей через F или F'.

4°. Каково геометрическое место точек пересечения касательных к (C) в точках P и P'?

Дать геометрический способ построения касательных к эллипсу (E), проведенных из любой точки прямой, проходящей через A, перпендикулярно FF'.

5°. Найти образы (F), (F') и (C) в инверсии $(A, 4mm')$. Во что инвертируется прямая PP'? Использовать эту инверсию:

а) для того, чтобы установить результаты 2°;

б) для того, чтобы доказать, что окружность (C) остается ортогональной фиксированной окружности при условии, что P и P' различны; вычислить $\overline{AK}$, где K — центр этой окружности.

23*. Рассмотрим полный четырехугольник, противоположные вершины которого (A, C), (B, D), (I, J).

1°. Доказать, что

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}:\frac{\overline{ID}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{JA}}{\overline{JD}}:\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}.$$

2°. Вывести отсюда, что если биссектрисы углов IAJ и IBJ пересекаются на IJ, то же самое имеет место и по отношению к углам IDJ и ICJ.

3°. Пусть (γ_1) и (γ_2) — две окружности пучка, предельные точки которого суть I и J. Какая-нибудь секущая, проходящая через I, пересекает (γ_1) в точках A и B. Прямые JA и JB пересекают (γ_2) в точках C и D.

Доказать, что точки I, C, D лежат на одной прямой.

24.** Пусть P — точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC по отношению к центру O описанной окружности, и Q — точка, симметричная точке O относительно H. Доказать, что центры тяжести треугольников PBC, PCA, PAB и центры тяжести треугольников QBC, QCA и QAB расположены на двух равных окружностях с центрами O и H. Обобщить это на случай произвольного положения точек P и Q на плоскости.

25. Рассмотрим на прямой точки O, A и B ($OA=a$, $OB=b$), и пусть прямые OX и AX' проходят через точки O и A перпендикулярно прямой OAB. Возьмем на прямой OX точку M такую, что $OM=x$. Проведем прямую MB, пересекающую AX' в точке Q, и $MP \parallel OAB$, причем P — точка прямой AX'; проведем еще $MN \perp MB$, где N — точка прямой AX'.

1°. Вычислить в функции a, b, x длины отрезков PN, PQ и AN.

2°. Вычислить x, если задано $AN=d$.

3°. Доказать, что задача имеет решение, если только d превосходит или равно некоторой величине, и найти эту величину; доказать, что если d принимает это крайнее значение, то соответствующее положение точки M таково, что P — середина AN.

4°. Вычислить площадь треугольника MNQ. Вычислить x, если задана площадь s этого треугольника.

5°. Доказать, что последний вопрос имеет решение, если s больше или равно некоторой величине, которую требуется определить. Доказать, что если s равно этой величине, то MB образует с OAB угол $\frac{\pi}{4}$.

Дать геометрическую интерпретацию результату.

26.** Рассмотрим треугольники ABC, в которых $\angle B = 2\angle C$.

1°. Доказать, что стороны такого треугольника связаны соотношением $AC^2 = AB(AB+BC)$.

2°. В таком треугольнике заданы сторона $BC=a$ и разность $AC-AB=l$ двух других сторон. Составить систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которых можно определить длины x и y сторон AB и AC; решить эту систему; дать исследование.

3°. Дана сторона $BC=a$ произвольного треугольника ABC. Доказать, что условие $AC-AB=l$ указывает на то, что точка A расположена на некоторой линии (H_1); требуется определить тип этой линии и ее расположение.

Доказать, что если в треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и сторона BC фиксирована, то точка A описывает гиперболу (H_2) с фокусом B, директриса которой есть медиатриса отрезка BC.

Доказать, что точки пересечения (H_1) и (H_2) можно построить при помощи циркуля и линейки.

27. Пусть задан отрезок BC длиной a, O — его середина, D — точка этого отрезка такая, что

$$\frac{DB}{DC} = m.$$

На перпендикуляре в точке D к отрезку BC откладывают отрезок $DH=l$ ($l=\text{const}$); через точку H проводится секущая, пересекающая в точках M и N перпендикуляры к BC, проведенные в точках B и C, причем $\overline{BM}\cdot\overline{CN} = l^2 = DH^2$.

1°. Доказать, что $\overline{BM}=ml$ и $\overline{CN}=\frac{l}{m}$. Установить, что перпендикуляр из C на DN и перпендикуляр из B на DM пересекают DH в одной и той же точке A. Вычислить DA в функции a, l и m. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно BC. Что можно сказать о расположении точек B, H, C, A'? Каково положение точки A относительно треугольника BHC?

2°. Вычислить площадь s_1 трапеции $BMNC$ и площадь s_2 треугольника MDN в функции a, l и m.

3°. Вычислить тангенс угла MDN в функции a, l и m.

4°. Положим $\overline{OD}=x$. Выразить m в функций x и найти геометрическое место точек A, когда D описывает отрезок BC.

28.** Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AB=AC$) и M-какая-нибудь точка, лежащая на его стороне BC. Построим окружности, проходящие через точку M и касающиеся прямой AB в точке B, а прямой AC — в точке C. Пусть D и E — их центры, а N — вторая их общая точка. Точка M — переменная точка, описывающая отрезок BC.

1°. Доказать, что сумма радиусов построенных окружностей постоянна и что медиагриса отрезка DE проходит через фиксированную точку.

2°. Найти геометрическое место середины отрезка DE. Установить, что DE касается фиксированной параболы и что точка прикосновения есть центр отрицательной гомотетии окружностей (D) и (E).

3° Доказать, что прямая MN проходит через точку A и что $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=$const. Найти геометрическое место точек N.

4°. Указать, во что преобразуется конфигурация при инверсии $(N, \overline{NA}\cdot\overline{NM})$.

29.** Доказать, что условие $AB=AC$ есть необходимое и достаточное условие того, что окружность, проходящая через основание A' биссектрисы внутреннего угла A и через основания B_1' и C_1' биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC, касается стороны BC.

30. Выпуклый многоугольник, имеющий $2n$ сторон, вписан в окружность (C), причем его стороны равны поочередно a и b.

1°. Даны: n, a, b $(b<a)$. Определить угол α, под которым из центра C видна сторона длиной a, и угол β, под которым из центра C видна сторона b; вычислить диаметр d окружности (C).

2°. Дано число $2n$ сторон и периметр $2p$ многоугольника. Найти максимум и минимум площади многоугольника при всевозможных значениях a и b.

31.** Через произвольные точки M, N, P, расположенные соответственно на прямых BC, CA и AB, проходят прямые, параллельные данной прямой (Δ), которые пересекают высоты AA', BB' и CC' треугольника ABC соответственно в точках M', N', P'. Доказать, что касательные в точках A', B' и C' к окружностям $(MA'M')$, $(NB'N')$ и $(PC'P')$ пересекаются в одной точке, и определить геометрическое место этих точек при условии, что прямая (Δ) вращается вокруг некоторой точки.

32. Дан равносторонний треугольник и произвольная прямая, лежащая в плоскости этого треугольника. Пусть a, b, c — расстояния от вершин этого треугольника до этой прямой. Доказать, что сумма $a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)$ постоянна. Обобщить.

33. На прямой заданы отрезок $AB=a$ и точка C на AB, расположенная между A и B. Положим $AC=2x$. Пусть O — середина AC. Построим полуокружность с диаметром AC. Обозначим через D точку прикосновения касательной, проведенной из B к этой полуокружности, через E — точку, в которой прямая BD пересекает перпендикуляр к AB в точке A. Пусть, наконец, I проекция D на AB.

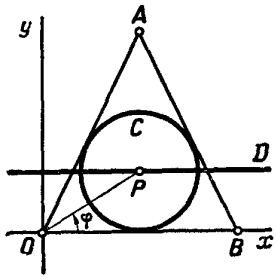
1°. Что можно сказать про треугольники BAE и BDO? Вычислить BO, BD, AE, BE в функции a и x.

2°. Вычислить длины отрезков OI и AI; изобразить графически функцию $y=AI$ как функцию от x при условии, что C описывает отрезок AB; положить при этом $a=2$.

3°. Фигура вращается вокруг AB. Вычислить площади s_1 и s_2, описанные соответственно отрезком BE и дугой AD. Определить x так,

чтобы $\frac{s_2}{s_1} = m$, где m — данное положительное число. Исследовать; рассмотреть частный случай: $m = \frac{1}{2}$.

34*. Даны две взаимно-перпендикулярные оси Ox и Oy и прямая (D), уравнение которой $y = r$. Переменная окружность (C) имеет постоянный радиус r и центр P на прямой (D); положение центра определяется углом $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$. Для каждого положения окружности (C) строится два равнобедренных треугольника OAB $(OA = AB)$, три стороны которых касаются (C), причем вершина B лежит на оси Ox.



Черт. 74.

1°. Для одного из этих треугольников окружность (C) вневписана в угол O или в угол B. Каково геометрическое место соответствующих точек A?

2°. Для второго треугольника ABC окружность (C) либо вписана в треугольник OAB (как на черт. 74), либо вневписана в угол A. Как различить эти два случая в зависимости от значений φ?

35. Биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$. Точки B и C проектируются на AD; их проекции обозначим соответственно через β и γ.

1°. Доказать, что

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\alpha}{AD}.$$

2°. Пусть xAy — фиксированный угол величиной 2α. На полупрямых Ax и Ay берутся соответственно точки B и C такие, что

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2}{m},$$

где m — заданное положительное число.

а) Доказать, что прямая BC проходит через фиксированную точку.

б) На полупрямых Ax и Ay берут еще пару точек B' и C' таких, что

$$\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AC} \cdot \overline{AC'} = k^2,$$

где k — данное положительное число.

Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника $AB'C'$, проходит через вторую фиксированную точку F, а прямая $B'C'$ остается касательной к некоторой фиксированной параболе с фокусом F.

3°. При данных n 2° положим $\angle ADB = \theta$.

а) В каких пределах могут изменяться θ и $\sin\theta$?

б) Вычислить DB и DC в функции AD, α и θ.

Доказать, что

$$BC = \frac{AD \sin\theta \sin 2\alpha}{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}.$$

36*. Даны окружности (Γ) и (Γ'); R и R' — их радиусы, d — расстояние между центрами O и O'; (γ) — образ (Γ) в инверсии (O', R'^2) и (γ') — образ окружности (Γ') в инверсии (O, R^2).

1°. Вычислить в функции R, R' и d радиусы r и r' окружностей (γ) и (γ'). Обозначим через ω и ω' центры этих двух окружностей; вычислить $\overline{O\omega}$ и $\overline{O'\omega'}$; положительное направление на прямой OO' устанавливается от O к O'.

2°. Показать, что если $R \neq R'$, то из $r = r'$ следует или

$$d^2 = R^2 + R'^2 - RR', \tag{1}$$

или

$$d^2 = R^2 + R'^2 + RR'. \tag{2}$$

Сформулировать и доказать обратное положение. Доказать, что при любом из указанных двух предположений окружности (Γ) и (Γ') пересекаются. Обозначая через A точку их пересечения, вычислить угол OAO'.

3°. Доказать, что если выполнено или (1), или (2), то окружности (γ) и (γ') совпадают. Вычислить в этом случае отношение $\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}$ и указать, какое положение занимает при этом точка ω.

37.** В плоскости дан отрезок $AB = a$ прямой. Переменная точка M этого отрезка задается расстоянием $AM = x$. С одной стороны от AB построены два равносторонних треугольника: APM и MQB; соединим точки P и Q.

1°. Определить x, если длина PQ задана. Исследовать.

2°. Найти геометрическое место середин O отрезка PQ. Показать, что медиатриса отрезка PQ проходит через фиксированную точку I. Какова огибающая PQ? Что можно сказать про окружности, описанные вокруг треугольника PMQ? Каково геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг треугольников CPQ, где C — четвертая вершина параллелограмма, для которого P, M, Q — три последовательные вершины.

3°. Построить геометрически PQ, зная лишь направление PQ. Построить геометрически PQ, зная длину l этого отрезка?

4°. Продолжение PQ пересекает AB в точке S. Доказать, что окружности с центром S радиусом SM образуют пучок окружностей.

38. Доказать, что если a, b, c и r, r_a, r_b, r_c — длины сторон треугольника и радиусы вписанной и вневписанных в него окружностей, то

$$\frac{abc}{r} \geqslant \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}.$$

39.** В плоскости задана ось Ox, O — начало координат. На этой оси фиксирована точка I_0 с положительной координатой a. Пусть (D) и (D') — две прямые, проходящие через O и образующие с Ox углы, соответственно равные $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$. Перпендикуляр (Δ) в точке I_0 к Ox пересекает (D) в точке A_0, а (D') — в точке B_0.

1°. Пусть дана точка I на прямой (Δ); построить геометрически прямолинейный отрезок AB с серединой I, концы которого A и B лежат соответственно на прямых (D) и (D').

2°. Доказать, что когда I изменяется, оставаясь на прямой (Δ), то переход от точки A к точке B может быть совершен вращением вокруг некоторого фиксированного центра F. Определить построением точку F и угол поворота. Какова огибающая прямых AB?

3°. Пусть (γ) — окружность, касающаяся FA в точке A и FB в точке B. Найти геометрическое место ее центра, когда I описывает (Δ). Доказать, что если P — какая-нибудь точка, лежащая на окружности (γ), то отношение $\frac{PF}{PI}$ постоянно; найти эту постоянную. Получить отсюда геометрическое место (Γ), когда I описывает (Δ) точек M и M' пересечения окружности (γ) и параллели Ox, проведенной через I. Установить, что в точках M и M' линия (Γ) касается окружности (γ).

40.** В плоскости задана окружность (C) с центром O и радиусом R.

1°. Пусть M — какая-нибудь точка плоскости, а (D) — какая-нибудь прямая, проходящая через M. Построить окружности (α) и (β),

проходящие через M и касающиеся прямой (D) и окружности (C) (можно использовать инверсию с полюсом в M). Пусть A и B — точки прикосновения с (C); доказать, что окружность (AMB) ортогональна к прямой (D) и к окружности (C).

2°. Пусть M' — точка, диаметрально противоположная точке M на окружности (ABM). Доказать, что геометрическое место точек M при условии, что прямая (D) вращается вокруг фиксированной точки M, есть прямая (m). Каково при этих условиях геометрическое место точек пересечения касательных, проведенных к окружности (ABM) в точках A и B?

3°. Теперь предположим, что (D) — фиксированная прямая, проходящая на расстоянии $OH=\frac{R}{2}$ от O и что точка M прямой (D) отстоит от H на расстоянии $HM=x$. Вычислить в функции R и x радиусы окружностей (α) и (β). Найти отношение их радиусов. Найти геометрическое место их центров.

41.** Пусть (C) и (C') — две окружности радиусов R и R' с центрами O и O', касающиеся одна другой внешне в точке S. Пусть эти окружности пересекают прямую OO' в точке S и еще в точках A и A'. Общая касательная к ним, отличная от касательной (D) в точке S, пересекает (D) в точке P, а линию центров — в точке S'; M и M' — точки прикосновения, T — середина OO'.

1°. Доказать, что окружность с диаметром OO' касается MM' в точке P. Вычислить SS' и ST в функции R и R'.

2°. Доказать, что A, A', M, M' расположены на одной окружности (Ω), центр ω которой диаметрально противоположен точке P на окружности с диаметром OO'. Доказать, что прямые AM и $A'M'$ пересекаются в точке, лежащей на прямой (D). Пусть α и β — проекции ω на OO' и на (D); доказать, что точки S', P, T, β лежат на одной окружности; доказать, что точки S', P', α, β также лежат на одной окружности.

3°. Прямые SM и SM' пересекают (Ω) вторично в точках N и N'. Доказать, что прямая NN' перпендикулярна (D) и что расстояние ее до S равно $2SP$ (можно рассмотреть окружность, описанную вокруг прямоугольника $SMP'M'$, и произвести соответствующую инверсию). Доказать, что $S'P'$ — радикальная ось (Ω) и точки S.

4°. Предполагая, что прямая OO' и точка S фиксированы, а радиусы R и R' изменяются так, что $R-R'=d$ (d — данное число); определить геометрическое место точек ω, огибающую MM' и огибающую $S'P'$.

42.** AE и DD' — два взаимно-перпендикулярных диаметра окружности (O) с центром O и радиусом R. Назовем треугольником (T) всякий треугольник ABC, вписанный в окружность (O), стороны $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ которого удовлетворяют соотношению $b^2+c^2-a^2=d^2$, где d — заданное положительное число или нуль. Обозначим через M, N, P соответственно середины отрезков BC, CA и AB, а через AA', BB' и CC' — высоты треугольника ABC.

1°. Доказать, что угол A в треугольнике ABC острый. Доказать, что выражение MA^2+MO^2 постоянно. Получить отсюда, что геометрическое место точек M, если оно существует, есть дуга окружности (Γ); где находится центр (Γ) и каков радиус (Γ)? Пусть заданы окружность (O) и точка M; построить треугольник (T). Доказать, что необходимое и достаточное условие существования треугольника (T) есть $d<2R\sqrt{2}$. Доказать, что окружность (Γ) пересекает диаметр DD' в точках T и T' таких, что $OT=OT'=\frac{d}{2}$. Вывести отсюда простой способ построения (Γ). Во всем последующем считается $d=2R$.

2°. Доказать, что огибающая BC — полуэллипс. Где расположены его фокусы и каковы его оси? Построить треугольник (T), зная (O) и одну из вершин — B или C. Доказать, что вершины B и C не могут описывать всей окружности (O). Построить крайние положения этих точек. Построить треугольник (T), при условии что угол B или C прямой.

3°. Найти геометрическое место точек A', N и P. Найти граничные точки этих геометрических мест. Доказать, что $\overline{AB}\cdot\overline{AC'}=\overline{AC}\,\overline{AB'}=2R^2$. Доказать, что высоты BB' и CC' огибают дугу параболы (Π); уточнить элементы (Π).

43*. Дан прямоугольный треугольник AOB (O — прямой угол), причем угол A равен 60°, $OB=a$, где a — данная длина. Через O проводится полупрямая Ox, перпендикулярная AB, которая пересекает AB в точке H; пусть M — какая-нибудь точка этой полупрямой. Положим $OM=x$.

1°. Вычислить в функции a и x выражения $y=\overline{MA}^2+\overline{MB}^2$ и $z=\overline{MD}^2$ где D — середина AB. Доказать, что между y и z существует соотношение, не зависящее от x. Построить линию $y=y(x)$ (положить в этом случае $a=1$). Определить M при условии, что $y=m^2$, где m — данное число. Исследовать.

2°. Построим перпендикуляр в точке O к плоскости AOB и отложим на этом перпендикуляре в произвольном направлении отрезок $OS=a$. В плоскости SOx построим прямую $HK\perp SM$. Доказать, что угол AKB есть линейный угол двугранного угла с ребром SM, грани которого SMA и SMB. Определить M так, чтобы этот угол был прямым.

3°. Найти геометрическое место отрезков AK и BK при условии, что точка M описывает луч Ox. Построить пересечение плоскостей, касательных в точке K, к этим геометрическим местам. Определить M так, чтобы это пересечение было перпендикулярно плоскости AOB.

44*. Пусть a, b, c — длины BC, CA и AB сторон треугольника ABC; предположим, что $a>b>c$.

1°. Пусть x — положительное или отрицательное число или нуль. Какому условию должен удовлетворять x, чтобы существовал треугольник $A'B'C'$ со сторонами $a+x$, $b+x$, $c+x$?

2°. Дано $a=21$, $b=19$, $c=5$; определить x так, чтобы треугольник $A'B'C'$ был бы прямоугольным.

Тот же вопрос в случае $a=21$, $b=19$, $c=12$.

3°. Возвращаясь к общему случаю, доказать, что всегда возможно и притом единственным способом поставить в соответствие треугольнику ABC со сторонами a, b, c такими, что $a>b>c$, прямоугольный треугольник $A'B'C'$ со сторонами $a+x$, $b+x$, $c+x$. Исследовать в зависимости от формы треугольника ABC знак величины x, определяющей прямоугольный треугольник $A'B'C'$.

45. На фиксированной прямой (l) даны фиксированные точки A и C; B — середина отрезка AC. Пусть (γ) — переменная окружность, проходящая через B и C. Проведем из точки A касательные к окружности (γ). Пусть M и M' — точки касания.

1°. Найти геометрическое место центров (γ).

2°. Найти геометрическое место точек M и M'. Пусть это геометрическое место пересекает прямую (l) в точках E и F.

3°. Доказать, что $\dfrac{MB}{MC}=\text{const}$ и найти эту постоянную.

4°. Доказать, что ME и MF — биссектрисы углов, образованных прямыми MB и MC.

46*. Пусть (O) — окружность, описанная вокруг треугольника ABC; биссектрисы внутренних углов A и B этого треугольника пересекают стороны BC и AC

в точках D и F, а окружность (Q) — в точках E и G. Доказать, что если $DE = FG$, то треугольник равнобедренный.

47*. Пусть (O) — окружность, описанная вокруг треугольника ABC; AH и BJ — высоты этого треугольника, а I и K — точки их пересечения с окружностью (O). Доказать, что если все углы треугольника ABC острые и $HI = JK$, то треугольник равнобедренный.

48*. Пусть (O) — окружность, описанная вокруг треугольника ABC; P — середина AC, M — середина BC, N и Q — точки, в которых AM и BP пересекают окружность (O). Доказать, что если $MN = PQ$, то треугольник ABC равнобедренный.

49. Квадраты $CDEF$ и $C'D'E'F'$ вписаны в квадрант $OAMB$ окружности (O) и в соответствующий сегмент AMB (точки E, E', F, F' лежат на дуге AMB; стороны EF и $E'F'$ параллельны AB), стороны ED и $E'D'$ которых перпендикулярны к хорде AB и пересекают окружность вторично в точках E_1 и E_1'. Доказать, что

$$EE_1 = 3ED, \quad AB = 5E'D', \quad E'E_1' = 7E'D'.$$

50. Угол A в треугольнике ABC равен 120°. Пусть D — точка, в которой биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC пересекает BC; обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AB и AC. Соединим точки E и F.

1°. Что можно сказать о треугольнике DEF?

2°. На продолжении AF за точку F откладывают отрезок FS; на продолжении BE за точку E откладывают отрезок ET такой, что $FS = ET$. Проведем прямые SD, TD и TS. Что можно сказать про треугольник SDT?

3°. Через точку C проводится прямая, параллельная DA; пусть эта прямая пересечет продолжение BA в точке M. Что можно сказать про треугольник ACM?

4°. Зная, что $AB = c$, $AC = b$, найти AD.

51. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O и радиусом R. Диагональ AC есть диаметр окружности. Противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке E, стороны BC и DA — в точке F. Обозначим через M вторую точку пересечения (отличную от C) окружностей с диаметрами CE и CF.

1°. Доказать, что точки E, M, F лежат на одной прямой; доказать, что точки A, C, M лежат на одной прямой. Что можно получить отсюда для окружностей, описанных вокруг треугольников ADE и ABF?

2° Выразить через угол $BAD = \alpha$ углы BME и DMF. Установить, что прямая MCA — биссектриса угла BMD.

3°. I — середина EF и J — середина BD; что можно сказать про треугольник IBD. Установить, что точки O, I, J лежат на прямой линии и что существует окружность, касающаяся сторон четырехугольника $OBIJ$.

4°. Предположим, что AB — сторона правильного треугольника, вписанного в окружность (O), а AD — сторона квадрата, вписанного в окружность (O). Выразить в функции R длины $x = BE$ и $y = DF$.

52. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Построим окружность (O), проходящую через точку A и касающуюся гипотенузы в точке B. Построим окружность (O'), также проходящую через точку A и касающуюся гипотенузы в точке C.

1°. Доказать, что точки O, A и O' лежат на одной прямой. Доказать, что окружности (O) и (O') касаются в точке A.

2°. Доказать, что медиана AM треугольника ABC касается (O') и (O).

3°. Доказать, что $\overline{OB} \cdot \overline{O'C} = AM^2$.

53. Доказать, что если окружность девяти точек касается одной из сторон треугольника, то этот треугольник равнобедренный. Верно ли обратное положение?

54*. Даны окружности (O) и (O') с центрами O и O', касающиеся внутренним образом в точке H. Радиус окружности (O) равен R, радиус окружности (O') равен R'; при этом $R > R'$. Пусть P — произвольная точка общей касательной к окружностям (O) и (O') в точке H. Через точку P проводят две секущие; одна пересекает окружность (O) в точках A и B, другая пересекает окружность (O') в точках A' и B'.

1°. а) Доказать, что точки A, B, A', B' лежат на одной окружности (C).

б) Построить центр I этой окружности и показать, что он является точкой пересечения двух прямых, проходящих через две фиксированные точки.

в) Рассмотреть случай, когда секущие PAB и $PA'B'$ являются соответственно касательными PT и PT' к окружностям (O) и (O'). Каково в этом случае положение центра I относительно окружностей (O) и (O').

г) Доказать, что между IO и IO' существует, в последнем случае, простое соотношение.

2°. Секущие PAB и $PA'B'$ перемещаются параллельно самим себе; доказать, что центр окружности $(ABA'B')$ при этом фиксирован.

3°. Предположим, что PAB проходит через O, а $PA'B'$ — через O'. Доказать, что окружность с диаметром IP проходит через O и O' [I, как и выше, — центр окружности $(ABA'B')$]. На какой линии располагается центр C окружности $(IOO'P)$, если P описывает общую касательную к окружностям (O) и (O'). Пусть L — проекция I на OO', K — середина OO'. Доказать, что K — середина LH. На какой линии располагается точка I при изменении точки P?

55*. Пусть H — основание высоты AH треугольника ABC. Обозначим через I и J точки, соответственно симметричные точке H относительно BA и AC. Пусть прямая IJ пересекает AB и AC соответственно в точках C' и B'. Доказать, что BB' и CC' — высоты треугольника ABC.

56. На полуокружности с диаметром AD, центром O и радиусом R берутся точки B и C такие, что $\angle AOB$ острый, а угол BOC равен 90°. Пусть AB и CD пересекаются в точке P, а AC и BD — в точке Q.

1°. Доказать, что треугольники ABQ, DCQ, ACP, DBP равнобедренные.

2°. Каковы высоты треугольника APD?

3°. Пусть хорда $AB = R$. Вычислить в функции R длины отрезков BC, BD, BQ QD и CD.

4°. A и D фиксированы; угол BOC вращается вокруг O. Каково геометрическое место точек P и Q? Как изменяется отрезок PQ, когда P и Q описывают свои геометрические места?

57. Отрезок AB постоянной длины a перемещается так, что его концы A и B скользят по полупрямым Ox и Oy, образующим между собою угол 30°.

1°. Пусть C — центр окружности, описанной вокруг треугольника OAB. Вычислить в функции a радиус R этой окружности. Что можно сказать про этот радиус, если AB перемещается? Каково геометрическое место точек C?

2°. Пусть AA' и BB' — высоты треугольника OAB (A' и B' — основания этих высот). Доказать, что вокруг четырехугольника $A'BB'A$ можно описать окружность и что радиус этой окружности постоянный. Доказать, что $A'B'$ сохраняет постоянную длину.

3°. Найти геометрическое место центров C' окружности, описанной вокруг треугольника $OA'B'$. Пусть H — ортоцентр треугольника OAB. Доказать, что эта точка лежит на окружности, описанной вокруг треугольника $OA'B'$. Найти геометрическое место точек H.

58*. Дан прямоугольный треугольник ABC, причем $\angle BAC = 90°$. Пусть H — основание высоты, опущенной из A. Обозначим через D и E проекции точки H на стороны AB и AC. Доказать, что вокруг четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность. Пусть AH фиксирована, а треугольник ABC меняется однако так, что все время $\angle BAC = 90°$. Доказать, что окружность, описанная вокруг четырехугольника $BDEC$, проходит через две фиксированные точки. Определить положение этих точек.

59*. На прямой (D) даны фиксированные точки A и B. Пусть O — середина AB, $2a$ — длина отрезка AB. Пусть (C) — произвольная окружность, касающаяся AB и такая, что касательные к этой окружности, проведенные из точек A и B (отличные от AB), параллельны между собой. Пусть H — точка прикосновения окружности (C) с AB и (Δ) — прямая, проходящая через P параллельно касательным $x'Ax$ и $y'By$, проведенным из A и B к (C).

1°. Построить (C), зная (Δ).

2°. Найти геометрическое место точек C, если (Δ) вращается вокруг O.

3°. Построить (C), зная радиус R этой окружности.

4°. Построить (C), зная точку P, в которой прямая AB пересекает хорду, общую для окружности (C) и окружности с диаметром AB.

5°. Пусть IJ — диаметр окружности (O), перпендикулярный AB. Доказать, что CI и CJ — биссектрисы углов прямых (Δ) и CH. Доказать, что касательные к (C), перпендикулярные (Δ), касаются соответственно окружностей с центрами I и J и радиусами a.

60.** В плоскости задана окружность (O) с центром O и радиусом $R = 30$ *мм*, а также параллельные прямые (D) и (D') на расстояниях от точки O, соответственно равных $OH = 50$ *мм* и $OH' = 90$ *мм*, причем $\overline{OH} \cdot \overline{OH'} > 0$. Проведем к окружности (O) параллельные касательные (Δ) и (Δ'), которые пересекают (D) и (D') соответственно в точках A и B и в точках C и D. Пусть I — точка пересечения AD и BC. Будем теперь изменять направление касательных (Δ) и (Δ') к окружности (O).

1°. Найти геометрическое место точек I.

2°. Доказать, что поляры (J) точек I проходят через фиксированную точку.

3°. Найти геометрическое место полюсов m и n прямых AD и BC относительно окружности (O).

4°. Найти геометрическое место проекций M и N точки O соответственно на прямые AD и BC.

5°. Доказать, что прямые MN проходят через фиксированную точку, и найти положение этой точки.

6°. Найти огибающую прямых AD и BC.

61. Даны фиксированные окружности (C_1) и (C_2), лежащие одна вне другой, с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2.

1°. Построить окружность (C) радиуса R, ортогональную окружностям (C_1) и (C_2). Каково геометрическое место центров C окружности (C), если R меняется? Доказать, что при этом все окружности (C) проходят через две фиксированные точки F и F'; построить эти точки.

2°. а) Доказать, что всякой точке M соответствует точка M' такая, что точки M и M' сопряжены относительно каждой из окружностей (C_1) и (C_2).

б) Показать, как можно просто построить M', если известна точка M.

в) Каково геометрическое место точек M и M', если задана длина $MM' = l$.

3°. Найти геометрическое место точек M' и огибающую MM' при условии, что точка M описывает прямую (D), перпендикулярную O_1O_2.

4°. Найти геометрическое место точек M' и огибающую MM' при условии, что точка M описывает прямую (D), проходящую через F.

62*. На сторонах BC, CA и AB треугольника определить точки M, N, P такие, что $BM = MN = NP = PA$.

63. Треугольник ABC вписан в окружность (O) с центром O. Окружность (ω) с центром ω проходит через O. Построим еще три окружности: (A), (B), (C), с центрами A, B, C, равные окружности (O). Доказать, что прямые, проходящие через точки A, B и C, соответственно параллельные общим касательным и окружностям (A) и (ω), (B) и (ω), (C) и (ω), все касаются некоторой окружности, которая в свою очередь касается окружности (O).

64*. Даны окружности (O_1) и (O_2); M и N — точки прикосновения их общей касательной, а I — точка, в которой прямая MN пересекает линию центров этих окружностей. Проведем через точку I произвольную секущую, пересекающую окружности (O_1) и (O_2) последовательно в точках A и C, D и B. Доказать, что прямые AM, CM, BN и DN образуют параллелограмм $MENF$. Найти геометрическое место его вершин E и F, если секущая меняется. Доказать, что окружности (AEB) и (CFD) касаются данных окружностей.

65.** На плоскости задана ось $x'Ox$, O — начало координат. Пусть O' — точка этой оси с абсциссой 5. Обозначим через (O) окружность радиуса 1 с центром O, а через (O') — окружность с центром O' радиуса 2.

1°. Пусть M — какая-нибудь точка оси $x'x$. Вычислить в функции $\overline{OM} = x$ степени P и P' точки M относительно окружностей (O) и (O'). Вычислить абсциссу точки H, в которой радикальная ось окружностей (O) и (O') пересекает ось $x'x$, и затем степень точки H относительно каждой из данных окружностей. Определить M так, чтобы $P' = kP$, где k — данное число. Исследовать в зависимости от значений k. Доказать, что когда имеется два решения M' и M'', эти точки соответствуют друг другу (при изменении k) в одной и той же инверсии с полюсом H. Во что преобразуются окружности (O) и (O') в этой инверсии?

2°. Построить окружность, проходящую через H, касающуюся окружности (O) и ортогональную окружности (O'). Пусть (C) — одна из таких окружностей, а (Γ) — какая-нибудь окружность пучка, определяемого окружностями (O) и (O'). Доказать, что существует окружность (Γ) пучка, отличная от (C) и также касающаяся окружности (O). Построить окружность (Γ).

3°. Пусть I — одна из предельных точек определенного выше пучка окружностей. Какому условию должна удовлетворять окружность (Γ) этого пучка, чтобы существовали две окружности, проходящие через H и I и касающиеся окружности (Γ). Найти геометрическое место точек прикосновения этих окружностей с окружностями (Γ), если (Γ) меняется с сохранением ограничений на это изменение. Построить такую окружность (Γ), что две окружности, проходящие через H и I и касающиеся (Γ), будут между собою ортогональны. Вычислить радиус этой окружности (Γ).

66.** Пусть (D) и (D') — две параллельные прямые, на первой из которых фиксированы две различные точки: O и A. Рассмотрим переменные точки M и M' прямой (D), симметричные относительно точки A.

1°. Построить окружности (C) и (C'), касающиеся (D'), проходящие через точку O и соответственно через точки M и M'. Обозначим точки прикосновения окружностей (C) и (C') к прямой (D') соответственно через N и N'. Доказать, что прямые MN и $M'N'$ пересекаются в фиксированной точке I. Доказать, что вторая точка B пересечения окружностей (C) и (C') расположена на фиксированной прямой; найти геометрическое место точек B.

2°. Касательная в точке M к окружности (C) и касательная в точке M' к окружности (C') пересекаются в точке P. Доказать, что PI является

биссектрисой одного из углов между прямыми PM и PM' и что PM и PM' огибают фиксированную окружность (Γ) с центром I. Доказать, что точка P лежит на прямой $I'A'$, где I' — точка, симметричная точке O относительно I, а A' — точка, симметричная O относительно A. Найти геометрическое место точек P. Показать, как найти угол между касательными в точке O к окружностям (C) и (C'), если задана точка P. Построить пару точек M и M', симметричных относительно A, так, чтобы соответствующие окружности (C) и (C') были ортогональны; сколько решений имеет эта задача?

3°. Над окружностями (C) и (C') производится инверсия $(O, \overline{OI}^2)$; какую фигуру мы получим в результате этой инверсии? Как построить точку Q, являющуюся образом точки B в этой инверсии? Использовать эту инверсию для построения пары точек M и M', симметричных относительно A, для которой окружности (C) и (C') будут ортогональны.

67*. Рассмотрим окружность (I) с центром I и радиусом R. Произведем инверсию (I, R^2).

1°. Во что инвертируется окружность (C), ортогональная окружности (I)?

2°. Рассмотрим фиксированную окружность (C_1), касающуюся окружности (I) в точке O, и окружности (C), ортогональные (I) и касающиеся (C_1). Доказать, что окружности (C) касаются второй линии (C_2), которая, вообще говоря, есть окружность. Пусть M_1 и M_2 — точки прикосновения окружности (C) с окружностями (C_1) и (C_2). Что можно сказать про прямую M_1M_2, когда окружность (C) изменяется? Как следует выбрать окружность (C_1) для того, чтобы линия (C_2) была бы прямой линией? Обозначим через OO' диаметр окружности (I), ориентированный от O к O', а через R, R_1 и R_2 — абсциссы точек I, C_1, C_2 (O — начало координат). Каково соотношение между R, R_1 и R_2?

3°. Определить окружности (C_1) и (C_2) так, чтобы сумма квадратов $\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}$ была равна $\frac{1}{a^2}$, где a — данное число. Доказать, что для всякого значения a, не превосходящего некоторого числа, всегда существует единственная пара таких окружностей (C_1) и (C_2). Во что обращается эта пара окружностей, если $a=\frac{R}{2}$?

4°. В частном случае $a=\frac{R}{2}$, определить геометрическое место центров переменной окружности (C), касающейся (C_1) и (C_2).

68.** Пусть ABC — переменный прямоугольный треугольник (A — прямой угол), гипотенуза BC которого фиксирована. На высоте AD как на диаметре строится окружность (O') с центром O'. Найти геометрическое место центра I положительной гомотетии и геометрическое место центра J отрицательной гомотетии переменной окружности (O') и фиксированной окружности (O), описанной вокруг треугольника ABC, если точка A описывает всю окружность (O).

69*. В окружности с центром O даны хорды AB и CD, которые пересекаются в точке I. Через точку I проведена хорда EF, делящаяся в точке I пополам. Соединим точку A с точкой C, а точку B с точкой D. Прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Доказать, что I — середина MN.

70. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник (AC и BD — диагонали). Инверсия с полюсом A и степенью k преобразует точки B, C, D в точки B', C', D'. Доказать, что

$$B'C'=|k|\frac{BC}{AB\cdot AC}.$$

Получить аналогичные формулы для $C'D'$ и $B'D'$. Вывести отсюда необходимое и достаточное условие

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

того, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

71.** Углом, под которым окружность (O) видна из точки A, называется угол между лучами, выходящими из точки A и касающимися окружности (O). Будем называть окружностью (O) окружность, которая видна из точки A под прямым углом. Обозначим через T точку прикосновения одной из касательных, проведенной из точки A к окружности (O), а через H — основание поляры точки A относительно окружности (O).

1°. Найти геометрическое место точек O и T, если окружности (O) проходят через данную точку B.

2°. Найти геометрическое место точек O, если окружности (O) касаются фиксированной прямой (Δ). К какой проблеме сводится построение окружности (O), касающейся данных прямых (Δ) и (Δ')?

3°. Вычислить отношение $\dfrac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AH}}$; построить окружность (O), если задана точка H.

4°. Пусть (O_1) и (O_2) — две окружности (O), H_1 и H_2 — основания поляр точки A относительно этих окружностей; доказать, что радикальная ось окружностей (O_1) и (O_2) есть медиатриса отрезка H_1H_2 (рассмотреть окружность, проходящую через точки A, H_1, H_2, и использовать 3°).

5°. Будем рассматривать окружности (O), ортогональные данной окружности (ω) радиуса ρ. Доказать, что тогда точка H остается на фиксированной окружности; найти ее центр и радиус. Доказать обратное положение. Найти геометрическое место точек O.

72*.** В настоящей задаче предлагается изучить фигуру, образованную окружностями (α), (β), (γ) с центрами A, B, C и радиусами R_1, R_2, R_3, касающимися внешне попарно друг друга.

Окружности (α) и (β) касаются в точке W, окружности (β) и (γ) — в точке U, а окружности (γ) и (α) — в точке V. Кроме того, предполагается, что все эти окружности имеют общую внешнюю касательную (Δ), точки прикосновения которой к окружностям (α), (β) и (γ) обозначим соответственно P, Q и T; все окружности расположены по одну сторону от прямой (Δ). Центры A, B и C этих окружностей образуют треугольник, который мы назовем треугольником (T). Обозначим через $2d$ длину отрезка PQ.

I. Даны две окружности (α) и (β), касающиеся внешне друг друга в точке W, и их общая внешняя касательная (Δ). Построить (γ). Имеется, вообще говоря, два решения этой задачи: (γ) и (γ'); точки прикосновения окружностей (γ) и (γ') к (Δ) обозначим соответственно через T (на отрезке PQ) и T' (вне отрезка PQ). Вычислить отношения $\dfrac{\overline{TP}}{\overline{TQ}}$ и $\dfrac{\overline{T'P}}{\overline{T'Q}}$. Доказать, что радиусы окружностей (α), (β) и (γ) или (α), (β) и (γ') связаны одним из соотношений

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \left| \frac{1}{\sqrt{R_1}} \pm \frac{1}{\sqrt{R_2}} \right|. \qquad (1)$$

Пусть U и V — точки прикосновения окружности (γ) к окружностям (α) и (β), а U' и V' — точки прикосновения окружности (γ') к окружностям (α) и (β). Доказать, что точки U, V, U', V' лежат на одной окружности, и вычислить отношение

$$\frac{UU' \cdot VV'}{UV \cdot U'V'}.$$

II. В этой второй части треугольники (T) и (T'), соответствующие окружностям (γ) и (γ'), переменные, причем фиксированы прямая (Δ) и точки P и Q прикосновения к ней окружностей (α) и (β). Предложенные ниже вопросы следует решать сначала для треугольника (T), затем для треугольника (T'). Все время рассматриваются построения по одну сторону от прямой (Δ).

1°. Найти геометрическое место точек W и огибающую прямой AB.

2°. Доказать, что прямая WT проходит через фиксированную точку Ω, а другая — через Ω'.

3°. Найти огибающую окружностей (γ). Найти геометрическое место центров C окружностей (γ).

4°. Найти огибающую окружности, вписанной в треугольник ABC. Найти геометрическое место центра I окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать, что прямая CI проходит через одну или другую из фиксированных точек.

5°. Найти огибающую прямых AC и BC. Пусть G — точка прикосновения AC к огибающей, а E — точка прикосновения BC к огибающей.

6°. Найти огибающую прямых IU и IV. Пусть L — точка прикосновения IU со своей огибающей, а N — точка прикосновения IV со своей огибающей.

7°. Найти огибающую прямых EL и GN.

III. 1°. Доказать, что для того, чтобы треугольник ABC был треугольником (T), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=2 \tag{2}$$

или

$$r_1+r_2+r_3=2p,$$

где r_1, r_2, r_3 — радиусы вневписанных окружностей, а $2p$ — периметр.

2°. Доказать, что углы треугольника (T) будут определены, если задано отношение $\frac{r}{p}=k$, где r — радиус вписанной окружности, а $2p$ — периметр. Исследовать. Доказать, что значения углов всякого треугольника (T) заключены один между 0 и φ, другой между φ и $\frac{\pi}{2}$, а третий между $\frac{\pi}{2}$ и θ, где φ и θ — некоторые постоянные углы, которые требуется определить. Может ли быть треугольник (T) равнобедренным? Каковы его углы в этом случае?

3°. Доказать, что для того чтобы треугольник ABC был треугольником (T), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $4R+r=2p$, где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, а $2p$ — периметр.

73. I. а) В ориентированной плоскости заданы точки B и C. Найти геометрическое место точек M плоскости таких, что

$$(MB,\ MC)=\alpha\left(\operatorname{mod}\frac{\pi}{n}\right),$$

или, что то же,

$$(MB,\ MC)=\alpha+k\frac{\pi}{n},$$

где α — заданный угол, n — заданное целое положительное число, а k — произвольное целое неотрицательное число ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$); через $(MB,\ MC)$ мы обозначаем ориентированный угол от неориентированной прямой MB до неориентированной прямой MC.

б) Найти все точки M плоскости, которые удовлетворяют одновременно двум уравнениям:

$$(MB,\ MC) = 0\left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{n}\right),\quad \frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}.$$

Эти точки суть вершины выпуклого многоугольника P_1, вписанного в окружность; занумеруем их: M_0, M_1, M_2, ... Нумерация производится в порядке встречи этих точек, если описывать окружность, на которой они лежат в произвольном направлении. Если соединять эти точки в порядке M_0, M_p, M_{2p}, ..., то получим многоугольник P_p. Как, зная n, следует выбрать p для того, чтобы P_1 и P_p имели одинаковое тело сторон? *

в) Найти инверсию, в которой точки M_k преобразуются в вершины M'_k правильного многоугольника. Обозначим через Q_1 и Q_p многоугольники — выпуклый и звездчатый с вершинами M'_k. Начертить для $n = 6$ многоугольники P_1 и P_p с одной стороны и Q_1 и Q_p с другой.

II. а) Точки B и C фиксированы, а точка A описывает окружность (Γ), проходящую через B и C. Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных и вневписанных в треугольник ABC. Дать сначала этому вопросу решение, позволяющее получить сразу все указанные геометрические места; затем разделить это геометрическое место на части, описываемые центром вписанной окружности и каждым из центров вневписанной окружности, противолежащих вершинам A, B, C.

б) Обозначим теперь через M центр вневписанной окружности, противолежащей вершине A, а через m — отношение $\frac{MC}{MB}$ $(m > 1)$. Построить треугольник ABC, зная сторону $BC = a$, описанную окружность (Γ) и отношение m. Исследовать.

в) Решить тригонометрически треугольник ABC, зная $BC = a$, радиус R описанной окружности и отношение $\frac{MC}{MB} = m$, где M — центр вневписанной окружности, противолежащей вершине A. Исследовать, считая $0 < m < 1$.

г) Произведем инверсию с центром C, сохраняющую B. Во что преобразуется фигура, рассмотренная в части II, а)? Как отсюда получить новое решение II, б)?

74.** Даны окружность (O) с центром O и радиусом R и на ней две фиксированные точки: A и B; I — середина отрезка AB. Переменная точка M описывает окружность (O).

1°. Доказать, что ортоцентр треугольника AMB описывает окружность (O_1), симметричную (O) по отношению к AB. Изучить треугольник amb, образованный основаниями высот треугольника AMB (a — основание высоты, выходящей из A и т. д.), а именно: найти геометрическое место вершин, огибающую сторон и геометрическое место центра окружности, описанной вокруг треугольника amb. Сравнить треугольники amb и $a'mb'$, соответствующие двум точкам M и M', расположенным на одном перпендикуляре к AB.

2°. Положение точек A и M на (O) определено углами: $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OA}) = \alpha$ — фиксировано; $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM}) = \varphi$ — переменное, от $\overrightarrow{Ox}$ до радиусов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$, где Ox — ориентированная медиатриса отрезка AB. Вычислить площадь треугольника amb в функции α и φ. Для каких положений

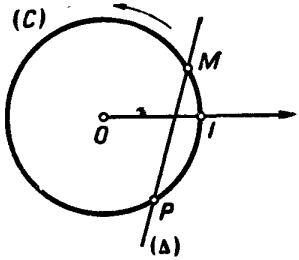
* Под точкой $M_{\lambda p}$, где $\lambda p > 2n - 1$, мы понимаем точку $M_{\lambda p - 2nq}$, где q — такое целое положительное число, что

$$0 \leqslant \lambda p - 2nq \leqslant 2n - 1.$$

точки M эта площадь достигает экстремума? Определить M, если задана величина площади треугольника amb. Исследовать. Вычислить периметр треугольника amb; определить M так, чтобы периметр имел данную величину; исследовать. Дать геометрическое решение этого вопроса.

3°. Доказать, что окружность (Ω) с диаметром MH сохраняет свою величину и остается ортогональной к фиксированной окружности (I). Пусть (Δ) и (Δ_1) — радикальные оси соответственно окружностей (O), (Ω) и (O_1), (Ω) и пусть (Δ) и (Δ_1) пересекаются в точке J. Как расположена точка J по отношению к треугольнику MHI? Каково геометрическое место точек J? Доказать, что (Δ) и (Δ_1) огибают два эллипса: (e) и (e_1).

75*.** Точка I служит началом отсчета дуг ориентированной окружности с центром O. Пусть M — точка окружности (C) такая, что ориентированная дуга $\overset{\smile}{IM} = \alpha + 2k\pi$. С точкой M ассоциируется точка P окружности (C) такая, что $\overset{\smile}{IP} = -2\overset{\smile}{IM}$ (черт. 75). Переменную прямую MP обозначим через (Δ). Всякая точка окружности (C) может быть и точкой M и точкой P.



Черт. 75.

1°. а) Доказать, что через каждую точку окружности (C) проходят три прямые (Δ). Каково геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных прямых (Δ)? Найти прямые (Δ), касающиеся (C). Доказать, что существуют еще две точки J и K на окружности (C), отличные от I, такие, что по отношению к ним прямая (Δ) может быть определена так же, как и по отношению к точке I.

б) (Δ_1) и (Δ_1') — две произвольные ортогональные прямые (Δ), ассоциированные с точкой I и пересекающиеся в точке P_1. Рассмотрим переменную прямую (Δ), которая пересекает прямую (Δ_1) в точке Q, прямую (Δ_1') в точке Q' и окружность (C) в точках P и M. Доказать, что M — середина QQ'. Обратно: пусть P_1M_1 и P_1M_1' — две взаимно-перпендикулярные прямые, проходящие через точку P_1 окружности (C). Рассмотрим переменную точку Q прямой P_1M_1 и переменную точку Q' прямой P_1M_1' такие, что середина QQ' лежит на (C). Доказать, что прямая QQ' есть прямая (Δ), ассоциированная с (C) и с вершиной треугольника, который требуется определить.

2°. Пусть (Δ_1) — прямая (Δ), ассоциированная с окружностью (C) и точкой I этой окружности. Доказать, что через какую-нибудь точку Q прямой (Δ_1) проходят еще две прямые: (Δ) ((Δ_2) и (Δ_3)) — и что для двух точек D и E прямой (Δ_1) эти прямые совпадают. Доказать, что эти двойные прямые ортогональные. Вычислить с точностью до $2k\pi$ сумму дуг α_1, α_2, α_3, которые характеризуют прямые (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), проходящие через Q. Доказать, что эта сумма постоянна; обозначим ее через θ. Обратно: если задана прямая (Δ_1), а прямые (Δ_2) и (Δ_3) определены дугами α_2 и α_3 такими, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \theta$, то прямые (Δ_2) и (Δ_3) пересекаются в точке прямой (Δ_1).

3°. Пусть (Γ) — окружность, описанная вокруг треугольника ABC.

а) Из точки S окружности (Γ) опускают перпендикуляры на стороны треугольника ABC. Пусть C', U и B' — основания этих перпендикуляров (C' — на AB, U — на BC и B' — на AC). Пусть H — ортоцентр треугольника. Доказать, что точка A, симметричная H относительно BC, лежит на (Γ) и что точки B', U, C'

лежат на одной прямой. Пусть S' — вторая точка, в которой прямая SU пересекает (Γ). Проверить, что прямые $S'A$ и $C'UB'$ параллельны. Доказать, что точки, симметричные с точкой S относительно сторон треугольника, лежат на одной прямой, которая проходит через точку H.

б) Пусть V — точка, в которой прямая $C'UB'$ пересекает прямую AH. Доказать, что прямые UV образуют семейство прямых (Δ), ассоциированных с некоторой окружностью, которую требуется определить. Проверить, что все высоты и стороны треугольника ABC входят в это семейство.

76*.** В плоскости даны фиксированные точки O и H; обозначим через (T) любой треугольник этой плоскости, для которого точка O является центром описанной окружности, а H — ортоцентром (т. е. точкой пересечения высот). Обозначим через A, B, C вершины треугольника (T), а через G — его центр тяжести (т. е. точку пересечения медиан).

1°. Определить геометрическое место вершин треугольника (T). Определить геометрическое место вершин тупоугольных треугольников (T). Определить геометрическое место вершин тупых углов треугольника (T). Назовем через (λ) всякую прямую, на которой расположена какая-нибудь сторона треугольника (T). Как можно охарактеризовать множество прямых (λ)? Если на плоскости задана точка M, то можно рассматривать множество прямых (λ), проходящих через точку M. Найти геометрическое место точек M таких, что все прямые, проходящие через точку M (за исключением одной) суть прямые (λ). Построить треугольник (T), если задана точка M, через которую проходит сторона BC, и если задана прямая (μ), на которой расположена вершина A треугольника (T). Найти затем геометрическое место точек M, считая прямую (μ) фиксированной, и охарактеризовать множество прямых (μ), считая точку M фиксированной. Построить треугольник (T), зная, что данная прямая (ν) является биссектрисой одного из его углов (внутренней или внешней). Провести исследование.

2°. Рассмотрим множество треугольников (T), для которых задан радиус R описанной окружности. Определить геометрическое место вершин таких треугольников (T) и найти огибающие его сторон. Рассмотрим множество треугольников (T), для которых сторона BC имеет данную длину a. Определить геометрическое место вершин A и огибающую стороны BC этих треугольников.

77.** Дана окружность (I) с центром I и радиусом r и точка ω, лежащая внутри этой окружности. Через точку ω проведены две взаимно-перпендикулярные хорды: LN и MP. Пусть A' — середина хорды LP, а A — точка, в которой пересекаются касательные к окружности в точках L и P.

1°. Найти геометрическое место точек A'. Найти геометрическое место ортогональных проекций точки ω на LP. Найти геометрическое место точек A. Найти огибающую прямых LP.

2°. Доказать, что касательные к (I) в точках L, M, N, P образуют вписанный четырехугольник.

В плоскости дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность (O) радиуса R, такой, что его стороны AB, BC, CD и DA касаются окружности (I) с центром I и радиусом r соответственно в точках L, M, N, P. Обозначим через E и F точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, через E' и F' — точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $LMNP$, а через ω — точку пересечения диагоналей LN и MP.

3°. Где находится полюс прямой AC по отношению к окружности (I)? Доказать, что AC и BD проходят через ω и образуют гармонический пучок с LN и MP.

4°. Доказать, что E, F, E', F' лежат на одной прямой и образуют гармоническую четверку. Установить, что ω есть предельная точка пучка окружностей, определенного окружностями (I) и (O).

5°. Вычислить угол от прямой LN до прямой MP. Доказать, что прямые LN и PM — биссектрисы угла между диагоналями AC и BD. Доказать, что существует эллипс (E) с фокусами I и ω, касающийся четырех сторон четырехугольника $LMNP$.

6°. Показать, что существует бесконечное множество четырехугольников $ABCD$, вписанных в (O) и описанных вокруг (I), и что существует бесконечное множество четырехугольников, вписанных в (I) и описанных вокруг (E). Какое соотношение существует между R, r и расстоянием $OI = d$, если существует четырехугольник, вписанный в (O) и описанный вокруг (I)?

78*. 1°. Дан треугольник ABC. Плоскость поворачивается вокруг точки A на угол α, а затем вокруг точки B на угол β. Каковы должны быть углы α и β, при которых точка C в результате останется неподвижной? Доказать, что произведение следующих вращений:

(A) с центром A на угол $2\,(AC, AB)$,
(B) с центром B на угол $2\,(BA, BC)$,
(C) с центром C на угол $2\,(CB, CA)$

(углы считаются ориентированными, прямые — неориентированные), есть тождественное преобразование, т. е. каждая точка плоскости остается на месте.

2°. а) Пусть (ω) и (ω') — две равные окружности, пересекающиеся в точках R и S. Пусть произвольная окружность с центром R пересекает эти две окружности соответственно в точках P, Q и P', Q'. Доказать, что эти точки можно разделить в пары так, что

$$(RP, RP') = (RQ, RQ') = \text{const}$$

(постоянная в смысле независимости величины этого угла от радиуса окружности с центром R).

б) Найти геометрическое место середин I отрезков PP' (или QQ').

в) Доказать, что прямая PP' (или QQ') проходит через фиксированную точку.

3°. Пусть M — какая-нибудь точка плоскости, M' — ее образ во вращении (A), определенном в п. 1°, а M'' — образ точки M' во вращении (B) [тогда M — образ M'' во вращении (C)].

а) Вычислить ориентированный угол $(M'M, M'M'')$ в функции ориентированного угла $(M'A, M'B)$ (прямые не ориентированы).

б) Найти геометрическое место точек M' при условии, что точки M, M' и M'' лежат на одной прямой.

в) Охарактеризовать это геометрическое место по отношению к окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Найти геометрическое место соответствующих точек M и M''.

г) Используя 2°, показать, что прямая $MM'M''$ проходит через фиксированную точку в то время, как точка M' описывает свое геометрическое место.

д) Охарактеризовать положение этой фиксированной точки по отношению к треугольнику ABC.

79*. Даны фиксированные точки O и A, $OA = a$ $(a > 0)$. Окружность (L) проходит через точки O и A.

1°. Определить на окружности (L) точки M и M' такие, что прямые AM и AM' одинаково наклонены к прямой OA и что произведение $AM \cdot AM'$ имеет данную величину b^2. Исследовать.

Во всем дальнейшем мы ограничим себя случаем, когда $b < a$ и когда прямая AO — биссектриса угла между лучами AM и AM'. Мы будем предполагать, кроме того, что окружность (L), меняясь, постоянно проходит через точки O и A.

2°. Доказать, что прямая MM' вращается вокруг фиксированной точки I и что геометрическое место точек M и M' есть окружность (Ω). Пусть ω и α — точки, диаметрально противоположные точкам O и A относительно (L). Найти огибающую прямых ωM, $\omega M'$, αM, $\alpha M'$ и прямых, симметричных прямой MM' относительно точек ω и α.

3°. Изучить биссектрисы внутренних и внешних углов треугольников AMM' и $\alpha MM'$. Определить центры окружностей, касающихся сторон каждого из этих треугольников. Найти геометрическое место этих центров при условии, что (L) меняется, но все время проходит через точки A и O.

80.** Пусть даны две окружности: окружность (C_1) с центром O_1 и радиусом R_1 и окружность (C_2) с центром O_2 и радиусом R_2. Пусть в результате какой-нибудь инверсии окружности (C_1) и (C_2) перейдут в окружности (C_1') и (C_2'). Обозначим через R_1' и R_2' радиусы окружностей (C_1') и (C_2'), а через O_1' и O_2' — их центры. Положим $O_1O_2 = d$ и $O_1'O_2' = d'$. Доказать, что

$$\frac{d'^2 - R_1'^2 - R_2'^2}{2R_1'R_2'} = \pm \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}.$$

Уточнить выбор знака в правой части этого равенства (требуется дать решение, не используя ангармонического отношения четырех точек).

81.** (C) — фиксированная окружность с центром O и радиусом a. Пусть Ox и Oy — две полупрямые, образующие угол $\frac{\pi}{2}$:

$$(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2},$$

Ot — полупрямая, делящая угол xOy пополам:

$$(Ox, Ot) = \frac{\pi}{4}.$$

На полупрямых Ox и Oy взяты точки F и G такие, что $OF = OG = c$. Обозначим через (Γ) окружность с диаметром FG. Пусть Q — какая-нибудь точка, лежащая на окружности (Γ). Всякую прямую FQ, которая пересекает (Γ) в точках P_1 и P_2 (различных или совпадающих), назовем прямой (Δ).

1°. При каких значениях c любая прямая FQ будет прямой (Δ)? В остальных случаях FQ будет прямой (Δ), если точка O находится на некоторой дуге $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ окружности (Γ). Пусть хорда $\alpha\beta$ пересекает Ot в точке A. Найти $\overline{OA}$.

2°. Прямая (Δ) определяет прямые (T_1) и (T_2), соответственно перпендикулярные (Δ) в точках P_1 и P_2. Назовем через H_1 и H_2 проекции G на прямые (T_1) и (T_2). Доказать, что какова бы ни была прямая (Δ), сумма $GH_1^2 + GH_2^2$ остается постоянной.

3°. а) Рассмотрим линию второго порядка (эллипс или гипербола) с центром O и фокусами F и F' $(FF' = 2c)$. Пусть G и G' — образы точек F и F' при повороте вокруг точки O на $+\frac{\pi}{2}$. Доказать, что сумма квадратов расстояний от G и G' до касательной к этой линии — постоянная при изменении касательной.

в) Сформулировать и доказать свойство, обратное предыдущему [3°, а)]. Определить в зависимости от величины постоянной тип линии второго порядка. Рассмотреть частный случай, когда эта постоянная равна $2c^2$.

4°. Доказать, что общие касательные к двум ортогональным переменным окружностям, центры которых фиксированы, остаются касательными к некоторой линии (L). Что это за линия? Построить ее и указать точку прикосновения к (L) общей касательной к двум окружностям.

82. В плоскости фиксированы точки A и H. Рассмотрим переменный треугольник с вершиной в A, ортоцентром в H и такой, что радиус описанной вокруг него окружности всегда равен высоте, опущенной из A.

1°. Найти геометрическое место середин M стороны, противолежащей вершине A.

2°. Найти огибающую окружностей, описанных вокруг этого треугольника.

83. На плоскости задан отрезок AB. Пусть (λ) и (μ) — две прямые, ни одна из которых не проходит ни через A, ни через B и не параллельна AB. Пусть эти прямые пересекаются в точке O, которая не лежит на AB. Переменная прямая (Δ), параллельная AB, пересекает прямые (λ) и (μ) в точках C и D. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей трапеции, вершины которой A, B, C, D.

84.** Рассмотрим окружность (C) с диаметром $A'A = 2a$ и центром O. Каждой точке M_1 окружности (C), проектирующейся на $A'A$ в точку H, ставится в соответствие точка M отрезка HM_1 такая, что $HM_1^2 = 2HM^2$.

1°. Зная M_1 и касательную к (C) в точке M_1, построить геометрически точку M и точку T, в которой касательная в точке M к геометрическому месту (E) точек M пересекает диаметр $A'A$. Пусть касательная MT пересекает в точке S перпендикуляр к AA' в точке A. Доказать, что OS проходит через середину AM. Построить полюс M' прямой MT относительно окружности (C). Установить, что отношение $\frac{\overline{HM_1}}{\overline{HM'}}$ сохраняет постоянную величину и что касательная в точке M' к геометрическому месту (E') точек M' есть поляра точки M относительно (C).

2°. На касательной (D) в точке A к окружности (C) берется переменная точка P. Пусть L — вторая точка пересечения PA' с окружностью (C); K — проекция L на $A'A$. Прямая IA, соединяющая точку A с серединой I отрезка KL, пересекает $A'P$ в точке M, а прямая AL пересекает в точке M' перпендикуляр MH к $A'A$.

Доказать, что отношение $\frac{HM^2}{HA \cdot HA'}$ остается постоянным, когда P описывает (D). Чему равно значение этой постоянной? Вывести отсюда геометрические места (E) и (E') точек M и M' и установить их идентичность с линиями, найденными в п. 1°.

3°. Найти геометрическое место точек Q пересечения AM и $A'M'$. Построить полюс S прямой AL относительно окружности (C) и доказать, что OS проходит через середину AM. Получить отсюда геометрическое место точек пересечения касательной к (C) в точке L и касательной в точке M к геометрическому месту точек M. Доказать, что можно определить точку M', исходя из переменной точки P' и касательной (D') в точке A' к (C), построением, аналогичным тому, которое определяет точку M, исходя из точки P.

Каково геометрическое место точек S' пересечения касательной в точке L к окружности (C) и касательной в точке M' к геометрическому месту точек M'? Какое соотношение существует между длинами отрезков AP и $A'P'$? Где находится точка пересечения прямых PP' и SS'? Получить отсюда огибающую прямых PP'.

85. Прямая $y'Iy$ является радикальной осью двух окружностей: (O) и (O'); $x'Ix$ — их линия центров, A и B — точки пересечения этих окружностей. Требуется определить геометрическое место точки пересечения касательной в точке A к окружности (O) с касательной в точке B к окружности (O') при условии:

1°. Если A и B фиксированы, а произведение $\overline{IO}\cdot\overline{IO'}$ постоянно.

2°. Если центры O и O' фиксированы, а точки A и B меняются на $y'y$.

86.** I. Рассмотрим фиксированную прямую (D) и фиксированную точку P, расположенную от прямой (D) на расстоянии $2d$. Обозначим через (O) окружность, проходящую через P и пересекающую (D) под углом θ.

1°. Построить геометрически две окружности (O), которые проходят через заданную точку A прямой (D). Эти две окружности вторично пересекают (D) в точках B и B'; пусть их линия центров пересекает (D) в точке E. Доказать, что

$$\overline{EA}^2=\overline{EB}\cdot\overline{EB'}.$$

2°. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на (D). Во что переходит фигура, образованная прямой (D) и совокупностью двух окружностей (O) в инверсии (P, PH^2)?

3°. Какова огибающая (L) окружностей (O)? Доказать, что огибающие (L), соответствующие различным значениям θ, принадлежат одному и тому же пучку окружностей; определить предельные точки этого пучка.

4°. Найти геометрическое место (Γ) центров O для одного и того же θ. Каково расположение (Γ) относительно прямой (D)?

5°. Найти геометрическое место (G) полюса I прямой (D) относительно окружностей (O) для одного и того же θ; исследовать. Доказать, что положение центра этой кривой (G) не зависит от значения θ.

II. Рассмотрим теперь фиксированную окружность (ω) радиуса ρ и фиксированную точку P, расположенную на расстоянии $2d$ от центра окружности (ω). Пусть (O) — окружность, проходящая через P и пересекающая (ω) под данным углом θ.

1°. Что является огибающей (E) окружностей (O) для данного значения θ? Доказать, что огибающие, соответствующие различным значениям θ, принадлежат одному и тому же пучку окружностей; определить характеристические точки этого пучка.

2°. Найти геометрическое место (H) центров окружностей (O) для одного и того же значения θ.

87.** Даны фиксированная прямая (Δ) и фиксированная точка A, не лежащая на этой прямой. Переменные прямые (D) и (D') проходят через точку A, пересекают (Δ) в точках B и C, причем $(\widehat{D, D'})=\frac{\pi}{4}$.

1°. Найти геометрическое место центра O окружности (Γ), описанной вокруг переменного треугольника ABC, и огибающую окружностей (Γ). Найти геометрическое место центров ω окружности девяти точек этого треугольника. Найти геометрическое место оснований B' и C' высот, выходящих из B и C, а также огибающую прямых $B'C'$.

2°. Доказать, что окружности (M) и (M') с центрами M и M', проходящие через A и касающиеся прямой (Δ) соответственно в точках B и C, ортогональны. Найти геометрическое место их центров и вторых точек P их пересечения (можно использовать инверсию с центром A). Найти огибающую линии центров MM'. Доказать, что окружность (BCP) проходит через фиксированную точку, когда (D) и (D') меняются.

3°. Дана парабола (P) с фокусом F. Через фокус F проводятся два взаимно-перпендикулярных луча, которые пересекают (P) в точках M и M'. Найти геометрическое место проекций точки F на прямую MM', а также найти огибающую прямых MM'.

4°. Рассматривая какую-нибудь линию второго порядка и полагая $\angle MFM' = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$, обобщить предыдущие положения.

88.** Даны прямая (D) и точка F, не расположенная на этой прямой. Пусть φ — точка, симметричная точке F относительно (D), H — ортогональная проекция F на (D) и A — какая-нибудь точка прямой (D), отличная от H. Предлагается изучить линии (C) второго порядка с фокусом F, касающиеся в точке A прямой (D). Положим $FH = d$, $FA = r$.

1°. а) Доказать, что среди линий (C) существует парабола и только одна; построить ее директрису и ось.

б) Доказать, что вторые фокусы линий (C) в случае, если (C) — центральные линии, располагаются на прямой (L), проходящей через A. Пусть на прямой (L) задана точка; всегда ли она может служить фокусом некоторой линии (C)? Различить на прямой (L) точки, являющиеся фокусами эллипсов (C) и фокусами гипербол (C).

2°. а) Доказать, что директрисы (Δ), соответствующие фокусу F линий (C), проходят через фиксированную точку I; построить эту точку.

б) Построить директрисы (Δ), затем вторые фокусы F' линий (C) с данным эксцентриситетом, не равным 1. Исследовать. Пусть существуют две различные линии: (C_1) и (C_2); доказать, что их вторые фокусы F'_1 и F'_2 гармонически сопряжены по отношению к двум фиксированным точкам, которые требуется построить.

3°. Пусть (Γ'_1) и (Γ'_2) — направляющие окружности с центрами F'_1 и F'_2 линий (C_1) и (C_2) с данным эксцентриситетом e. Уточнить их положение и показать, что их центр гомотетии не зависит от e.

4°. Ориентируем прямую (L) от A к φ; точку A примем за начало координат и обозначим через x абсциссу точки F'. Выразить в функции A, r и x квадрат фокальной оси и эксцентриситет линии (C), для которой F' — второй фокус. Изучить функцию $y = e^2 - 1$, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Построить график этой функции, полагая $r = 2$, $d = 1$ (за единицу масштаба осей Ox и Oy принять 3 *см*). Написать уравнение второй степени, которому должен удовлетворять x, если e дано. Доказать, что если это уравнение имеет действительные корни, их произведение не зависит от e, и получить отсюда снова результат окончания 2°, б).

89.** На плоскости фиксированы две точки: F и I, расстояние между которыми равно d. Рассмотрим множество эллипсов (E) с эксцентриситетом e, для которых F — фокус, а директрисой, соответствующей этому фокусу, является переменная прямая (D), проходящая через точку I.

1°. Пусть дана директриса (D). Построить вершины A, A', B, B' эллипса (E). Обозначая через u угол (D) с IF, вычислить длину большей оси AA' этого эллипса. Определить (D) так, чтобы AA' имела данную длину. Исследовать.

2°. Пусть H — проекция F на (D); доказать, что отношения

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{FA'}}{\overline{FH}}$$

остаются постоянными, когда (D) вращается вокруг I. Найти геометрические места вершин A, A', центра O, второго фокуса F' эллипса (E). Что можно сказать о расположении малой оси и второй директрисы эллипса (E).

3°. Указать, как изменяется треугольник FOB. Найти геометрическое

место вершин B и B'. Пусть вершина B выбрана на своем геометрическом месте; определить центр, другие его вершины, второй фокус и директрисы эллипса (E), конец малой оси которого совпадает с B.

4°. Проведем через точку I касательные к эллипсу (E); пусть M и M' — точки прикосновения. Что можно сказать про углы MFI и $M'FI$? Какие выводы можно сделать о линии (L), на которой располагаются M и M'? Возьмем точку M на линии (L); можно ли построить директрису (D) эллипса (E), который касается IM в точке M? Найти геометрическое место точек M и M'. Исследовать фигуру, образованную точками M, M', F и точкой J, в которой (D) пересекает (L). Пусть (D) задана; доказать, что J есть центр гомотетии окружностей с центрами M и M', которые проходят через F. Построить точки M и M' для данного положения директрисы (D).

Замечание. Для построений рекомендуется взять $FI=3$ *см*, $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

90.** 1°. В плоскости даны окружности (C) и (C') с центрами O и O' и радиусами R и R'; S — их положительный центр гомотетии. Обозначим через p и p' степени точки S относительно (C) и (C') (будем считать, что $p \neq 0$ и $p' \neq 0$); обозначим через k степень инверсии с полюсом S, которая (C) преобразует в (C'). Доказать, что

$$\frac{R'}{R}=\frac{k}{p}=\frac{p'}{k}.$$

2°. Даны точки A, B и C, лежащие на одной прямой (C между A и B). Обозначим через (AB), (CB) и (AC) полуокружности с диаметрами AB, CB и AC, расположенные по одну сторону от прямой ABC. Пусть (D) — прямая, перпендикулярная AB в точке C. Рассмотрим окружность (I) с центром I, касающуюся одновременно (AB), (AC) и (D). Во что преобразуется окружность (I) в инверсии $(A, \overline{AB}\cdot\overline{AC})$? Во что преобразуется окружность (I) в инверсии $(B, \overline{BA}\cdot\overline{BC})$? Использовать полученные результаты для построения окружности (I) и точек прикосновения (I) с (AB), (AC) и (D).

3°. Решить те же вопросы для окружности (J), касающейся одновременно (AB), (CB) и (D).

4°. Положим $AB=2a$, $AC=2x$, $CB=2y$. Вычислить радиусы R_1 и R_2 окружностей (I) и (J), используя результаты пункта 1°. Какой вывод можно сделать отсюда? Где должна находиться точка C для того, чтобы величины R_1 и R_2 имели максимальные значения? Чему равны эти максимальные значения?

91. В ориентированной плоскости фиксированы прямая (D) и точка F на расстоянии $FH=h$ от (D). Две полупрямые, выходящие из F, пересекают (D) в точках M и M', причем $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})=+\frac{\pi}{3}$.

1°. Уточнить, как могут перемещаться точки M и M'. Доказать, что центр C окружности (C), описанной вокруг треугольника FMM', описывает одну ветвь гиперболы (H). Указать положение вершины этой гиперболы, ее центр и асимптоты.

2°. Во что переходит окружность (C) в инверсии (F, h^2)? Изучить изменение фигуры, полученной из (C), в результате указанной инверсии. Получить отсюда снова результаты пункта 1°.

3°. Найти геометрические места центров I и I' окружностей, вписанной и вневписанной в угол F треугольника FMM'. Сравнить эти геометрические места с геометрическим местом точек C. Построить касательные в точках I и I' к этим геометрическим местам и найти геометрическое место точек их пересечения.

92.** 1°. Рассмотрим две взаимно-перпендикулярные оси: $x'Ox$ и $y'Oy$. Пусть P — точка оси $x'Ox$ с абсциссой, равной 1. Переменная прямая (D), проходящая через точку P, пересекает биссектрису (Δ) $y=x$ между осями $x'Ox$ и $y'Oy$ в точке M, а биссектрису (Δ') $y=-x$ — в точке M'.

Пусть (D') — прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная (D). Пусть прямая (D') пересекает прямую (Δ) в точке N, а прямую (Δ') — в точке N'. Доказать, что $PN=PM'$ и $PM=PN'$. Доказать, что треугольники $PM'N$ и $PN'M$ могут быть получены один из другого подобным преобразованием, заключающемся в произведении поворота вокруг P на гомотетию с центром P. Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников $PM'N$ и $PN'M$, ортогональны.

2°. Прямая (D) вращается вокруг P; найти геометрическое место проекций P на NM' и на MN', огибающую прямых NM' и MN' и геометрическое место точек Q пересечения NM' и MN'.

93.** 1°. Рассмотрим треугольник ABC и точку M, лежащую в плоскости этого треугольника, но не совпадающую ни с одной его вершиной. Пусть Q и R — точки, симметричные точке M относительно сторон AC и AB.

а) Доказать, что угол, образованный прямыми AM и медиатрисой QR, имеет те же биссектрисы, что и угол A треугольника ABC.

б) Пусть AX, AY, AZ — три прямые, определяемые следующими условиями:

угол (AX, AM) имеет те же биссектрисы, что и угол (AB, AC); угол (BY, BM) имеет те же биссектрисы, что и угол (BC, BA); угол (CZ, CM) имеет те же биссектрисы, что и угол (CA, CM). Доказать, что AX, BY, CZ пересекаются в одной точке M' или параллельны.

2°. Во всем последующем предполагается, что все углы треугольника ABC острые и что точка M расположена внутри этого треугольника. Будем называть точку M', построенную по точке M, так, как это было указано в п. 1°, — точкой, обратной для M относительно данного треугольника ABC.

а) Пусть α, β, γ — проекции точки M на BC, CA и AB, а α', β', γ' — проекции M' на те же стороны. Доказать, что точки α, β, γ, α', β', γ' лежат на одной окружности; требуется определить положение центра этой окружности и установить соотношения

$$\overline{\alpha M}\cdot\overline{\alpha' M'}=\overline{\beta M}\cdot\overline{\beta' M'}=\overline{\gamma M}\cdot\overline{\gamma' M'}.$$

б) Какова будет точка, обратная ортоцентру H треугольника ABC относительно этого треугольника?

Доказать, что существует эллипс (E), касающийся сторон треугольника, для которого H будет одним из фокусов. Определить главную окружность этого эллипса (E).

в) Пусть касательные, проведенные из точки A' окружности (Γ), описанной вокруг треугольника ABC, к эллипсу (E), пересекают окружность (Γ) вторично в точках B' и C'. Пусть (E') — эллипс, касающийся сторон треугольника $A'B'C'$, для которого одним из фокусов является центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Определить второй фокус эллипса (E') и его главную окружность.

94.** Даны две взаимно-перпендикулярные оси: $x'Ox$ и $y'Oy$; на оси Ox фиксированы точки A и B с абсциссами, соответственно равными $a>0$ и $-a$. Через точки A и B проведены прямые $u'Au$ и $v'Bv$, параллельные $y'Oy$. Наконец, на оси Ox фиксирована еще точка F с абсциссой $c>a$.

Переменная прямая, проходящая через точку F, пересекает $u'Au$ в точке α, а $v'Bv$ — в точке γ. Пусть (C) — окружность с диаметром $\alpha\gamma$ и пусть она вторично пересекает $u'Au$ в точке β, а $v'Bv$ — в точке δ. Построим окружность (C'), центр I которой совпадает с центром окружности (C), но которая касается сторон $\beta\gamma$ и $\alpha\delta$ прямоугольника $\alpha\beta\gamma\delta$.

1°. Доказать, что касательные, проведенные из F к (C), образуют между собою постоянный угол 2θ; выразить $\sin\theta$ через a и c; доказать, что касательные OT и OT', проведенные из O к окружности (C'), фиксированы, и вычислить угол между ними; доказать, что окружность (C) на прямых OT и OT' высекает хорды постоянной длины.

2°. Пусть поляра точки O относительно окружности (C') пересекает (C) в точках M и N, прямую $y'Oy$ — в точке H, а прямую IF — в точке K. Вычислить в функции ординаты y точек этой поляры, а в функции a и c — следующие величины: $\overline{OI}$, $\overline{HI}$, $\overline{HK}$, радиусы r и R окружностей (C') и (C) и длину отрезка HM. Найти геометрическое место (Δ) точек K и геометрическое место (Γ) точек M и N. Какую роль играют O, A, B, F, (Δ), OT, OT' по отношению к (Γ)?

3°. Обозначим через J точку, в которой касательная в точке M к окружности (C) пересекает $y'Oy$. Вычислить $\overline{OJ}$ и доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника IMJ, проходит через две фиксированные точки. Доказать, что окружность (C) касается в точках M и N линии (Γ).

4°. Получить из предыдущих результатов свойства окружностей, центры которых расположены на мнимой оси гиперболы и которые касаются этой гиперболы.

95.** A. 1°. Найти геометрическое место фокусов F линий второго порядка, соответствующих данной директрисе (Δ), если заданы точки M_1 и M_2, через которые проходят эти линии.

2°. Найти фокусы F линий второго порядка с заданной директрисой, соответствующей этому фокусу и проходящей через три данные точки: M_1, M_2, M_3.

3°. Предыдущий вопрос, если заданы директриса (Δ), две точки M_1, M_2 и касательная (T) к линии 2-го порядка в точке M_2.

B. Рассмотрим все эллипсы (E), имеющие данную директрису (Δ) и данную вершину S, не лежащую на фокальной оси (δ). Обозначим через S' проекцию S на (Δ), через (γ) — окружность с диаметром SS', через (Γ) — окружность с центром S, проходящую через S'.

1°. Найти геометрическое место фокусов F эллипсов (E).

2°. Определить эллипсы (E), которые проходят через данную точку M и, следовательно, через точку M', симметричную M относительно (δ). Доказать, что, если точка M лежит на окружности (Γ), задача имеет только одно решение; если же M лежит внутри (Γ), задача имеет два решения (можно использовать инверсию с полюсом S).

3°. Доказать, что если точка M описывает (Γ), F описывает лишь дугу (γ). Вывести отсюда, что эллипсы (E) делятся на две группы: (E_1), которые имеют с (Γ) по две общие точки, и (E_2), не имеющие общих точек с (Γ). В каких пределах могут изменяться эксцентриситеты эллипсов (E_1) и (E_2)?

4°. Доказать, что через каждую точку M, лежащую внутри (Γ), проходит по крайней мере один эллипс из группы (E_1).

96.** Даны две взаимно-перпендикулярные оси $x'Ox$ и $y'Oy$ и три точки $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, причем $a > 0$ и $b > 0$. Переменная прямая (D) вращается вокруг точки B. Обозначим через I, H, H' проекции точек O, A и A' на прямую (D).

1°. Определить геометрическое место точек I, H и H'.

2°. Доказать, что $\Delta IHH'$ остается подобным некоторому фиксированному треугольнику. Каково геометрическое место точек пересечения медиан этого треугольника?

3°. Обозначим через α угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OI}$ (из соображений симметрии можно ограничиться рассмотрением лишь следующего интервала: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Выразить длины AH и $A'H'$ через a, b и α (можно, например, спроектировать на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{OI}$, суммы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB}$, причем следует различать два случая: прямая (D) пересекает $x'Ox$ между O и A и за точкой A).

4°. Определить угол α так, чтобы $\frac{AH}{A'H'} = k$ ($0 < k < 1$ — данное число). Таким образом, будут найдены две прямые (D); обозначим их через (D_1) и (D_2); что можно сказать про четыре прямых: BA', BA, (D_1) и (D_2)? Можно ли определить (D_1) и (D_2) геометрически?

97.** Пусть (P) — данная парабола с вершиной S, фокусом F и директрисой (D). Переменная прямая (Δ) постоянно проходит через точку F.

1°. а) Доказать, что, если прямая (Δ) не совпадает с SF, она пересекает параболу (P) в двух точках: M_1 и M_2; как построить эти точки?

в) Доказать, что точка G, в которой прямая (Δ) пересекает директрису (D), гармонически сопряжена с точкой F относительно M_1 и M_2.

2°. Обозначим через H_1 и H_2 ортогональные проекции точек M_1 и M_2 на прямую (D), через (C) — окружность с диаметром M_1M_2, а через (Γ) — окружность с диаметром H_1H_2.

а) Доказать, что окружность (C) остается касательной к фиксированной прямой, если (Δ) вращается вокруг (F).

б) Доказать, что окружность с диаметром FG ортогональна окружностям (C) и (Γ).

в) Доказать, что точка S имеет постоянную степень по отношению ко всем окружностям (C).

3°. а) Доказать, что окружность (C) касается фиксированной окружности; где ее радиус? Центр?

б) Найти геометрическое место середин M отрезка M_1M_2, когда (Δ) вращается вокруг F. Указать характеристические элементы этого геометрического места.

98.** Рассмотрим окружность (O) с центром O и радиусом R. Пусть A — фиксированная точка этой окружности. Построим окружность (C) радиуса ρ с центром в точке A. Возьмем на окружности (C) точку M и обозначим через (D) поляру точки M относительно окружности (O).

1°. Доказать, что огибающая прямых (D), если точка M описывает (C), есть линия второго порядка (Γ), для которой точка O является фокусом. Исследовать в зависимости от значений ρ тип линии (Γ). Доказать, что директриса этой линии, соответствующая фокусу O, есть касательная в точке A к окружности (O) и что главная окружность линии (Γ) при любом ρ принадлежит к одному и тому же пучку окружностей; определить точки Понселе этого пучка.

2°. Изучить в зависимости от значений ρ существование и число общих касательных к линии (Γ) и к окружности (O). Доказать, что если P и Q — точки прикосновения одной из таких касательных соответственно с линией (Γ) и окружностью (O), то OP — биссектриса угла AOQ.

99.** В плоскости (P) заданы две окружности (C) и (C') разных радиусов. По этим окружностям с одной и той же скоростью, но в противоположных направлениях движутся две точки. Пусть m и m' — положения этих точек [соответственно на (C) и на (C')] для одного и того же момента

времени. Предметом исследования настоящей задачи будет изучение семейства медиатрис (D) отрезка mm'.

Часть первая. 1°. Пусть O — середина отрезка CC'. Доказать, что в некоторый момент векторы $\overrightarrow{Cm}$ и $\overrightarrow{C'm'}$ будут иметь прямопротивоположное направление и что им соответствуют два положения u и v для первой точки m и положения u' и v' для второй точки m'; uv и $u'v'$ — диаметры (C) и (C'), причем $\overrightarrow{uv}$ и $\overrightarrow{u'v'}$ имеют противоположное направление. Обозначим через $x'x$ прямую, проходящую через O, лежащую в плоскости (P) и перпендикулярную uv, и пусть G — точка, симметричная O относительно uv.

2°. Что можно сказать про прямые (D), если точки O и G совпадают? Этот случай в дальнейшем исключается. Предполагая, таким образом, $OG \neq 0$, доказать, что симметрия относительно оси $x'x$, следующая или предшествующая переносу, определяемому вектором $\overrightarrow{GO}$, переводит окружность (C) в окружность (C') и притом так, что каждое положение точки m переводится в положение соответствующей точки m' (окружность (C) может пересекаться с прямой $x'x$, а может и не пересекаться).

3°. Рассмотрим точечное преобразование A, которое произвольной точке p плоскости (P) ставит в соответствие точку p', которую мы получим, производя сначала симметрию в оси $x'x$ с последующим переносом, определяемым вектором $\overrightarrow{GO}$. Определить преобразование, обратное для A; где находится середина отрезка pp'? Могут ли точки p и p' совпадать? Обозначим через q точку, симметричную p' относительно uv, а через q' — точку, симметричную p относительно uv; доказать, что A переводит q в q'; доказать, что p и q симметричны относительно G, а p' и q' — относительно O. Представить преобразование A в виде произведения симметрии относительно оси на симметрию относительно точки.

4°. Возвратимся к прямым (D). Требуется найти те из этих прямых, которые проходят через данную точку p' плоскости (P); для этого надо рассмотреть прообраз p точек p' в преобразовании A, и точка m определится тогда, как точка пересечения окружности (C) с некоторой прямой (исследования возможности этого пересечения производить не нужно). В частности, доказать, что существуют две и только две прямые (D), проходящие через O; обозначим их через (U) и (V); определить эти прямые с помощью отрезков uu' и vv'.

5°. Какая-нибудь прямая (D), отличная от (U) и (V) и являющаяся медиатрисой отрезка mm', пересекает (U) в точке λ', а (V) — в точке μ'. Обозначим через λ и μ прообразы λ' и μ' в преобразовании A, через λ_1 и μ_1 — середины $\lambda\lambda'$ и $\mu\mu'$. Доказать, что медиатрисы $\lambda\lambda'$ и $\mu\mu'$ суть прямые um и vm, что точки λ', λ, O, u лежат на одной окружности и что точки μ', μ_1, O, v также лежат на одной окружности.

Установить, что треугольники $u O\lambda'$ и $\mu' O v$ подобны и имеют одинаковую ориентацию. Получить отсюда соотношение $O\lambda' \cdot O\mu' = Ou \cdot Ov$ и получить, что пары полупрямых $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov})$ и $(\overrightarrow{O\lambda'}, \overrightarrow{O\mu'})$ имеют одну и ту же ось симметрии $X'OX$.

6°. Отложим на $X'OX$ противоположно направленные векторы $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OF'}$, длина которых $OF = OF' = \sqrt{Ou \cdot Ov}$. Доказать, что точки F, F', λ', μ' лежат на одной окружности. Обратно: если точки λ'_0 на (U) и μ'_0 на (V) лежат на одной и той же окружности, проходящей через F и F', и расположены по разные стороны от хорды FF' этой окружности, то прямая $\lambda'_0\mu'_0$ есть прямая семейства (D).

7°. Рассмотрим гиперболу (H) с фокусами F, F' и асимптотами (U) и (V). Установить, что $\lambda'\mu'$ — касательная к (H) и что обратно: всякая касательная к (H) принадлежит семейству (D). Вывести это, изучив огибающую прямых (D).

Часть вторая. В этой части предполагается, что окружность (C) имеет дугу, лежащую целиком вне гиперболы (H) (исследования условий взаимного расположения точек C, C' и u, при которых это будет так, проводить не надо).

1°. Возьмем точку a' на этой дуге (C). Пусть a — прообраз a' в преобразовании A. Построить, исходя из первой части, 4°, касательные к (H), проходящие через a'; пусть они пересекают (C) вторично в точках b' и c'. Предположим (что имеет место в случае, если a' не занимает исключительного положения на указанной дуге), что точки b' и c' отличны от a'. Это построение связано с рассмотрением точки β окружности (C) такой, что ее образ β' в преобразовании A будет симметричен β относительно $a'c'$ и с рассмотрением точки γ такой, что ее образ γ' в преобразовании A будет симметричен γ относительно $a'b'$. Пусть β_1 — середина $\beta\beta'$; γ_1 — середина $\gamma\gamma'$, a_1 — середина aa'. Используя вписанные четырехугольники $a'a_1\gamma\gamma$ и $a'b'\beta\gamma$, доказать, что $b'\beta \parallel x'x$. Вывести отсюда, что b' симметрична β относительно uv, а также, что γ и c' симметричны относительно uv.

2°. Пусть α — точка, симметричная a' относительно uv, α' — образ α в преобразовании A. Что будет медиатрисой $\alpha\alpha'$? (вернуться к I, 3°). Вывести отсюда, что существует бесконечное множество треугольников $a'b'c'$, которые вписаны в окружность (C) и стороны которых касаются гиперболы (H).

3°. Доказать, что прямые $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ пересекаются в одной точке φ, расположенной на окружности (C), и что α', β', γ' симметричны соответственно a', b', c' относительно O. Вывести отсюда, что точка, симметричная точке φ относительно O, есть ортоцентр треугольника $a'b'c'$.

100.** Даны отрезок $AB = 2R$ и полуокружность (Γ) с диаметром AB. Рассмотрим окружности (ω), центр ω которых лежит на полуокружности (Γ) и радиус которых равен $\frac{\omega A}{2}$.

1°. Найти геометрическое место оснований H поляр точки A относительно этих окружностей и доказать, что все окружности (ω) ортогональны одной и той же окружности (C).

2°. Пусть (ω_1) и (ω_2) — две окружности рассматриваемого семейства, пересекающиеся в точках M и N. Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника MAN, касается AB, и найти предельные положения m и n точек M и N при условии, что окружность (ω_1) остается фиксированной, а (ω_2) стремится к (ω_1). Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника mAn, проходит через центр ω_1 окружности (ω_1) и что прямая $A\omega$ есть биссектриса угла mAn.

3°. Рассмотрим инверсию $(A, 4R^2)$. Пусть (I) — образ в этой инверсии какой-нибудь окружности (ω) рассматриваемого семейства, (I_1) и (I_2) — образы (ω_1) и (ω_2), P и Q — образы M и N, а p и q — предельные положения точек P и Q, когда (ω_2) стремится к (ω_1). Найти геометрическое место центров окружностей (I). Доказать, что отношение расстояний от точек p и q до точки A и до касательной к (Γ) в точке B имеет значение (одно и то же для p и q), не зависящее от выбора окружности (ω_1). Вывести отсюда, что при изменении (ω_1) эти точки остаются на фиксированной линии второго порядка, и уточнить геометрическое место каждой из этих точек.

4°. Пусть ω_1' — образ точки ω_1 в указанной выше инверсии. Доказать, что окружности, проходящие через A, ω_1' и соответственно через p и q, ортогональны окружности (I_1). Вывести отсюда, что окружность (I_1) и линия (H) касаются друг друга в точках p и q.

101*.** В этой задаче предлагается изучить некоторые свойства плоских фигур, расположенных в данной ориентированной плоскости. Фигуру, образованную тремя точками, будем называть ориентированной, если эти точки взяты в определенном порядке; две такие фигуры: A, B, C и P, Q, R — будем называть прямо (или обратно) подобными, если точки A, B, C могут быть переведены соответственно в точки P, Q, R прямым подобием (соответственно — обратным подобием).

Рассмотрим в плоскости три фиксированные точки: A, B, C, не лежащие на одной прямой. Обозначим через (O) окружность, описанную вокруг треугольника ABC; O — центр этой окружности; AX, BY, CZ — касательные в точках A, B, C к окружности (O) и I, J, K — точки, в которых эти касательные пересекают BC, CA и AB. Обозначим через P, Q, R три точки, выбранные соответственно на прямых BC, CA и AB, а через (P, Q, R) — фигуру, которую они определяют (треугольник или три точки, лежащие на одной прямой, — безразлично).

I. 1°. Доказать, что если точки P, Q, R отличны от вершин треугольника ABC, то окружности (AQR), (BRP), (CPQ) имеют общую точку S. Во что обращается это предложение, если одна из точек P, Q, R стремится к совпадению с одной из точек A, B, C? Будем говорить, что таким образом определенная точка S ассоциирована с фигурой (P, Q, R).

2°. Доказать, что и обратно: данной точке S плоскости можно поставить в соответствие семейство фигур (P, Q, R), ассоциированных с этой точкой S, причем одна из точек P, Q, R может быть выбрана произвольно (на соответствующей прямой BC, CA или AB). Будем говорить, что фигуры (P, Q, R), так определенные, все ассоциированы с точкой S.

3°. Пусть (P, Q, R) — одна из фигур, ассоциированная с точкой S; установить соотношения, которые существуют:

между ориентированными углами

$$(SP, BC),\ (SQ, CA),\ (SR, AB);$$

между ориентированными углами

$$(PQ, PR),\ (SB, SC),\ (AB, AC);$$

между ориентированными углами

$$(SP, QR) \text{ и } (SA, AX).$$

4°. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что фигуры (P, Q, R) образованы тремя точками, лежащими на одной прямой, заключается в том, что точка S, ассоциированная с этой фигурой, лежит на окружности (O).

II. 1°. Пусть точка S отлична от A, B, C и лежит на окружности (O). Доказать, что отношение $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$ имеет одно и то же значение для всех фигур (P, Q, R), ассоциированных с S. Во что обращается это утверждение, если точка S стремится к одной из вершин: A, B или C?

2°. Дано число m. Доказать, что на окружности (O) существует точка S такая, что отношение $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$, соответствующее ей, равно m. Дать построение точки S. Рассмотрим две точки окружности (O), для которых это отношение равно m и $-m$. Доказать, что прямая, проходящая через эти две точки, проходит через фиксированную точку,

когда m изменяется. Где будут находиться точки S для $m=-1$, $m=2$ и $m=\frac{1}{2}$.

III. В этом разделе мы будем предполагать, что точка S не лежит на окружности (O). Через (P, Q, R) мы будем обозначать здесь ориентированный треугольник, вершины которого взяты в том порядке, как они записаны.

1°. Доказать, что если точка S фиксирована, то все треугольники (P, Q, R), ассоциированные с S, подобны и одинаково ориентированы с фиксированным треугольником. Пусть S и S' — две соответствующие друг другу точки в инверсии с центром O, сохраняющей окружность (O). Доказать, что два каких-нибудь ориентированных треугольника (P, Q, R) и (P', Q', R'), первый из которых ассоциирован с S, а второй — с S', будут противоположно ориентированы.

2°. Пусть дан ориентированный треугольник (T); доказать, что существует точка S такая, что ориентированный треугольник (P, Q, R), с ней ассоциированный, будет подобен треугольнику (T) и одинаково с ним ориентирован. Построить, в частности, S, если (P, Q, R) — равносторонний треугольник.

3°. Определить все точки S такие, что ассоциированные с ней треугольники (P, Q, R) будут подобны и одинаково или противоположно ориентированы с ориентированным треугольником, полученным из данного треугольника ABC всевозможными (шестью) порядками его вершин. Если треугольник ABC не равнобедренный, то, таким образом, будут получены одиннадцать точек, среди которых будут O, I, J, K. Показать, что пять из указанных одиннадцати точек будут лежать на одной прямой, а шесть остальных — на окружности, проходящей через точку O. Каковы будут эти точки, если ABC — равносторонний треугольник? В общем случае пусть S_1 и S_2 — точки, с которыми ассоциированы ориентированные треугольники (P, Q, R), подобные и одинаково ориентированные с ориентированными треугольниками (B, C, A) и (C, A, B). Доказать, что, например, S_1 можно охарактеризовать равенством углов (BC, BS_1), (CA, CS_1), (AB, AS_1) и что S_1 и S_2 — фокусы линий второго порядка, касающихся BC, CA и AB. Обозначая через α, β, γ, φ алгебраические значения углов (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB) и (BC, BS_1), доказать, что

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$$

(можно сначала установить соотношение

$$4\sigma \operatorname{ctg}\theta = y^2 + z^2 - x^2$$

для треугольника с площадью σ и сторонами x, y, z, где θ — угол, противолежащий стороне x).

IV. 1°. Точка S фиксирована [расположена на (O) или нет — безразлично]. Какова будет огибающая прямых PQ, соответствующая всем фигурам (P, Q, R), ассоциированным с S?

2°. Точка S фиксирована на окружности (O) и отлична от точек A, B, C. На каждой прямой PQR, ассоциированной с S, рассматривается точка M такая, что

$$\overline{PM} = \lambda \overline{PQ},$$

где λ — данное число. Каково геометрическое место (L) точек M? Какова будет огибающая линий (L), если λ меняется?

3°. Точка S фиксирована и не лежит на окружности (O). Найти геометрические места центров описанных окружностей, ортоцентров, центров тяжестей треугольников (P, Q, R), ассоциированных с S. Можно ли

выбрать точку S так, чтобы для одного из ассоциированных с ней треугольников (P, Q, R) она была бы:

а) центром окружности, описанной вокруг треугольника PQR?

б) его ортоцентром?

в) его центром тяжести?

V. Точка S фиксирована, но не расположена ни на одной из прямых BC, CA и AB.

1°. Рассмотрим инверсию с полюсом S. Изучить переменную фигуру, образованную образами точек P, Q, R в указанной инверсии для фигур (P, Q, R), ассоциированных с S.

2°. Рассмотрим полярное преобразование относительно окружности с центром S. Изучить переменную фигуру, образованную полярами точек P, Q, R для фигур (P, Q, R), ассоциированных с S.

Глава XXI

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найти треугольник, стороны и площадь которого выражаются тремя последовательными числами.
2. Заключить квадрат со стороной a в равносторонний треугольник возможно меньших размеров.
3. Построить внутри квадрата со стороной a равносторонний треугольник возможно бóльших размеров.
4. Поместить внутри квадрата со стороной a правильный шестиугольник возможно больших размеров. Найти сторону шестиугольника.
5. Поместить внутри правильного шестиугольника со стороной a квадрат возможно больших размеров. Найти сторону этого квадрата.
6. Пользуясь циркулем и линейкой, соединить прямой линией точки A и B, если длина линейки меньше расстояния AB.
7. Квадрат со стороной a разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было составить тетраэдр.
8. Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы считаются окрашенными в черный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черном, и доказать, что большей начертить нельзя.
9. Из прямоугольника $ABCD$ вырезается квадрат $APQRA$. Найти при помощи линейки центр тяжести оставшейся части.
10. Доказать, что любые четыре касательные, проведенные к окружности через две сопряженные точки, делят любую пятую касательную гармонически.
11. На плоскости дана квадратная сетка, причем сторона наименьшего квадрата равна 1 *см*. Дана плоская ограниченная фигура, площадь которой меньше 1 *см*^{2}. Доказать, что какова бы ни была форма этой фигуры, ее можно наложить на сетку так, что ни одна из вершин квадратов сетки не попадет на фигуру.
12. Исследовать покрытия плоскости правильными многоугольниками, удовлетворяющие следующим условиям:
    а) плоскость покрыта правильными многоугольниками сплошь — без просветов и двойных покрытий;
    б) вокруг всех вершин правильные многоугольники расположены одним и тем же способом, т. е. вокруг всех вершин в одном и том же порядке следуют правильные многоугольники одних и тех же наименований; например, если вокруг одной вершины многоугольники расположены в последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат, то и вокруг всякой другой вершины того же покрытия многоугольники расположены в той же последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат.
13. Даны четыре прямые: a, b, c, d, попарно пересекающиеся в шести точках. Доказать, что:
    а) эти четыре прямые, взятые по три, образуют четыре треугольника (1), у которых все четыре описанные окружности проходят через одну и ту же точку P;

б) центры этих четырех окружностей и точка P лежат на одной окружности;
в) основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые a, b, c, d, лежат на одной прямой r; это свойство принадлежит исключительно точке P;
г) ортоцентры всех четырех треугольников (1) лежат на одной прямой r';
д) прямые r и r' параллельны;
е) прямая r проходит через середину перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую r';
ж) середины диагоналей полного четырехугольника, образованного прямыми a, b, c, d, лежат на одной прямой r'';
з) прямая r'' перпендикулярна прямым r и r';
и) для каждого из четырех треугольников (1) существует один вписанный и три вневписанные круга, что дает всего шестнадцать кругов; центры этих шестнадцати кругов лежат по четыре на восьми новых кругах;
к) эти восемь новых кругов разделяются на две группы так, что каждый из четырех кругов одной группы пересекает ортогонально все круги другой группы; центры кругов обеих групп лежат на двух взаимно-перпендикулярных прямых;
л) эти последние прямые пересекаются в точке P.

РАЗДЕЛ II

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Глава XXII

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Прямые и плоскости в пространстве

1. Из внешней точки проведены к плоскости две наклонные; их проекции на эту плоскость равны a и $b\,(a > b)$, а разность углов наклона к плоскости равна 45°. Определить расстояние от общей точки наклонных до плоскости.
2. Из точки A, не лежащей на плоскости, проведены к ней две взаимно перпендикулярные наклонные: AB и AC, образующие с плоскостью углы 15° и 75°. Найти углы B и C треугольника ABC.
3. Точка A лежит на данной плоскости. Точка B лежит вне данной плоскости. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на данную плоскость. Дано $AB = BH \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$. Через прямую AB проведена плоскость, образующая с данной плоскостью угол в 30°. Найти угол между AB и прямой, по которой пересекаются данная плоскость с плоскостью, проведенной через AB.
4. В прямоугольном треугольнике дана гипотенуза a и острый угол, равный 30°. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и наклонена к плоскости данного треугольника под углом 45°.
5. Параллелограмм и плоскость π расположены так, что одна из меньших сторон параллелограмма находится в плоскости π, а противоположная ей удалена от плоскости π на расстояние, равное расстоянию между большими сторонами параллелограмма. Определить угол между плоскостью π и плоскостью параллелограмма, если длины сторон параллелограмма относятся как 1 : 2.
6. Через две точки, находящиеся в данной плоскости на расстоянии, равном a, проведены наклонные под углом 45° к плоскости. Определить расстояние между ними, если расстояние между их проекциями на данную плоскость равно b.
7. Даны плоскость π и прямая AB, удаленная от нее на расстояние a. Через точку A проводятся прямые, перпендикулярные AB, образующие с данной плоскостью углы 45° и 30° и пересекающие эту плоскость в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.
8. Отрезок AB параллелен данной плоскости π. Из его концов восставлены к нему перпендикуляры под углами 45° и 30° к данной плоскости. Определить расстояние от данного отрезка до данной плоскости, если его длина равна a, а расстояние между точками пересечения плоскости с проведенными перпендикулярами равно b.

9. На ребре двугранного угла 120° взят отрезок c и из его концов восставлены к нему в различных гранях перпендикуляры a и b. Определить длину прямой, соединяющей концы этих перпендикуляров.
10. В трехгранном угле все плоские углы равны 45°. Найти расстояние от точки до вершины данного угла, если она находится на расстояниях, равных $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ от каждой грани.
11. В трехгранном угле $SABC$ углы ASB и ASC равны между собой; угол BSC равен 90°; ребро SA образует с гранью BSC угол 60°. На ребрах SB и SC отложены равные отрезки SM и SN и через M и N проведена плоскость, дающая в сечении с гранями правильный треугольник. Определить угол между проведенной плоскостью и гранью MNS.
12. Основанием пирамиды служит квадрат. Двугранные углы при основании относятся, как 1 : 2 : 4 : 2. Определить эти углы.

§ 2. Треугольная пирамида

1. Трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, пересечен плоскостью, удаленной от вершины на a и отсекающей равные отрезки на ребрах. Найти объем полученной пирамиды.
2. Плоскость отсекает на ребрах трехгранного угла, все двугранные углы которого прямые, отрезки, составляющие арифметическую прогрессию с разностью 4 *см*. Найти размеры отрезков, если объем образовавшейся пирамиды равен 140 $см^3$.
3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковое ребро равно b. Плоскость, параллельная боковому ребру и скрещивающейся с ним стороне, рассекает данную пирамиду по квадрату. Найти сторону этого квадрата.
4. В треугольной пирамиде одна из сторон основания равна 16 *см*; противоположное ей боковое ребро равно 18 *см*; каждое из остальных четырех ребер равно 17 *см*. Определить объем этой пирамиды.
5. Через одно ребро основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания q проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру. Определить полную поверхность пирамиды, если указанная плоскость делит боковое ребро в отношении $m : n$.
6. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в k раз больше площади основания. Найти объем пирамиды, если площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга.
7. Секущая плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях (считая от вершины)

$$\frac{m_1}{n_1},\quad \frac{m_2}{n_2},\quad \frac{m_3}{n_3}.$$

В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?
8. Дан тетраэдр $OE_1E_2E_3$, причем $OE_1 = OE_2 = OE_3$. На продолжении ребер OE_1, OE_2, OE_3 за точки E_1, E_2, E_3 взяты точки O_1, O_2, O_3 на расстояниях, соответственно равных x, y, z от точки O. Построен параллелепипед, для которого отрезки OO_1, OO_2 и OO_3 являются ребрами, а из точки O проведена диагональ, встречающая плоскость треугольника $E_1E_2E_3$ в точке M. Найти отношения: пл. $\triangle ME_2E_3$: пл. $\triangle ME_3E_1$: пл. $\triangle ME_1E_2$.
9. На боковых ребрах тетраэдра $SABC$ отложены соответственно отрезки $AA_1 = 2$, $BB_1 = 3$, $CC_1 = 4$. Плоскость, проходящая через эти точки, делит объем тетраэдра в отношении 1 : 8. Определить боковые ребра тетраэдра, если известно, что они равны между собой.
10. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро равно $2a$, через середину бокового ребра перпендикулярно к нему проведена плоскость. Определить площадь образующегося сечения.

11. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Вершина пирамиды удалена от плоскости ее основания на расстояние, равное 24, и проектируется на эту плоскость в точку, лежащую внутри основания. Найти ребро куба, четыре вершины которого лежат в плоскости основания данной пирамиды, а ребра, соединяющие эти вершины, параллельны соответствующим катетам треугольника, лежащего в основании пирамиды. Четыре другие вершины куба лежат на боковых гранях данной пирамиды.

12. Вершина треугольной пирамиды проектируется в центр нижнего основания. Через середину высоты проведены четыре плоскости, параллельные основанию и боковым граням пирамиды. Площади сечения равны соответственно s_1, s_2, s_3 и s_4. Найти полную поверхность пирамиды.

13. В основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ взята точка M и через нее проведены прямые, параллельные ребрам SA, SB и SC, до встречи с гранями SBC, SCA и SAB соответственно в точках P, Q и R. Полагая

$$SA=a,\quad SB=b,\quad SC=c,$$

$$MP=x,\quad MQ=y,\quad MR=z,$$

найти сумму

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}.$$

14. Найти объем правильной треугольной усеченной пирамиды, если известны длина l средней линии боковой грани и расстояние d между центрами вписанного и описанного шаров.

15. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти стороны, периметр и площадь сечения, параллельного двум его скрещивающимся ребрам и отстоящего от центра тетраэдра на расстоянии b, причем

$$0<b<\frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

16. Определить объем тетраэдра, если противоположные ребра его попарно равны a, b и c.

17. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через A, параллельной BC и перпендикулярной грани SBC, если

$$SA=1,\quad AB=\frac{13}{16},\quad AC=\frac{15}{16},\quad BC=\frac{7}{8}.$$

18. Площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды равна s. Найти площадь сечения, проведенного параллельно боковой грани через:

а) точку пересечения медиан основания;

б) через середину высоты основания;

в) через середину высоты пирамиды.

19. Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через вершину и перпендикулярного медиане основания, равна s. Найти площадь сечения, перпендикулярного медиане основания, делящего ее в отношении: а) 1 : 1; б) 1 : 2; в) 1 : 5.

20. Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами служит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 и 12; высота пирамиды равна $\frac{80}{13}$. Найти площадь сечения, параллельного гипотенузе основания и не встречающемуся с ней боковому ребру, если секущая плоскость делит катеты основания в отношении 4 : 1, считая от вершины прямого угла.

21. Вершины двух равных и правильных треугольных пирамид, объем каждой из которых равен v, находятся в различных концах их общей высоты, причем боковые ребра одной пересекают апофемы другой. Найти объем тела, ограниченного боковыми гранями этих пирамид.

22. Прямоугольный треугольник $ABC\,(A=90°)$ проектируется на плоскость P в равнобедренный треугольник abc. Дано $ab=ac=l$, $\angle bac=120°$. Расстояния от точек B и C до плоскости P равны 2 *см*, расстояние от точки A до плоскости P больше, чем 2 *см*.

1°. Вычислить расстояние от точки A до плоскости P. Во всем последующем $l=3\sqrt{2}$ *см*.

2°. Вращением вокруг прямой, по которой пересекаются плоскость ABC и плоскость P, плоскость треугольника ABC совмещается с плоскостью P. Начертить на плоскости P треугольник abc и тот треугольник $a_1b_1c_1$, с которым при указанном вращении совмещается треугольник ABC.

3°. Вычислить объем пирамид $aBbcC$ и $aABc$.

4°. Вычислить расстояние от точки a до плоскости ABC.

23. 1°. В треугольнике ABC $\angle A=60°$. Вычислить сторону a и площадь s в функции b и c.

2°. В тетраэдре $SABC$

$$\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=60°;$$

пусть

$$SA=a,\quad SB=b,\quad SC=c.$$

Показать, что необходимое и достаточное условие того, что $BC=a\sqrt{10}$ выражается некоторым соотношением между a, b, c [назовем это соотношение соотношением (1)]. Показать, что необходимое и достаточное условие того, что треугольник ABC прямоугольный с прямым углом A, также выражается некоторым соотношением между a, b и c [это соотношение между a, b и c назовем соотношением (2)].

3°. Пусть задана длина a ребра SA; доказать, что можно определить в функции a выражения $P=bc$ и $S=b+c$ при условии, что соотношения (1) и (2) одновременно выполнены. Вычислить в функции a значения b и c при условии, что

$$\angle BAC=90°,\quad BC=a\sqrt{10}.$$

4°. Вычислить в функции a полную поверхность тетраэдра в последнем предположении.

§ 3. Многоугольные пирамиды

1. Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого 1 $м^2$; две боковые грани перпендикулярны площади основания, а две другие наклонены к нему под углом 30° и 60°. Найти объем этой пирамиды.

2. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущены на боковое ребро перпендикуляр, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный b. Найти объем пирамиды.

3. Основанием усеченной пирамиды служит прямоугольник, причем точки пересечения диагоналей оснований находятся на одном перпендикуляре к плоскости основания. Стороны одного прямоугольника 54 *см* и 30 *см*, а периметр другого 112 *см*. Расстояние между их плоскостями равно 12 *см*. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

4. Площадь сечения, проходящего через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно не встречающемуся с ней боковому ребру, равна s. Найти площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания и середину высоты.

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм. Через одну из его сторон и среднюю линию противолежащей грани проведем плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
6. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро образует с высотой угол 30°. Построить сечение, проходящее через вершину основания перпендикулярно противолежащему ребру, и найти его площадь.
7. Две четырехугольные пирамиды имеют общим основанием квадрат со стороной a и расположены по одну сторону от их общего основания. Высоты их равны h и проходят через середины противоположных сторон квадрата основания. Найти объем общей части этих двух пирамид.
8. Вычислить объем общей части двух пирамид с одинаковой высотой h, если общим их основанием служит квадрат со стороной a, а высоты проходят через противоположные вершины квадрата основания.
9. Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды, перпендикулярного стороне основания в ее середине, равна s. Найти площадь сечения, перпендикулярного стороне основания и делящего его в отношении 1 : 5.
10. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна s. Найти площадь сечения, параллельного боковой грани и делящего площадь основания в отношении 1) 1 : 1; 2) 1 : 3.
11. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 2, высота равна 4. Вычислить площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания и середину высоты.
12. Диагонали оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 1 и 3, диагональ пирамиды равна 7. Найти площадь двух параллельных сечений, одно из которых проходит через диагональ пирамиды параллельно диагонали ее основания, а другое — через середину оси.
13. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм со сторонами $AB = 15$, $AD = 13$ и диагональю $BD = 14$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно 48. Через A проведена плоскость, параллельная BD и делящая SC в отношении $SM : MC = 3 : 2$. Найти площадь сечения.
14. Площади верхнего и нижнего оснований усеченной пирамиды равны s_1 и s_2. Определить площадь среднего сечения.
15. Правильная пятиугольная пирамида $SABCDE$ пересечена плоскостью, проходящей через вершины A и C основания и середины ребер DS и ES. Найти площадь сечения, если ребро основания пирамиды равно q, а боковое ребро равно b.
16. Площадь сечения, проходящего через высоту правильной шестиугольной пирамиды и большую диагональ ее основания, равна s. Найти площадь сечения, перпендикулярного апофеме основания в ее середине.
17. Площадь сечения, проведенного через меньшую диагональ основания правильной шестиугольной пирамиды параллельно ее высоте, равна s. Найти площадь сечения, перпендикулярного стороне основания и делящего ее в отношении 1 : 3.
18. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны a и $3a$; расстояние между двумя параллельными ребрами, лежащими в плоскостях различных оснований и различных боковых граней, равно b. В пирамиде проведены два параллельных сечения: одно проходит через упомянутые ребра, другое — через середину оси. Найти площади сечений.
19. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна s. Найти площадь сечения, параллельного боковой грани и проходящего через: а) центр основания; б) середину высоты.
20. Меньшие диагонали оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды $A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ равны d и $2d$; большая диагональ пирамиды равна D. Найти площадь сечения, проведенного через A_1B_4 параллельно A_2A_6.

21. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды $SA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равно l, меньшая диагональ основания равна d. Найти площадь сечения, параллельного SA_1 и A_2A_6, если отношение $A_1M : MA_4$, в котором секущая плоскость делит A_1A_4, равно:
а) 3 : 1, б) 1 : 1, в) 1 : 3, г) 1 : 7.

§ 4. Призмы

1. Основание наклонной призмы — треугольник, стороны которого 35, 21, 28, а расстояние между двумя ее основаниями 59. Определить объем.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону основания AB и противолежащую ей вершину C_1 проведена плоскость. Вторая плоскость проведена через сторону A_1B_1 и вершину C. Найти отношение объемов частей призмы, на которые ее разбивают проведенные плоскости.
3. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a, длина бокового ребра равна b. Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания угол в 45°. Определить боковую поверхность этой призмы.
4. Стороны основания прямой треугольной призмы равны соответственно 6, 8 и $4\sqrt{6}$. Через вершину большего угла основания проведено сечение призмы, имеющее форму равностороннего треугольника. Найти периметр сечения.
5. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1; высота призмы равна радиусу круга, вписанного в основание. Найти площадь сечения, проходящего через середины ребер AA_1, A_1B_1 и AC.
6. Каждое из оснований правильной призмы служит основанием пирамиды, вершина которой находится в центре тяжести другого основания призмы. Как относится объем тела, ограниченного боковыми гранями пирамид, к объему призмы?
7. Перпендикулярные сечения двух призматичных поверхностей суть равные правильные треугольники со стороной a. Найти объем тела, ограниченного этими призматическими поверхностями, если
   а) оси поверхностей пересекаются под прямым углом, а плоскости двух граней совпадают;
   б) одно из ребер каждой поверхности пересекает два ребра другой поверхности под прямым углом.
8. Определить полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 14 *см*, а диагональ боковой грани равна 10 *см*.
9. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15 *см*, высота призмы равна 20 *см*. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей ее диагонали призмы.
10. В правильной четырехугольной призме через середины двух последовательных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом 45°. Сторона основания равна a. Определить площадь полученного сечения.
11. Найти объем правильной четырехугольной призмы со стороной основания a, если сумма углов, образованных диагональю призмы со стороной и с диагональю основания (выходящими из той же вершины), равна 135°.
12. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 2, а высота призмы равна 4. Найти площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания и середину оси.
13. Основанием прямой призмы служит ромб с диагоналями 6 и 15. Высота призмы равна 8. Найти площади сечений, проходящих через диагонали призмы параллельно диагоналям ее оснований.
14. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через диагональ основания призмы параллельно ее диагонали, другое делит ось призмы в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна s, найти площадь второго.

15. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух смежных сторон основания и середину оси, другое делит ось в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна s, найти площадь второго сечения.
16. Объем правильного тетраэдра равен v. Найти объем части тетраэдра, заключенной внутри призматичной поверхности, сечение которой, перпендикулярное к ее ребрам, совпадает с сечением тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам.
17. Оси двух призматических поверхностей, перпендикулярные сечения которых — равные квадраты со стороной a, взаимно перпендикулярны, а две диагональные плоскости их совпадают. Найти объем тела, ограниченного данными призматическими поверхностями.
18. Ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны друг другу и к прямой MN, соединяющей их середины; MN служит осью, вписанной в тетраэдр правильной четырехугольной призмы. Найти ее объем, если
    1) $AB = CD = 8$, $MN = 4$, высота призмы относится к стороне основания как 3 : 1;
    2) $AB = 2$, $CD = MN = 4$, высота призмы равна стороне основания.
19. В правильной шестиугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через сторону основания призмы и ее большую диагональ, другое делит ось призмы в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна s, найти площадь второго.
20. В правильной шестиугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух несмежных и непараллельных сторон основания и середину оси призмы, другое делит ось в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна s, найти площадь второго сечения.
21. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 1. Найти площадь сечения, проходящего через сторону основания и бо́льшую диагональ призмы.
22. Большая диагональ правильной шестиугольной призмы

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$$

равна D, меньшая диагональ ее основания равна d. Найти площадь сечения, параллельного A_2A_6 и A_1B_1, если отношение $A_1M : MA_4$, в котором секущая плоскость делит A_1A_4, равно:
1) 3 : 1, 2) 1 : 1, 3) 1 : 3, 4) 1 : 7, 5) 0.
23. Объем правильной пирамиды равен v. В шестиугольнике, служащем ее основанием, проведены диагонали, не проходящие через центр. Два полученных треугольника служат перпендикулярными сечениями призматических поверхностей. Найти объем части пирамиды, заключенной внутри этих призматических поверхностей.
24. Оси двух призматических поверхностей, перпендикулярные сечения которых суть равные правильные шестиугольники со стороной a, пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, ограниченного призматическими поверхностями, если у них совпадают:
    а) две диагональные плоскости, проходящие через оси;
    б) две диагональные плоскости, не проходящие через оси.
25. В правильной двенадцатиугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол в 45°. Определить площадь сечения, если сторона основания $a = 5$ *см*.

§ 5. Куб

1. В правильной четырехугольной пирамиде, высота которой 3,6, а сторона основания 4,2, помещен куб, четыре вершины которого находятся на основании пирамиды, а остальные четыре — на боковых ребрах. Определить сторону куба.

2. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба, ребро которого равно a, и любым ребром, скрещивающимся с этой диагональю.
3. Из данного деревянного куба вытесана правильная шестиугольная призма наибольшего объема. Какой процент материала использован?
4. Через середину диагонали куба, перпендикулярно к ней, проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении, если ребро куба равно a.
5. На расстоянии b от центра куба с ребром a перпендикулярно к его диагонали проведена плоскость. Вычислить площадь сечения, считая, что

$$0 \leqslant b \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

6. Найти кратчайшее расстояние, т. е. длину отрезка общего перпендикуляра, между двумя непересекающимися диагоналями двух соседних граней куба, ребро которого равно a.
7. В каком отношении прямая, пересекающая под прямыми углами ребро куба и диагональ куба, скрещивающуюся с рассматриваемым ребром, делит эту диагональ?
8. Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения получилась наименьшей?
9. Объем куба равен v. Строится призматическая поверхность, сечением которой, перпендикулярным ее ребрам, служит сечение куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали. Найти объем части куба, заключенной внутри указанной призматической поверхности.
10. Ребро куба равно a. В куб вписаны три правильные четырехугольные призмы, вершины углов которых делят ребра куба пополам. Найти объем тела, ограниченного боковыми гранями призм.
11. Ребро куба равно 1. Диагональ SS_1 куба служит осью вписанной в куб правильной шестиугольной призмы. Найти объем призмы, если ее высота втрое меньше диагонали куба.
12. Ребро куба равно a. Диагональ куба служит осью, вписанной в куб правильной шестиугольной призмы, высота которой относится к диагонали куба, как $l : 1$. Найти сторону основания призмы.
13. Ребро куба равно 1. Диагональ SS_1 куба служит осью вписанной в него правильной треугольной призмы. Найти объем призмы, если плоскости ее оснований делят SS_1 в отношении $1 : 1$ или $1 : 2$.
14. Ребро куба равно 1. Диагональ SS_1 куба служит осью вписанного в куб прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна $\frac{\sqrt{14}}{3}$; найти его объем.
15. Рассмотрим куб, две грани которого горизонтальны. Обозначим через O одну из вершин нижней грани, через OA и OB — два горизонтальных ребра, выходящих из O, через OC — вертикальное ребро, выходящее из O. Обозначим через Ox, Oy, Oz лучи, выходящие из O, на которых лежат соответственно отрезки OA, OB, OC. Длину ребра куба обозначим через a.
    1°. Рассмотрим плоскость Π, пересекающую Ox, Oy, Oz соответственно в точках L, M, N таких, что $OL = OM = ON = x$ (x — положительная переменная). Определить значения x, при которых плоскость Π пересекает куб. Охарактеризовать различные формы сечения.
    2°. Вычислить периметр p сечения в функции x и построить график этой функции.
    3°. Вычислить в функции x площадь сечения. Построить график этой функции.

§ 6. Многогранники

1. Найти площадь сечения, проведенного через концы трех ребер, выходящих из одной и той же вершины прямоугольного параллелепипеда, если длины этих ребер 2, 4 и 6.
2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 и 3, а его высота равна 2. Через диагональ параллелепипеда проведена плоскость, параллельная диагонали его основания. Найти площадь сечения.
3. Измерения прямоугольного параллелепипеда суть a, b и c. Найти площадь сечения, проходящего через середины его ребер.
4. Чему равна сумма всех плоских углов выпуклого многогранника, имеющего n вершин?
5. Определить объем додекаэдра, ребро которого равно a.
6. Определить полную поверхность многогранника, вершинами которого служат центры граней додекаэдра. Ребро додекаэдра равно a.
7. Отрезок PQ, длина которого c, параллелен сторонам AB и CD прямоугольника $ABCD$ и отстоит от плоскости этого прямоугольника на расстоянии h. Длины сторон прямоугольника $ABCD$ даны: $AB = a$, $BC = b$. Вычислить объем выпуклого многогранника, который получится, если точку P соединить с точками A и D, а точку Q — с точками C и B (клин).
8. Два прямоугольника — один со сторонами a и b, другой — со сторонами c и d — расположены в пространстве так, что плоскости их параллельны так же, как и соответственные стороны. Расстояние между этими плоскостями равно h. Вычислить объем призматоида, двумя гранями которого служат указанные прямоугольники, а четыре другие грани — трапеции, параллельные стороны которых являются сторонами этих прямоугольников.
9. Зал, имеющий в плане форму квадрата со стороной a, перекрыт крышей, построенной следующим образом: каждая пара смежных вершин квадрата, образующего потолок зала, соединена прямыми с серединой противолежащей стороны, и на получившемся треугольнике как на основании построена пирамида, высота которой h лежит на одной из ее боковых граней и проектируется в середину стороны квадрата. Расположенные выше других части этих граней образуют крышу. Найти объем чердака, т. е. пространства между потолком и крышей.

§ 7. Сфера и ее части; комбинации сфер с прямыми и плоскостями

1. Плоскость делит объем шара на части, равные 252 $см^3$ и 720 $см^3$. Найти высоту наибольшего сегмента.
2. Шаровой слой имеет основанием круги радиуса a и b ($a < b$). Поверхность пояса, ограничивающего слой, равна сумме площадей его оснований. Вычислить высоту слоя и радиус шара.
3. Шар радиуса 6 $дм$ и удельного веса 0,7 $г/см^3$ плавает в воде. Найти высоту выступающей из воды части этого шара.
4. Шар радиуса R рассечен двумя параллельными плоскостями так, что диаметр, перпендикулярный этим плоскостям, делится точками пересечения с ними на три равные части. Определить отношение объема шарового слоя к остальной части шара.
5. Площади параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от его центра, равны A и B, а расстояние между этими сечениями равно d. Определить площадь сечения шара, параллельного сечениям A и B и делящего пополам расстояние между ними.
6. Определить радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, если известно, что толщина линзы $2a$, полная поверхность ее s и диаметр линзы $2R$.
7. Ребро куба равно a. Найти радиус сферы, касающейся прямых, соединяющих середины непараллельных и непересекающихся ребер.

8. Ребро куба равно a. В этот куб вписана сфера. Найти длину хорды этой сферы, которую она высекает на прямой, соединяющей середины непараллельных и непересекающихся ребер куба.
9. Сфера радиуса r вписана в двугранный угол, равный 60°. Найти радиус сферы, касающейся граней угла и данной сферы, если прямая, проходящая через центры этих сфер, пересекает ребра данного двугранного угла под углом 45°.
10. В двугранный угол, равный 60°, вписаны две касающиеся друг друга сферы радиуса r. Найти радиус сферы, касающейся двух граней двугранного угла и обоих сфер.
11. В двугранный угол 120° вписаны две касательные друг к другу сферы радиуса r. Две сферы (радиуса x) касаются друг друга, каждая из них касается одной грани двугранного угла и обеих сфер радиуса r. Найти x.
12. В двугранный угол 120° вписана сфера радиуса r. Четыре сферы (радиуса x) расположены так, что центры их служат вершинами углов квадрата со стороной $2x$, причем каждая сфера касается одной грани угла и одного шара радиуса r. Найти x.
13. Четыре шара одного и того же радиуса касаются один другого. Каждого из этих четырех шаров касается внешним образом пятый шар и внутренним образом шестой шар. Найти отношение радиусов пятого и шестого шаров.
14. Три шара радиуса R касаются одной и той же плоскости, и каждый из них касается двух других. Найти радиус шара, касающегося плоскости и трех данных шаров.
15. Четыре одинаковых шара радиуса r лежат на плоскости и касаются друг друга так, что их центры образуют квадрат, сторона которого равна диаметру каждого шара. На них сверху положен шар того же радиуса. Вычислить расстояние от центра этого шара до плоскости, на которой лежат данные шары.
16. Центры двух равных шаров лежат на диагонали куба. Каждый шар касается трех граней куба, сходящихся в одном из концов указанной диагонали и другого шара. Найти отношение радиуса шара к ребру куба.
17. Четыре шара равных радиусов r расположены так, что каждый из них касается внешне трех других. Найти радиус шара, который внутренним образом касается всех четырех шаров.
18. Три сферы радиуса r_1 и три сферы радиуса r_2 расположены так, что каждая сфера касается двух сфер радиуса r_1, двух сфер радиуса r_2 и плоскости P. Найти $\frac{r_1}{r_2}$.
19. Шесть сфер радиуса r, центры которых служат вершинами правильного шестиугольника со стороной $2r$, внутренне касаются сферы радиуса R. Найти радиус сферы, касающейся всех семи сфер.
20. Две сферы радиуса r касаются друг друга; 8 шаров радиуса x, центры которых служат вершинами углов правильного восьмиугольника со стороной $2x$, касаются обоих шаров радиуса r. Найти x.
21. Три сферы радиуса r_1 и три сферы радиуса r_2 расположены так, что каждая сфера касается двух сфер радиуса r_1 и двух сфер радиуса r_2. Найти $r_1 : r_2$, если центры всех сфер находятся в одной плоскости.
22. Четыре сферы радиуса r_1 и четыре сферы радиуса r_2 расположены так, что каждая сфера касается трех сфер радиуса r_1 и трех сфер радиуса r_2. Найти $\frac{r_1}{r_2}$.

§ 8. Сфера, вписанная в многогранник и описанная вокруг него

1. В шар радиуса R вписана правильная треугольная призма. Определить объем этой призмы, если радиус окружности, описанной вокруг ее основания, равен r, $r < R$.
2. В пирамиде $SABC$ даны $AB = AC = 5$, $BC = 6$, высота пирамиды (S — вершина) проходит через середину стороны BC и равна 1. Вычислить

радиус шара, вписанного в эту пирамиду. Решить ту же задачу, если $BC = 8$.

3. Полная поверхность пирамиды равна 6 $см^2$, а объем шара, вписанного в эту пирамиду, равен 50 $см^3$. Вычислить объем пирамиды.

4. Шар касается четырех ребер куба, принадлежащих одной его грани, и касается грани, противоположной указанной. Найти отношение объема куба к объему этого шара.

5. В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей двух шаров.

6. В правильный тетраэдр вписан шар, касающийся граней тетраэдра. В шар вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объемов двух тетраэдров.

7. Найти радиус сферы, описанной вокруг правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 3, а высота равна 8.

8. Найти радиус сферы, описанной вокруг прямой призмы, основанием которой служит равнобедренный треугольник с основанием, равным 6, и высотой, равной 1; высота призмы равна 24.

9. Найти радиус сферы, описанной вокруг пирамиды, в основании которой находится правильный шестиугольник со стороной, равной 4; одно из ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно 6.

10. Найти радиус сферы, описанной вокруг треугольной пирамиды, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны и равны 6, 8 и 24.

11. Найти радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $SABC$, если $AB = AC = 30$, $BC = 48$, SA перпендикулярно плоскости основания и равно 120.

12. Прямая, соединяющая центры двух правильных шестиугольников, стороны которого равны 5 и 12, перпендикулярна их сторонам и равна 17. Найти радиус сферы, проходящей через вершины шестиугольников.

13. В тетраэдре $ABCD$ ребро $AB = 6$, ребро $CD = 8$, а каждое из остальных ребер равно $\sqrt{74}$. Найти радиус описанного шара.

14. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной вокруг его основания, равен r.

15. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 и 8. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1.

16. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15; вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5.

17. Найти радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, если $AB = CD = 6$, а каждое из остальных ребер равно $\sqrt{34}$.

18. Найти радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, если $AB = 10$, $CD = 18$, а каждое из остальных ребер равно $5\sqrt{10}$.

19. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $ABCD$, если $BD = BC = 15$, $CD = 18$, AB перпендикулярно плоскости BCD и равно 16.

20. Основание пирамиды $SABCD$ — ромб с диагоналями $AC = 8$ и $BD = 6$; высота пирамиды $H = 2$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду, если H совпадает: 1) с SA; 2) с SB.

21. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 и 8; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 1. В каждый из трехгранных углов при основании пирамиды вписана сфера радиуса r так, что каждая сфера касается двух соседних; найти радиус r сфер.

22. Шар касается всех 12 ребер куба. Вычислить отношение объема той части шара, которая находится внутри куба, к объему куба.

23. Определить плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают.

24. Ребро куба равно a; AB — его диагональ. Найти радиус сферы, касающейся трех граней, сходящихся в вершине A, и трех ребер, выходящих из вершины B. Найти также часть поверхности этой сферы, которая лежит вне куба.
25. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через концы ребра AA_1 и касающейся грани двугранного угла с ребром CC_1 (AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — параллельные ребра куба, $ABCD$ — его верхняя грань, $A_1B_1C_1D_1$ — нижняя).
26. Определить полную поверхность правильной треугольной пирамиды, зная поверхности s_1 вписанного и s_2 описанного шаров.
27. Высота правильного тетраэдра служит диаметром сферы, поверхность которой равна s. Вычислить площадь той части поверхности сферы, которая находится внутри данного тетраэдра.
28. В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и все его грани продолжены до пересечения со сферой. Линии пересечения граней тетраэдра со сферой вырезают на ее поверхности четыре сферических треугольника и несколько сферических двуугольников. Вычислить площадь каждого из этих двуугольников и треугольников.
29. В основании пирамиды с равными боковыми ребрами находится прямоугольник, стороны которого равны 30 *см* и 12 *см*. Высота пирамиды равна 8 *см*. В каждом из двугранных углов при основании пирамиды вписано по равному шару так, что каждый шар касается двух соседних; точки касания шаров к плоскости основания лежат на прямых, проходящих через середины его параллельных сторон. Найти радиусы шаров.
30. Дан правильный октаэдр. Радиус вписанного в него шара равен R. В центре одной из граней взята точка A. Вычислить сумму расстояний от A до каждой из остальных граней. Та же задача, если дан правильный додекаэдр.

§ 9. Цилиндр, конус, сфера в комбинации друг с другом, с плоскостями и многогранниками

1. Прямой круговой конус касается вписанного в него шара по параллели 60°. Найти объем конуса, если радиус шара равен 2.
2. Найти объем шара, вписанного в конус, у которого высота равна h, а радиус окружности, лежащей в основании, равен r.
3. Из полукруга радиуса r свернута боковая поверхность конуса. Найти объем этого конуса.
4. Вычислить радиус основания конуса, если объем его равен v, а полная поверхность равна s.
5. Шара касаются коническая поверхность и плоскость, перпендикулярная оси конической поверхности. Отношение полной поверхности получающегося при этом конуса к поверхности шара равно m. Найти отношение объемов этих тел, если $m < \frac{1}{2}$.
6. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.
7. Доказать, что объем конуса во столько раз больше объема вписанного в него шара, во сколько раз полная поверхность конуса больше поверхности шара.
8. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса, как 4 : 3. Найти угол при вершине конуса.
9. Радиус земли равен 6300 *км*. На какую высоту над горизонтом следует подняться, чтобы линия горизонта проходила на расстоянии 100 *км* от наблюдателя?
10. Отношение высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел. При каких q задача возможна?

11. Ось цилиндра, радиус основания которого r, совпадает с диаметром шара, радиус которого R. Высота цилиндра равна $2R$. Определить объем части цилиндра, находящейся вне шара, $r < R$.

12. Основание конуса, радиус основания которого равен R, совмещено с основанием прямого цилиндра, радиус которого r ($r < R$), так, что их центры совпадают. Определить объем части конуса, лежащей вне цилиндра, и объем части цилиндра, лежащей вне конуса, если цилиндр и конус имеют одинаковую высоту H.

13. Все вершины равнобедренного треугольника, основание которого равно 6, а высота 2, лежат на поверхности кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна основанию треугольника и образует с его плоскостью угол 60°. Найти радиус цилиндрической поверхности.

14. Треугольник со сторонами a, b и c вращается вокруг стороны a. Определить объем тела вращения.

15. Равнобочная трапеция с диагональю, перпендикулярной боковой стороне, и основаниями, равными a и b, вращается вокруг оси, совпадающей с боковой стороной трапеции. Определить полную поверхность тела вращения ($a < b$).

16. Доказать, что объем тела вращения, полученного вращением треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, но не пересекающей его, равен $2\pi ps$, где s — площадь треугольника, а p — расстояние от точки пересечения его медиан до оси вращения (частный случай теоремы Гюльдена).

17. На столе лежит круглое кольцо (тор), сечения которого вертикальными плоскостями, проходящими через центр кольца, суть круги радиуса r; центры этих кругов расположены на окружности радиуса R. На кольце лежит шар, касающийся стола в одной точке и касающийся кольца по некоторой окружности. Вычислить радиус шара и радиус окружности его прикосновения по кольцу.

18. Прямая, соединяющая середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, служит осью цилиндра, окружности оснований которого касаются граней тетраэдра в их центрах. Найти отношение объема цилиндра к объему тетраэдра.

19. Найти отношение объема цилиндра к объему куба, если высота цилиндра лежит на диагонали куба, каждая из окружностей, лежащих в основании цилиндра, касается трех граней куба, сходящихся в концах указанной диагонали куба, а осевое сечение цилиндра — квадрат.

20. Одна из вершин конуса совпадает с вершиной куба, ребро которого равно a. Окружность основания конуса касается трех граней куба, сходящихся в вершине, противоположной той, с которой совпадает вершина конуса. Образующая конуса составляет с его осью угол 30°. Найти радиус основания конуса.

21. Вершина конуса совпадает с вершиной куба; основание конуса касается трех граней куба, сходящихся в противоположной вершине куба. Осевое сечение конуса — правильный треугольник. Найти отношение объема конуса к объему куба.

22. Осевое сечение конуса — две взаимно-перпендикулярные прямые. На одной и той же образующей конуса взяты две точки A и B на расстоянии a друг от друга. На поверхности конуса взяты еще две точки C и D такие, что $ABCD$ — правильный тетраэдр. Найти расстояние от вершины конуса до ребра CD этого тетраэдра.

23. Сфера, поверхность которой равна s, касается ребер призматической поверхности, перпендикулярное сечение которой — правильный шестиугольник. Найти величину части призматической поверхности, заключенной внутри сферы.

24. Найти величину части поверхности правильного тетраэдра, заключенного внутри сферы, центр которой совпадает с центром тяжести тетраэдра, а радиус равен $\frac{a\sqrt{22}}{12}$, где a — ребро тетраэдра.

25. Найти величину части поверхности правильного тетраэдра, заключенной внутри сферы, если эта сфера проходит через вершины основания тетраэдра, причем расстояние центра сферы от вершины тетраэдра относится к его высоте, как 9 : 8. Ребро тетраэдра равно a.

26. Найти величину части поверхности призмы, заключенной внутри сферы, диаметром которой служит отрезок, соединяющий центры треугольных оснований, если сторона основания призмы равна a, а высота $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

27. Найти величину части поверхности прямоугольного параллелепипеда, заключенной внутри сферы, диаметром которой служит отрезок, соединяющий центры оснований этого параллелепипеда. Стороны основания равны 6 и 2, а высота параллелепипеда равна $\sqrt{52}$.

28. Диагонали четырехугольника взаимно-перпендикулярны и равны 24 и 28. В точке пересечения меньшая диагональ делится пополам, а большая — в отношении 5 : 9. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна меньшей диагонали четырехугольника, касается всех его сторон. Зная, что ось цилиндрической поверхности образует с плоскостью четырехугольника угол в 60°, найти радиус цилиндрической поверхности.

29. В тетраэдре $ABCD$ ребро $AB = 10$, ребро $CD = 18$, а каждое из остальных ребер равно $5\sqrt{10}$; найти радиус цилиндрической поверхности, касающейся пяти ребер тетраэдра, если ее ось параллельна: 1) CD; 2) AB.

30. В тетраэдре $ABCD$ ребро $AB = 12$, ребро $CD = 30$, а каждое из остальных ребер равно $5\sqrt{13}$. Две равные цилиндрические поверхности касаются друг друга, причем одна из них касается граней двугранного угла с ребром AB, а другая — граней двугранного угла с ребром CD; найти радиусы цилиндрических поверхностей.

31. Ребро куба равно 1. Диагональ SS_1 куба служит осью пересекающего куб цилиндра, каждая из окружностей оснований которого касается трех граней куба. Найти объем цилиндра, если

а) окружности оснований цилиндра пересекают прямые, соединяющие середины параллельных ребер куба, выходящих из различных концов SS_1;

б) окружности оснований цилиндра касаются граней куба в их центрах;

в) окружности оснований цилиндра пересекают остальные диагонали куба;

г) точки пересечения диагоналей куба с поверхностью цилиндра лежат на поверхности сферы.

32. В правильную четырехугольную пирамиду вписан равносторонний цилиндр, ось которого параллельна диагонали основания пирамиды. Найти радиус цилиндра, если

а) боковое ребро пирамиды равно 5, а ее высота равна 4;

б) боковое ребро пирамиды равно 5, а ее высота равна 3.

33. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями 18 и 10; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12. Найти радиусы вписанных в пирамиду равносторонних цилиндров, оси которых параллельны диагоналям ромба.

34. Найти радиус цилиндра, вписанного в пирамиду $SABC$, если он относится к высоте цилиндра, как 1 : 8, и если $AB = AC = 10$, $BC = 16$, а SA перпендикулярна плоскости ABC и равна 8.

35. В пирамиде $SABC$ ребра $AB = BC = 10$, $BC = 12$; высота пирамиды проходит через середину высоты AD основания и равна 4. В пирамиду вложен равносторонний цилиндр, одна из окружностей основания которого

касается граней двугранного угла BC, а другая — граней трехгранного угла A, причем ось цилиндра параллельна AD. Найти радиус.

36. Основанием пирамиды служит восьмиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, симметричный относительно диагоналей $A_1A_5 = 24$ и $A_3A_7 = 30$; A_2A_4 делит A_3A_7 в отношении 11 : 19, A_2A_8 делит A_1A_5 в отношении 1 : 23. Высота пирамиды проходит через середину A_1A_5 и равна 36. Найти объем вписанного в пирамиду цилиндра, ось которого параллельна A_1A_5, а каждая из окружностей основания касается основания пирамиды и четырех ее боковых граней.

37. Ребро куба равно 1. Его диагональ SS_1 служит осью пересекающего куб цилиндра, каждая из окружностей оснований которого касается трех граней куба. Дано отношение k высоты цилиндра к диагонали куба. Найти отношение q к объему цилиндра объема многогранника, вершинами которого служат точки пересечения с поверхностью цилиндра

а) остальных диагоналей куба;

б) прямых, соединяющих середины параллельных ребер куба, выходящих из S и S_1.

38. Объем правильного тетраэдра равен 1. Высота тетраэдра служит осью цилиндра, одна из окружностей основания которого лежит в плоскости основания тетраэдра, а другая — касается его боковых граней. Найти объем многогранника, вершинами которого служат точки пересечения с поверхностью цилиндра

а) остальных высот тетраэдра, если высота цилиндра относится к высоте тетраэдра, как 1) 2 : 3; 2) 1 : 3; 3) 3 : 10; 4) 1 : 4; 5) 1 : 6;

б) прямых, соединяющих середины скрещивающихся ребер тетраэдра, если высота цилиндра относится к высоте тетраэдра, как 1) 1 : 2; 2) 2 : 5; 3) 3 : 10; 4) 1 : 4; 5) 1 : 6.

39. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 48, высота пирамиды равна 8. Ось равностороннего цилиндра параллельна AC, а окружности его оснований пересекают: одна — ребра трехгранного угла A, другая — ребра трехгранного угла C. Найти радиус цилиндра.

40. Основанием пирамиды с равными двугранными углами служит параллелограмм, диагонали которого равны 6 и 4; высота пирамиды равна 1. Найти радиус равностороннего цилиндра, ось которого параллельна диагонали параллелограмма, а окружности оснований пересекают ребра трехгранных углов, вершинами которых служат концы этой диагонали.

41. Найти радиус r цилиндра, ось которого параллельна ребру BC пирамиды $SABC$, а окружности оснований пересекают ребра трехгранных углов B и C, если $AB = AC$, $BC = 12$, $\angle BAC = 90°$, $SA \perp$ пл. ABC, $SA = 8$, $h : r = 3 : 5$ (h — высота цилиндра).

42. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 1. Прямая, соединяющая середины AB и CD, служит осью цилиндра, каждая из окружностей оснований которого пересекает остальные ребра тетраэдра. Найти высоту цилиндра, если она относится к его радиусу, как 2 : 3.

43. Ребро куба равно 1. Найти радиус цилиндрической поверхности, проходящей через 6 вершин куба, если ее ось параллельна 1) диагонали куба, 2) диагонали его грани.

44. Основанием пирамиды с равными двугранными углами при основании служит параллелограмм, диагонали которого равны 30 и 24. Цилиндрическая поверхность, ось которой параллельна одному из боковых ребер пирамиды, проходит через все ее вершины. Найди длину бокового ребра.

45. Центры четырех сфер радиуса r служат вершинами углов квадрата со стороной $2r$. Найти радиус касательной к сферам цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна стороне квадрата и образует с его плоскостью угол 45°.

46. Центры трех сфер радиуса r служат вершинами равностороннего треугольника со стороной $2r$. Найти радиус касательной к сферам цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна стороне треугольника и образует с его плоскостью угол $\alpha = 30°$.

47. Центры четырех сфер радиуса r служат вершинами правильного тетраэдра с ребром $2r$. Найти радиус цилиндрической поверхности, касающейся всех сфер, если ее ось перпендикулярна прямой, соединяющей середины непересекающихся ребер тетраэдра, и образует с одним из этих ребер угол $\alpha = 45°$.

48. Центры пяти сфер радиуса r служат вершинами правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны между собой. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна стороне основания пирамиды, касается всех сфер. Найти 1) угол между высотой пирамиды и осью цилиндра, 2) радиус цилиндрической поверхности.

49. $ABCD$ — правильный тетраэдр, ребро которого равно a. Точки A и B служат вершинами двух равных касающихся друг друга конических поверхностей, оси которых — соответственно AD и BC. Найти радиусы сечений этих конических поверхностей, проведенных через точку касания перпендикулярно их осям.

50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. Точки A и B_1 служат вершинами двух равных касающихся друг друга конических поверхностей, осями которых служат прямые AC и B_1D_1. Найти радиусы сечений, перпендикулярных осям конусов и проходящих через точку касания.

51. Диагонали AD_1 и DC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a служат осями двух равных касающихся друг друга конических поверхностей. Найти радиусы сечений этих конических поверхностей плоскостями, перпендикулярными их осям и проходящими через точку касания, если вершины конических поверхностей совпадают с 1) D и D_1; 2) A и C_1; 3) C_1 и D_1.

52. Прямая, соединяющая середины ребер AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$, служит осью конуса, вершина которого совпадает с ее концом. Найти отношение объема конуса к объему тетраэдра, если окружность основания конуса касается
    а) двух граней тетраэдра в их центрах;
    б) четырех граней тетраэдра.

53. Ребро куба равно 1. Его диагональ SS_1 служит осью непересекающего куб конуса, вершина которого находится в точке S_1, а окружность основания касается трех граней куба. Найти объем конуса, если окружность его основания:
    а) пересекает прямые, соединяющие середины параллельных ребер куба, выходящих из S и S_1;
    б) касается трех граней куба в их центрах;
    в) касается всех граней куба;
    г) пересекает остальные диагонали куба.

54. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны ребро $AB = 2$, $\angle A_1AC = 45°$; диагональ A_1C пирамиды служит осью конуса, вершина которого находится в A_1, а окружность основания касается трех граней угла C, причем грани $ABCD$ в ее центре. Найти радиус r основания конуса.

55. Три равносторонних конуса, радиус основания каждого из которых равен r, расположены так, что каждые два имеют по одной общей образующей. Найти 1) объем пирамиды, вершинами которой служат общая вершина конусов и центры их оснований; 2) радиус конуса, имеющего с каждым из данных по одной общей образующей.

56. На плоскости, вокруг общей вершины, лежат шесть равных и последовательно касающихся друг друга конусов. На конусах лежит шар, касаясь

их боковых поверхностей в точках, находящихся на окружностях оснований. Найти отношение объема шара к сумме объемов конусов.

57. Прямая, соединяющая середины P и Q ребер AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$, служит осью конуса, вершина которого совпадает с серединой AB, а окружность основания касается граней двугранного угла с ребром CD. Зная, что высота тетраэдра равна 1, найти длину ее отрезка, заключенного внутри конуса, если его высота относится к PQ, как 1) 2 : 3, 2) 5 : 6, 3) 7 : 12, 4) 1 : 2, 5) 1 : 3, 6) 1 : 6.

58. Ребро куба равно 1, диагональ его SS_1 служит осью конуса, вершина которого находится в S, а окружность основания касается трех граней угла S_1. Найти длину заключенного внутри конуса отрезка одной из прямых, соединяющих центры параллельных граней куба, если высота конуса относится к диагонали куба, как
1) 11 : 12, 2) 5 : 6, 3) 3 : 4, 4) 7 : 12.

59. В тетраэдре $ABCD$ ребро $AB = 6$, а ребро $CD = 4$, каждое из остальных ребер равно 7. Найти угол между образующей и осью описанной вокруг тетраэдра конической поверхности, вершина которой находится на прямой, проходящей через середины AB и CD.

60. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD равны 4, каждое из остальных ребер равно 3. Найти угол между образующей и осью описанной вокруг тетраэдра конической поверхности, вершина которой совпадает с A.

61. Две равные конические поверхности имеют общую вершину, но не совпадают. Какое максимальное число общих образующих они могут иметь?

62. Вокруг правильной треугольной пирамиды $SABC$ описана коническая поверхность, вершина которой совпадает с A. Найти угол между образующей и осью конической поверхности, если
а) угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания ABC равен 30°;
б) боковое ребро пирамиды относится к стороне ее основания как 4 : 3.

63. а) На плоскости P стоит равносторонний конус, высота которого равна h. Каждый из трех равных шаров касается двух других, плоскости P и боковой поверхности конуса. Найти радиусы шаров.
б) Та же комбинация; найти высоту конуса, если радиусы шаров равны r.

64. а) На плоскости P стоит конус, радиус основания которого равен 3, а высота равна 4. Шесть равных шаров расположены так, что каждый касается двух соседних, плоскости P и боковой поверхности конуса. Найти радиусы шаров.
б) Решить ту же задачу, если радиус основания конуса равен 4, а его высота равна 3.

65. Два шара радиуса r_1 и два шара радиуса r_2 расположены так, что каждый касается трех других. Найти угол между образующей и осью, касательной к шарам конической поверхности, ось которой проходит через точки касания равных шаров друг к другу.

66. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1; его диагональ AC_1 служит осью конуса, вершина которого находится в C_1, а окружность основания пересекает ребра куба, выходящие из A; в каждый из его трехгранных углов A_1, B и D вписано по шару, касательному к боковой поверхности конуса. Найти радиусы шаров, если высота конуса относится к диагонали куба, как 46 : 51.

67. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1; его диагональ AC_1 служит осью конуса, вершина которого находится в A, а окружность основания касается трех граней угла C_1; высота конуса относится к диагонали куба, как 1 : 2. В каждый из его трехгранных углов A_1, B и D вписано по касательному шару к боковой поверхности конуса. Найти объем многогранника, вершинами которого служат центры шаров и точки их касания к конусу.

68. Вокруг конуса, высота которого равна 1, описана пирамида, основанием которой служит ромб с диагоналями 6 и 8. Найти радиусы касательных к боковой поверхности конуса шаров, вписанных в трехгранные углы при основании пирамиды.

69. Основанием прямой призмы служит ромб с диагоналями 6 и 8; высота призмы равна 1. Точка пересечения диагоналей верхнего ее основания служит вершиной конической поверхности, направляющая которой — окружность, вписанная в нижнее основание; в каждый из трехгранных углов призмы вписано по шару, касательному к конической поверхности. Найти радиусы шаров.

Глава XXIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

1. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к данному шару радиуса R три касательные, образующие трехгранный угол с тремя прямыми плоскими углами.
2. Найти геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную точку. Разобрать случаи, когда данная точка находится вне шара, на шаре или внутри него.
3. Найти геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную прямую. Разобрать случаи, когда прямая пересекает шар, касается его или не имеет с ним общих точек.
4. Найти геометрическое место проекций данной точки пространства на плоскости, проходящей через другую данную точку.
5. На сфере фиксирована точка O. Пусть M — произвольная точка сферы, а P — точка, лежащая на луче OM и такая, что $OM \cdot OP = \text{const}$. Найти геометрическое место точек P.
6. Найти геометрическое место середин отрезков, концы которых находятся на двух скрещивающихся взаимно-перпендикулярных прямых в пространстве.
7. Найти на плоскости p геометрическое место точек прикосновения сфер, проходящих через точки A и B пространства, не лежащие на плоскости p.
8. В пространстве дана плоскость γ и две точки: A и B. Найти геометрическое место точек P плоскости γ, для которых прямые AP и BP образуют с плоскостью γ равные углы.
9. На шаре диаметра d дана точка A. Через нее проведены хорды AB, AC, ..., на продолжении которых взяты точки B_1, C_1, ... такие, что $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1 = \ldots = d^2$. Найти геометрическое место точек B_1, C_1, ...
10. Найти геометрическое место точек пространства, расположенных в заданной плоскости и равноудаленных от двух заданных точек.
11. Даны два скрещивающихся отрезка. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих каждую точку первого отрезка с каждой точкой второго.
12. В пространстве дана точка A. Найти геометрическое место ее проекций на всевозможные прямые, лежащие в данной плоскости p и проходящие через некоторую данную точку B этой плоскости.
13. В пространстве задана сфера S_1. Пусть A и B — диаметрально противоположные точки этой сферы. На отрезке AB выбрана точка M, через которую произвольным образом проведена плоскость P. На отрезке перпендикуляра к этой плоскости в точке M, заключенном внутри сферы S_1, как на диаметре, построена сфера S_2. Пусть M_1 — произвольная точка пересечения плоскости P со сферой S_2. Найти поверхность, описываемую отрезком MM_1 при произвольном вращении плоскости P вокруг точки M.
14. В плоскости (P) фиксирована точка O. Переменная прямая (D) пересекает плоскость (P) в точке H. Обозначим через (Δ) те из прямых, пересекающих плоскость (P), для которых угол (OH, D) — прямой.

1°. Найти геометрическое место прямых (Δ) при условии, что H — фиксированная точка.

2°. Найти геометрическое место прямых (Δ), параллельных фиксированной прямой.

3°. Найти геометрическое место прямых (Δ), проходящих через фиксированную точку пространства, не лежащую на плоскости (P).

4°. Рассмотрим на перпендикуляре к плоскости (P), проходящем через O, точки A и B, симметрично расположенные относительно плоскости (P). Обозначим через A' и B' ортогональные проекции точек A и B на прямую (Δ). Доказать, что H — середина отрезка $A'B'$, и доказать, что $AA' = BB'$.

5°. Доказать, что прямые (D), каждая из которых находится на равных расстояниях от фиксированных точек A и B, определенных в 4°, суть прямые (Δ)..

15. Дан тетраэдр $ABCD$. Найти геометрическое место точек M таких, что

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2.$$

16. На скрещивающихся прямых X и Y даны два равных отрезка: $AB = CD$.

1°. а) Каково геометрическое место точек P таких, что $PA = PC$?

б) Каково геометрическое место точек P таких, что $PA = PC$ и $PB = PD$? Доказать, что это геометрическое место есть прямая линия (u).

в) Каково геометрическое место точек P таких, что $PA = PD$ и $PB = PC$? Доказать, что это геометрическое место есть прямая (v). Доказать, что прямые (u) и (v) имеют общую точку.

2°. Точка M описывает прямую X, а точка N описывает прямую Y так, что $MA = NC$ и $MB = ND$. Доказать, что плоскость-медиатриса MN проходит через (u). Пусть E — середина AB, F — середина CD. Доказать, что плоскость (uv) есть плоскость-медиатриса отрезка EF.

3°. Предположим теперь, что A, B, C, D — вершины правильного тетраэдра. Пусть E, F, G, H, K, L — соответственно середины AB, CD, AC, AD, BD, BC. Каковы будут в этом случае прямые (u) и (v)? Что можно сказать также про прямые EF, GK и HL?

17*. 1° Даны прямые D и D', не расположенные в одной плоскости. На этих прямых фиксируются точки: A — на прямой D и A' — на прямой D'. Пусть M — переменная точка D, а M' — переменная точка D', причем $AM = A'M'$. Каково геометрическое место середин отрезков MM'? Каково геометрическое место точек, делящих отрезок MM' в данном отношении k?

2°. Пусть A и A' выбраны на прямых D и D' так, что отрезок AA' перпендикулярен каждой из этих прямых. Доказать, что тогда MM' образует равные углы с D и D'. Доказать, что если общая длина отрезков AM и $A'M'$ изменяется, то плоскость, перпендикулярная отрезку MM' в его середине, проходит через одну или другую из фиксированных прямых G_1 и G_2, все точки которых находятся от D и от D' на равных расстояниях.

3°. На прямых D и D' рассматриваются точки B и B'. Найти геометрическое место точек, делящих отрезок BB' в данном отношении k при условии, что отрезок BB' остается параллельным данной плоскости P. Установить, что переменная прямая, пересекающая две фиксированные скрещивающиеся прямые и остающаяся параллельной данной плоскости, пересекает бесконечное множество других прямых, параллельных другой фиксированной плоскости.

18*. Пусть L — фиксированная точка, взятая на высоте AH фиксированного треугольника ABC, углы B и C которого острые; M — точка пересечения BL и AC, а N — точка пересечения CL и AB.

1°. Пусть S — точка пространства, не лежащая в плоскости треугольника ABC. Рассмотрим пирамиду с вершиной S и основанием $AMLN$. Доказать, что плоскость (R), проведенная через точку L параллельно плоскости SBC, пересекает плоскость SML по прямой, параллельной SB. Пусть A', M', N' — точки пересечения (R) с ребрами SA, SM, SN; доказать, что четырехугольник $A'M'L'N'$ — параллелограмм; обозначим его через (P).

2°. Пусть K — ортогональная проекция точки S на прямую BC. Положим $SK = k$, $HA = a$, $HB = b$, $HC = c$, $HL = l$ и обозначим через α двугранный угол между полуплоскостями BCA и BCS. Вычислить в функции k, b, c площадь параллелограмма (P_1), гомотетичного (P) в гомотетии $\left(A, \frac{\overline{AH}}{\overline{AL}}\right)$. Вывести отсюда площадь параллелограмма (P) и объем v пирамиды $SA'M'LN'$ в функции k, a, b, c, l и α.

3°. Каково геометрическое место точек S, для которых площадь параллелограмма (P) задана? Каково геометрическое место точек S, для которых объем v имеет данную величину?

4°. Найти геометрическое место точек S, для которых: (P) — прямоугольник, (P) — ромб, (P)—квадрат; каково в последнем случае геометрическое место вершин квадрата? Вычислить SB и SC в функции b и c. Вычислить стороны квадрата.

19*.** В пространстве фиксированы две различные точки O и H; будем называть тетраэдр ортоцентрическим, если его высоты пересекаются в одной точке. Обозначим через (T) всякий ортоцентрический тетраэдр, для которого точка O служит центром описанной сферы, а точка H (ортоцентр) — точкой пересечения высот.

Для решения ряда поставленных выше вопросов полезно установить следующие характеристические свойства ортоцентрического тетраэдра:

а) два любых скрещивающихся ребра ортогональны;

б) три отрезка, концами каждого из которых являются середины двух скрещивающихся ребер, имеют одинаковую длину;

в) каждая из высот тетраэдра проходит через ортоцентр противоположной грани.

Доказать, что для ортоцентрического тетраэдра три прямые, каждая из которых является общим перпендикуляром для двух скрещивающихся ребер, проходят через одну точку — ортоцентр (точку пересечения высот тетраэдра) и что центр тяжести ортоцентрического тетраэдра делит пополам отрезок OH. Обозначим вершины тетраэдра (T) буквами A, B, C, D, а его центр тяжести — буквой G.

1°. Построить тетраэдр (T), зная одну из его вершин D; исследовать. Найти для таких тетраэдров (T) (т. е. для тетраэдров (T) с фиксированной вершиной D) геометрическое место вершин и огибающую сторон грани ABC, противолежащей фиксированной вершине D. Определить область пространства, где расположены вершины всех тетраэдров (T). Построить тетраэдр (T), для которого грань ABC расположена в данной плоскости; исследовать. Найти для этих тетраэдров геометрическое место вершин и огибающую сторон треугольника ABC. Как можно охарактеризовать плоскости (Π), в которых лежат грани тетраэдра (T).

2°. Дана прямая (X). Построить тетраэдр (T), для которого одно из ребер лежит на прямой (X); исследовать. Как можно охарактеризовать прямые, на которых лежат ребра тетраэдра (T)?

Пусть в пространстве фиксирована точка S; определить множество прямых,

проходящих через точку S, таких, что на каждой из них можно поместить одно из ребер одного из тетраэдров (T).

Пусть задана плоскость (P); определить в этой плоскости прямые (X), т. е. прямые, на которых могут быть расположены ребра тетраэдра (T).

3°. Фиксирована точка S; рассматриваются те из тетраэдров (T), для каждого из которых одно из ребер лежит на произвольной прямой SX, проходящей через S; обозначим через Y прямую, на которой лежит противоположное ребро такого тетраэдра.

Изучить распределение прямых Y, соответствующих всем прямым SX, проходящим через S. Показать, что эти прямые Y ортогональны некоторой фиксированной прямой, и определить огибающую тех прямых Y, которые расположены в какой-нибудь плоскости, перпендикулярной этой фиксированной прямой. Построить тетраэдр (T), зная точки S и S', через которые проходят два его скрещивающихся ребра; исследовать.

Глава XXIV

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Доказать, что две плоскости, проходящие через концы трех ребер параллелепипеда, сходящихся в концах диагонали параллелепипеда, рассекают эту диагональ на три равные части.
2. Доказать, что если треугольник $A_1B_1C_1$ является ортогональной проекцией на основание правильной четырехугольной пирамиды треугольника ABC, расположенного на одной из боковых граней этой пирамиды, а треугольник $A_2B_2C_2$ — ортогональной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на другую боковую грань, то треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.
3. Доказать, что если одна из вершин треугольной пирамиды проектируется в ортоцентр противоположной грани, то и другие вершины этой пирамиды обладают этим свойством.
4. Дана треугольная пирамида. Доказать, что

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4},$$

где R — радиус шара, вписанного в пирамиду, а h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты пирамиды.

5. Доказать, что сумма расстояний от любой точки M, лежащей на одной из граней тетраэдра, до трех его других граней не зависит от положения точки M в выбранной грани.
6. Доказать, что квадрат площади треугольника равен сумме квадратов площадей его проекций на три взаимно-перпендикулярные плоскости.
7. Две треугольные пирамиды имеют при вершинах равные трехгранные углы. Доказать, что отношение их объемов равно отношению произведений их ребер, сходящихся в вершинах.
8. В пространстве дан четырехгранный угол и точка P. Доказать, что через точку P можно провести плоскость, которая рассекает угол по параллелограмму.
9. Дана пирамида $ABCD$. Строим новую пирамиду $A'B'C'D'$ следующим образом: точки A', B' определяем как симметричные точкам A, B относительно произвольной точки O', лежащей на прямой AB, а точки C', D' определяем как симметричные точкам C, D относительно произвольной точки O'', лежащей на прямой CD. Доказать, что объемы пирамид равны.
10. Доказать, что если плоскость, проходящая через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.
11. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости: (M) и (N). На линии их пересечения дана точка A. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости (M) и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью (N) образует та, которая перпендикулярна линии пересечения плоскостей (M) и (N).
12. В пространстве даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается от точки O_1, получается точка A_1; точка A_1 симметрично отра-

жается от точки O_2, получается точка A_2; точка A_2 симметрично отражается от точки O_3, получается точка A_3. Далее точка A_3 последовательно отражается относительно точек O_1, O_2 и O_3. Доказать, что последняя точка совпадает с точкой A.

13. Доказать, что существуют тетраэдры, высоты которых не пересекаются в одной точке.

14. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

15. Доказать, что если в треугольной пирамиде все грани равновелики, то все они равны между собой.

16. Доказать, что в треугольной пирамиде с прямым трехгранным углом при вершине квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней.

17. Доказать, что если цилиндр пересечь наклонной плоскостью, затем разрезать его вдоль образующей и развернуть в плоскость, то линия сечения развернется в синусоиду.

18. Доказать, что если сечение правильной четырехугольной пирамиды некоторой плоскостью представляет собой правильный треугольник, то боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы по 45°.

19. Дан трехгранный угол, все плоские углы которого прямые. На одном из ребер взята точка A, на другом — точка B, а на третьем — точка C. Обозначим вершину трехгранного угла буквой O, а проекцию этой вершины на плоскость ABC — буквой S. Доказать, что площадь треугольника AOB есть средняя пропорциональная между площадями треугольников ABC и ASB.

20. Доказать, что объем тетраэдра равен произведению площади прямоугольника со сторонами, соответственно равными двум противоположным ребрам, на одну шестую кратчайшего расстояния между этими ребрами.

21. В тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ три пары противоположных ребер: A_1A_2, A_3A_4; A_2A_3, A_4A_1; A_3A_1, A_2A_4 — соответственно равны a_1, a_4, a_2, a_5, a_3, a_6. Доказать, что сумма произведений двух пар противоположных ребер больше произведения ребер третьей пары, т. е.

$$a_i a_{i+3} + a_j a_{j+3} > a_k a_{k+3},$$

где i, j, k различны и принимают значения 1, 2, 3.

22. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

23. Доказать, что во всяком выпуклом многограннике есть, по крайней мере, или одна треугольная грань, или один трехгранный угол.

24. Доказать, что если в треугольной пирамиде один из плоских углов при вершине прямой, а высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания, то и прочие плоские углы при вершине — прямые.

25. Доказать, что не существует выпуклого многогранника, имеющего 7 ребер.

26. Доказать, что если телесный угол шарового сектора содержит α стерадиан и $\alpha < 2\pi$, а развертка конической поверхности этого сектора имеет центральный угол β радиан, то

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\pi + \frac{1}{2}\beta} - \sqrt{\pi - \frac{1}{2}\beta}.$$

27. Доказать, что сечение параллелепипеда плоскостью не может оказаться правильным пятиугольником.

28. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Доказать, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

29. Доказать, что полная поверхность конуса больше поверхности вписанного в него шара.

30. Боковая (т. е. сферическая) поверхность сферического сегмента (не являющегося полушаром) равна боковой (сферической) поверхности некоторого полушара. Доказать, что объем полушара больше объема сферического сегмента.

31. Три грани трехгранного угла со взаимно-перпендикулярными ребрами пересекают шар по трем кругам. Доказать, что сумма площадей этих кругов не изменится, если повернуть этот трехгранный угол вокруг его вершины так, чтобы его грани не перестали пересекать шар.

32. Вокруг правильного тетраэдра описана сфера. Доказать, что расстояния m, n, p, q любой точки сферы от вершин тетраэдра удовлетворяют соотношению

$$m^4+n^4+p^4+q^4=m^2n^2+m^2p^2+m^2q^2+n^2p^2+n^2q^2+p^2q^2.$$

33. Даны точки A и B. Рассмотрим точки C и D такие, что треугольники CAB и DAB — равнобедренные (основание AB) и расположены в разных плоскостях.

1°. Доказать, что точки C и D лежат в плоскости, перпендикулярной AB. Что можно сказать про точку K, в которой эта плоскость пересекает AB? Доказать, что $CD \perp AB$. Что дают предыдущие результаты, если плоскости CAB и DAB совпадают? Во всем дальнейшем будем предполагать, что эти плоскости различны.

2°. Доказать, что высота треугольника ACD, выходящая из A, и высота треугольника BCD, выходящая из B, пересекаются в точке H. Доказать, что $AH=BH$.

3°. Пусть $HK=d$, $AB=2a$, $HC=x$. Вычислить CA. Какое соотношение должно существовать между a и d для того, чтобы плоскости ACD и BCD были перпендикулярны?

4°. Пусть D' — ортогональная проекция D на плоскость ABC. Установить следующее: а) точка D' лежит на прямой CK; б) для того, чтобы DB была ортогональна AC, необходимо и достаточно, чтобы точка D' была ортоцентром треугольника ABC. Доказать, что в этом случае $DA \perp BC$.

Приложение. Пусть даны равнобедренный треугольник CAB (AB — основание) и прямая Cx, перпендикулярная AB. Доказать, что, вообще говоря, на прямой Cx существует, и притом только одна, точка такая, что прямые AC и DB ортогональны. Каков здесь исключительный случай?

34. В пространстве даны две фиксированные скрещивающиеся и взаимно-перпендикулярные прямые: $x'x$ и $y'y$; OI — их общий перпендикуляр (точка O на $x'x$, точка I на $y'y$). Пусть $OI=d$. На прямой $x'x$ по одну и по другую сторону от точки O берут точки A и B такие, что $OA=a$, $OB=b$. На прямой $y'y$ берется точка M.

1°. Пусть $d^2=ab$. Доказать, что тогда при любом выборе точки M на $y'y$ прямые AM и BI будут ортогональны. Вычислить в функции только a и b объем тетраэдра $MIAB$, если $IM=d$.

2°. Теперь предположим, что $d^2 \neq ab$. Обозначим через B' ортогональную проекцию точки B на плоскость, проходящую через точку A и прямую $y'y$. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки B на AM при условии, что точка M описывает прямую $y'y$.

3°. Доказать, что каждой точке M прямой $y'y$ соответствует точка N той же прямой такая, что $AM \perp NB$. Как построить эту точку? Доказать, что M — ортоцентр треугольника $AB'N$, и использовать этот результат для доказательства того, что $AN \perp BM$ (можно, например, доказать, что AN перпендикулярна плоскости BMB').

4°. Доказать, что произведение $IM \cdot IN$ сохраняет постоянную величину, если точка M описывает прямую $y'y$. Вычислить это произведение

в функции a, b и d. Предположим, что $d^2 = ab$; что можно сказать о положении точки N в двух следующих случаях?

а) M занимает на прямой $y'y$ положение, отличное от I;

б) M совпадает с I.

35. Скрещивающиеся оси $X'AX$ и $Y'BY$ пространства образуют между собой угол 60° (угол между их положительными направлениями). Пусть AB—отрезок, концы которого лежат соответственно на двух данных осях и который перпендикулярен к ним обеим. Пусть O — точка, лежащая на отрезке AB и такая, что $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}} = -2$. Пусть $OA = 3a$. Точка M описывает ось $X'X$, а точка N — ось $Y'Y$ так, что все время $AM = 2BN = 2x$.

1°. Доказать, что $MN \perp Y'Y$.

2°. Доказать, что плоскость (P), перпендикулярная в точке O к AB, пересекает плоскость OMN по фиксированной прямой (D), и определить направление прямой (D) относительно данных осей.

3°. Доказать, что и обратно — всякая плоскость, проходящая через прямую (D) и неперпендикулярная AB, пересекает оси $X'X$ и $Y'Y$ соответственно в точках M и N таких, что $AM = 2BN$ и что $MN \perp Y'Y$.

4°. Определить x так, чтобы $\angle MON = 90°$, и показать, что на AB существует тогда еще одна точка O' такая, что $\angle MO'N = 90°$.

5°. Пусть $\angle MON = 90°$. Найти синус угла прямой AB с плоскостью MON.

36. Пусть $ABCD$ — тетраэдр.

1°. Доказать, что если $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$, то и $AD \perp BC$ (такой тетраэдр будем называть ортоцентрическим); доказать, что высоты ортоцентрического тетраэдра пересекаются в одной точке и что основания высот тетраэдра проходят через ортоцентры граней, на которые они опущены. Обратно, если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то тетраэдр ортоцентрический.

2°. Доказать, что если для тетраэдра $ABCD$ имеют место соотношения

$$DB \cdot DC \cdot \cos \angle BDC = DC \cdot DA \cdot \cos \angle CDA = DA \cdot DB \cdot \cos \angle ADB,$$

то тетраэдр ортоцентрический.

Доказать, что в ортоцентрическом тетраэдре все плоские углы любого трехгранного угла или все острые, или все тупые; показать, что из четырех трехгранных углов ортоцентрического тетраэдра имеется не более чем один угол, в котором сходятся три плоских тупых угла.

3°. Рассмотрим прямые $A'DA''$, $B'DB''$, $C'DC''$, проходящие через одну точку D' и не лежащие в одной плоскости; предположим, что среди них нет ни одной пары взаимно-перпендикулярных прямых (DA' и DA'' — взаимно противоположные лучи прямой $A'DA''$; то же относительно DB' и DB'', DC' и DC''). Рассмотрим всевозможные трехгранные углы, которые образованы одним из лучей DA', DA'', одним из лучей DB', DB'' и одним из лучей DC', DC''. Доказать, что только для двух из этих углов все плоские углы, прилежащие к вершине D, будут острыми (или все тупыми).

4°. Возьмем на прямой $A'DA''$ произвольную точку A, отличную от D. Пусть плоскость, проходящая через A ортогонально $B'DB''$, пересекает $C'DC''$ в точке C, а плоскость, проходящая через A перпендикулярно $C'DC''$, пересекает $B'DB''$ в точке B. Доказать, что $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр.

5°. Доказать, что для того, чтобы тетраэдр $ABCD$ был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + CB^2.$$

37. Даны окружности (C) и (C'), расположенные в двух параллельных плоскостях, причем прямая, соединяющая их центры O и O', перпендикулярна этим плоскостям. Радиусы этих окружностей соответственно равны $R = 15$ *см* и $R' = 20$ *см*, а расстояние между их центрами равно 25 *см*. Пусть точка A описывает окружность (C), а точка A' — окружность (C'), притом так, что радиусы OA и OA' все время остаются взаимно-перпендикулярными.

1°. Доказать, что длина отрезка AA' и угол, образуемый этим отрезком с прямой OO', постоянны. Найти длину отрезка AA' и величину указанного угла.

2°. Построить общий перпендикуляр к прямым AA' и OO'. Пусть этот общий перпендикуляр пересекает OO' в точке I, а AA' — в точке K. Доказать, что точка I остается фиксированной, а расстояние IK постоянно, если A и A' изменяются так, как указано выше.

3°. Из 2° следует, что точка K принадлежит окружности (Γ); определить ее плоскость, центр и радиус. Обратно, доказать, что через каждую точку K окружности (Γ) проходят две и только две прямые: (D) и (Δ), каждая из которых пересекает обе окружности: (C) и (C'). Доказать, что радиусы окружностей (C) и (C'), идущие в точки пересечения прямой (D) с окружностями (C) и (C'), взаимно-перпендикулярны (то же и для Δ) и что сами прямые (D) и (Δ) также взаимно-перпендикулярны.

38. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, ребра DA, DB и DC которого попарно взаимно-перпендикулярны. Пусть O — центр описанной вокруг него сферы, а радиус этой сферы равен R.

1°. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны расстояниям от трех вершин этого тетраэдра (в их числе есть точка D) до диаметра сферы (O), проходящего через четвертую вершину.

2°. Доказать, что если s — площадь этого треугольника, а a, b, c — длины ребер DA, DB и DC, то $abc = 4Rs$.

39. $ABCD$ — тетраэдр. Обозначим через (P) плоскость, параллельную двум противоположным его ребрам AC и BD, и через E — точку, в которой (P) пересекает AB (рассмотреть только тот случай, когда точка E лежит между A и B).

1°. Доказать, что сечение тетраэдра плоскостью (P) есть параллелограмм.

2°. Предполагая, что точка E — середина AB, доказать, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке — середине каждого из них.

3°. Можно ли выбрать E так, чтобы соответствующее сечение было ромбом? Вычислить в этом случае AE через длины ребер тетраэдра.

4°. Для какого тетраэдра сечение будет прямоугольником? Доказать, что если сечение плоскостью, параллельной AC и BD, есть прямоугольник, сечение плоскостью, параллельной AD и CB, тоже прямоугольник, то и сечение плоскостью, параллельной AB и CD, также прямоугольник.

40.** Пусть O — центр сферы, описанной вокруг тетраэдра $(T) \equiv ABCD$; G, G_a, G_b, G_c, G_d — соответственно центры тяжести тетраэдра (T) и граней BCD, CDA, DAB и ABC; (ω) — сфера $\left(\text{радиуса } \frac{R}{3}\right)$, описанная вокруг тетраэдра $G_aG_bG_cG_d$* (сфера двенадцати точек). Обозначим через O_d, G'_d, ω_d, H_d

* Так как тетраэдры (T) и $G_aG_bG_cG_d$ соответствуют друг другу в гомотетии $(G, -3)$, то центр ω сферы определяется соотношением $\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$.

ортогональные проекции точек O, G, ω, H на грань ABC, а через D' — точку, в которой высота DH_d пересекает сферу (O).

1°. Доказать, что $\omega\omega_d = \frac{1}{6} DD'$.

2°. Доказать, что если сфера (ω) касается одной из граней тетраэдра (T), то ребра, идущие к вершинам этой грани, равны между собой и обратно.

3°. Если сфера (ω) касается двух граней тетраэдра (T), то 5 ребер равны между собой и обратно.

4°. Если сфера (ω) касается трех граней, то она касается и четвертой грани и обратно; тетраэдр (T) при этом правильный.

5°. Доказать, что тетраэдры A_1BCD, B_1CAD, C_1DAB, D_1ABC, имеющие одной из своих вершин точку A_1, B_1, C_1, D_1, симметричную одной из точек A', B', C', D' относительно BCD, CDA, DAB и ABC, имеют одну и ту же сферу двенадцати точек.

6°. Доказать, что отношение $\frac{R}{r}$, где R — радиус описанной вокруг тетраэдра сферы, r — радиус сферы, вписанной в этот тетраэдр, минимально в том случае, если тетраэдр правильный.

41. Пусть A, B, C, D — вершины тетраэдра, a, b, c, d — их ортогональные проекции на противоположные грани.

1°. Доказать, что если точка a расположена на высоте BH треугольника BCD, то $AB \perp CD$.

2°. Сформулировать и доказать обратное положение.

3°. Доказать, что если точка a совпадает с ортоцентром треугольника BCD, то точки b, c, d являются соответственно ортоцентрами граней ACD, ABD и ABC.

42. В плоскости (P) задана окружность (C) диаметра $AB = 2R$; на перпендикуляре AS к плоскости (P) отложен отрезок $AS = 2R$. Точка M описывает окружность (C). Обозначим через H основание высоты, опущенной из A на сторону SM треугольника ASM.

1°. Доказать, что плоскости SAM и SBM перпендикулярны и что $AH \perp SB$. Каково геометрическое место прямых AH? Доказать, что геометрическое место точек H есть окружность; определить плоскость, в которой она расположена, ее центр и радиус.

2°. Обозначим через x угол BAM. Вычислить в функции R и x расстояние y от точки H до плоскости (P). Определить x так, чтобы y имел данную величину d. Исследовать. Дать геометрическое решение.

3°. Выразить y в функции R и $X = \cos 2x$. Изучить полученную функцию при условии, что точка M описывает полуокружность (C) диаметра AB и построить график этой функции.

43. Дан тетраэдр $ABCD$ с основанием BDC, причем ребро AD перпендикулярно плоскости BDC. Пусть DE — высота треугольника DBC, опущенная на сторону BC.

1°. Доказать, что плоскость ADE перпендикулярна плоскости ABC.

2°. Пусть BF — высота треугольника ABC, опущенная на сторону AC, а BK — высота треугольника DBC, опущенная на сторону DC.

а) Доказать, что плоскость BFK перпендикулярна плоскости ABC.

б) Доказать, что ортоцентр H треугольника ABC есть ортогональная проекция на плоскость ABC ортоцентра N треугольника BCD.

3°. Предположим, что грань BCD фиксирована, а вершина A тетраэдра описывает полупрямую Dx, перпендикулярную основанию DBC. Найти геометрическое место точек H и F.

4°. Доказать, что шесть точек: C, E, H, F, K, N лежат на одной и той же сфере. Найти положение ее центра и радиус.

Глава XXV

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Можно ли треугольную пирамиду пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб?
2. Можно ли пересечь треугольную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм?
3. Куб опирается вершиной о плоскость так, что его диагональ, выходящая из этой вершины, перпендикулярна плоскости. Он освещен пучком лучей, параллельных указанной диагонали. Найти тень, отбрасываемую кубом на плоскость.
4. На поверхности куба найти все точки, равноудаленные от концов одной из его диагоналей.
5. В пространстве даны четыре точки: A, B, C, D; EF—общий перпендикуляр к отрезкам AB и CD и $AB \perp CD$. Зная, что $AE = EB = m$, $CF = FD = n$, $EF = k$, найти в пространстве точку O такую, чтобы сумма расстояний от нее до точек A, B, C и D достигала минимума.
6. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма ребер внутренней пирамиды больше суммы ребер внешней?
7. Определить радиус биллиардного шара, производя построение циркулем и линейкой на самом шаре и на листе бумаги.
8. Через некоторую точку пространства проведены 4 плоскости; никакие 3 из них не пересекаются по одной прямой. На сколько частей разбивается пространство?
9. На поверхности твердого шара дан полюс N. Построить при помощи одного циркуля другой его полюс S.
10. На поверхности твердого шара дана дуга, являющаяся частью параллели. Построить полюс, пользуясь одним циркулем.
11. На сколько частей могут разделить пространство n плоскостей?
12. Прямая l пересекает две произвольные непараллельные плоскости: α и β. Исследовать, сколько плоскостей можно провести через прямую l так, чтобы они пересекали данные плоскости по двум взаимно-перпендикулярным прямым.
13. На поверхности куба найти 3 точки, из которых его диагональ видна под наименьшим углом.
14. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных точек?
15. Четыре плоскости, пересекаясь между собой, образуют произвольный тетраэдр. Сколько существует сфер, каждая из которых касается всех четырех плоскостей?
16. Требуется изготовить тетраэдр из треугольного листа жести, не разрезая его на части. При каких условиях это можно сделать? Вычислить сумму косинусов линейных углов всех двугранных углов тетраэдра.
17. Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две оси вращения (осью вращения называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол, не равный 2π, тело совмещается само с собой).
18. Дана часть шаровой поверхности; при помощи одного только циркуля определить диаметр шара.

19. Прямоугольный параллелепипед с ребрами 8 *см*, 8 *см*, 27 *см* разрезать на 4 части, из которых можно было бы сложить куб.

20. Из произвольной точки P, лежащей внутри треугольника ABC, являющегося гранью тетраэдра $ABCD$, проводятся прямые, параллельные ребрам DA, DB и DC, которые пересекают грани BCD, CDA и DAB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. При каком положении точки P объем тетраэдра $PA_1B_1C_1$ будет наибольшим?

21. Даны две скрещивающиеся и взаимно-перпендикулярные прямые (D) и (Δ); AB — их общий перпендикуляр [точка A лежит на прямой (D), точка B — на прямой (Δ)].

1°. Доказать, что все грани тетраэдра $ABMN$ — прямоугольные треугольники.

2°. Определить центр сферы, описанной вокруг $ABMN$. Найти геометрическое место середин отрезков MN, если M и N описывают соответственно прямые (D) и (Δ).

3°. Пусть длина отрезка MN — постоянная. Найти геометрическое место его середины.

4°. Дано $AB = d$, $AM = BN = n$. Найти объем тетраэдра $ABMN$.

22. Пирамида $SABCD$ имеет основанием квадрат $ABCD$ со стороной a. Длина ребра SA равна $a\sqrt{3}$, и оно перпендикулярно плоскости $ABCD$. Плоскость, проходящая через AD, пересекает SB в точке B', а SC — в точке C'.

1°. Доказать, что четырехугольник $AB'C'D$ есть равнобочная трапеция. Найти геометрическое место точек M пересечения диагоналей DB' и AC' при условии, что B' описывает отрезок SB.

2°. Полагая $SB' = x$, вычислить

$$y = AB'^2 + B'C'^2 + C'D^2.$$

3°. Изучить изменение y как функции от x и представить эту зависимость графически при условии, что B' описывает отрезок SB.

4°. Определить x при условии, что $y = l^2$, где l — данное число. Исследовать существование и число решений.

5°. Дать геометрическое решение предыдущего вопроса и получить на этом пути результаты предыдущего исследования.

23. Диагональ BD ромба $ABCD$ параллельна плоскости H и имеет длину $2a$; его другая диагональ $AC = 4a$ образует с плоскостью H угол 60°; при этом ромб $ABCD$ расположен по одну сторону от плоскости H. Расстояние от точки A — ближайшей вершины ромба к плоскости H — до этой плоскости равно a. Пусть A', B', C', D' — ортогональные проекции точек A, B, C, D на плоскость H. Многогранник $ABCDA'B'C'D'$ обозначим через (T).

1°. Доказать, что $A'B'C'D'$ — квадрат и что (T) имеет плоскость симметрии. Найти угол между плоскостями, проходящими через DB и AC и перпендикулярными плоскости H.

2°. Вычислить длины ребер, полную поверхность и объем (T).

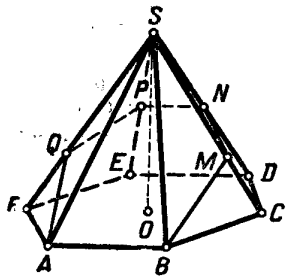
3°. Пересечем (T) плоскостью, которая пересекает все его ребра AA', BB', CC', DD'. Доказать, что это сечение — параллелограмм. При каком условии это сечение будет прямоугольником, ромбом, квадратом?

4°. Вычислить площадь s прямоугольника, полученного в результате сечения (T) плоскостью, параллельной BD и перпендикулярной H, в функции расстояния x секущей плоскости от вертикального ребра AA'. Построить график функции $s = f(x)$.

24. В плоскости задан правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O и стороной a. На прямой, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку O, берется точка S такая, что $OS = \frac{3}{2}a$. Рассмотрим пира-

миду $SABCDEF$. Проведем через сторону AB основания произвольную плоскость, пересекающую пирамиду по шестиугольнику $ABMNPQA$ (черт. 76).

1°. Доказать, что это сечение обладает плоскостью симметрии, что диагональ MQ и сторона NP остаются параллельными фиксированной прямой и что прямые BM, MN, PQA и QA проходят через фиксированные точки.



Черт. 76.

2°. Найти геометрическое место точек пересечения прямых MN и PQ; BM и AQ; BM и PQ; AQ и MN; AQ и PN; BM и PN.

3°. Пусть точки P и N являются серединами ребер SF и SC. Доказать, что Q и M отстоят тогда от S на $\frac{2}{3}$ длины соответствующих ребер. Вычислить в этом случае площадь сечения $ABMNPQ$ и объем пирамиды $SABMNPQ$.

25. Четыре отрезка: AB, BC, CD и DA, которыми соединяются четыре точки: A, B, C, D, не расположенные в одной плоскости, образуют пространственный четырехугольник.

1°. Сколько имеется различных четырехугольников, имеющих заданные вершины A, B, C, D, но взятые в разном порядке? Какова общая часть двух таких различных четырехугольников?

2°. Изучить для каждого из них четырехугольник $MNPQ$, имеющий вершинами середины сторон. Какова общая часть двух таких четырехугольников?

3°. Изучить фигуру, образованную отрезками, соединяющими середины противоположных сторон и середины диагоналей пространственного четырехугольника $ABCD$.

4°. Пусть вершины A, B, C фиксированы, а D описывает прямую (Δ). Каково геометрическое место центров параллелограммов $MNPQ$?

26. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ (углы A и D прямые), причем $AB = AD = a$, $DC = 2a$. На перпендикуляре в точке D к плоскости этой трапеции откладывают длину $DS = a$.

1°. Доказать, не применяя теорему Пифагора, что четыре боковые грани пирамиды $SABCD$ — прямоугольные треугольники.

2°. Пусть E — середина DC, а I — середина BC; вычислить расстояние DI. Определить положение центра и радиус сферы, проходящей через точки S, B, E, C.

3°. Пусть M — точка отрезка SA, определяемая расстоянием $SM = x$. Плоскость CDM пересекает ребро SB в точке P. К какому типу принадлежит четырехугольник $DMPC$? Выразить в функции a и x объем пирамиды $SDMPC$ и определить x так, чтобы этот объем был равен $\frac{5a^3}{24}$.

27*. Рассмотрим геликоидальное преобразование (H), полученное в результате поступательного перемещения h в направлении оси (Δ) и поворота на угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ вокруг той же оси (Δ).

1°. Построить образ M' точки M в преобразовании (H). Построить точки M и M', зная середину I отрезка MM'.

2°. Назовем прямыми (D) прямые пространства, проходящие через точку M и ее образ M' в преобразовании (H). Обозначим через d кратчайшее расстояние между (D) и (Δ) и через α острый угол между (D) и (Δ). Найти соотношение между α, d и h. Показать, что прямые (D), проходящие через фиксированную точку A, принадлежат круговому конусу, и определить сечения этого конуса плоскостью,

перпендикулярной (Δ). Показать, что всякая прямая (D) пересекает свой образ.

3°. Пусть точка M зачерчивает плоскость (P); найти геометрическое место середин I отрезков MM' и геометрическое место точек M плоскости (P), образы M' которых также лежат в плоскости (P) Найти огибающую прямых (D) плоскости (P).

28.** Предметом этой задачи будет изучение некоторых свойств многогранника, построение которого дается во второй ее части; алгебраический вопрос первой части позволяет решить ряд вопросов, относящихся к дальнейшему.

I. Рассмотрим функцию

$$y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}, \qquad (1)$$

где α и β — постоянные, причем $\alpha > 1$, $\beta > 0$.

1°. Сколько существует положительных или нулевых значений для x, удовлетворяющих соотношению (1), если для y задано какое-нибудь положительное значение?

2°. Будем рассматривать функцию (1) лишь для положительных значений x. Доказать, что при этом $y > 0$ и что y принимает минимальное значение, равное

$$\sqrt{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}};$$

при каком значении x функция y принимает это минимальное значение?

II. В плоскости P задан правильный шестиугольник, последовательные вершины которого A, B, C, D, E, F; длина стороны равна a. Через центр O этого многоугольника проводится полупрямая OZ, перпендикулярная его плоскости; затем через полупрямые, проходящие не через последовательные вершины A, C, E шестиугольника, проводятся полупрямые, также перпендикулярные плоскости шестиугольника и идущие в том же направлении, что и OZ. На этих полупрямых откладываются отрезки AA', CC', EE' одной и той же длины l. Пусть I — точка полупрямой OZ такая, что $OI = l + x$, где x — число, заключенное между нулем и l, т. е. $0 < x < l$. Три плоскости: $IA'C'$, $IC'E'$, $IE'A'$, пересекают полупрямые, перпендикулярные плоскости (P), проходящие через три другие вершины B, D, F шестиугольника и идущие в том же направлении, что и OZ в точках B', D', F'.

1°. Доказать, что точки B', D', F' расположены с той же стороны плоскости (P), что и точки I, A', C', E'. Найти длину отрезков BB', DD', FF'.

Точку I соединяют с точками A', C', E' и строят шесть отрезков: $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$, $F'A'$. Что представляет собою четырехугольник $IA'B'C'$?

Данный шестиугольник $ABCDEF$, шесть прямоугольных трапеций: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$, $FAA'F'$, и три четырехугольника: $IA'B'C'$, $IC'D'E'$, $IE'F'A'$, являются десятью гранями выпуклого многогранника, который мы обозначим через (Δ). Построить ортогональные проекции (Δ), принимая последовательно в качестве плоскостей проекции: плоскость (P) шестиугольника, затем плоскость $BB'EE'$, затем плоскость, проходящую через середину отрезка BC, перпендикулярно к нему (на проекциях начертить проекцию ребер и вершин).

2°. Обозначим через φ угол $BB'A'$, а через θ — угол $A'IC'$. Вычислить в функции a, l и x: длину каждой диагонали четырехугольника $IA'B'C'$; косинусы углов φ и θ; объем v многогранника (Δ), его полную поверхность s и сумму L длин всех его ребер.

3°. Предполагая, что a и l фиксированы и что $l > \frac{a}{2\sqrt{2}}$, показать, что полная поверхность s и сумма L, рассматриваемые как функции от x, обладают минимумами для одного и того же значения x, заключенного между 0 и l; вычислить значения этих минимумов, которые мы обозначим s_0 и L_0. Доказать, что это те значения x, при которых углы φ и θ равны между собой.

Пусть (Δ_0) — многогранник, соответствующий этому частному значению x; ребра (Δ_0), выходящие, с одной стороны, из каждой вершины I, B', D', F' и, с другой стороны, — из каждой вершины A', C', E', определяют соответственно четыре трехгранных угла и три многогранных (с четырьмя гранями). Сравнить грани этих трехгранных и многогранных углов; каковы косинусы углов граней? Вычислить двугранные углы этих трехгранных и четырехгранных углов.

III. Рассмотрим снова многогранник (Δ), определенный в начале раздела II, зависящий от трех параметров: a, l, x. Будем говорить, что сфера вписана в многогранник (Δ), если она расположена внутри (Δ) и касается всех десяти его граней. В третьей части этой задачи предлагается изучить многогранники типа (Δ), имеющие вписанную сферу. Решения, геометрические и алгебраические, предлагаемых ниже вопросов 1^0 и 2^0 могут быть даны в произвольном порядке; для одного и другого решения полезно использовать сечение фигуры плоскостью $BB'EE'$ и заметить, что если сфера вписана в многогранник (Δ), то ее центр лежит непременно на полупрямой OZ, а радиус равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1°. Предполагая заданными a и l, дать геометрическое построение многогранника (Δ), обладающего вписанной сферой; исследовать.

2°. Предполагая заданными a и l, определить x так, чтобы (Δ) обладал вписанной сферой; исследовать (разумеется, нужно сравнить результаты исследований).

3°. Доказать, что для всякого многогранника (Δ), обладающего вписанной сферой, отношение его объема v к полной поверхности s равно одной трети радиуса вписанной сферы. В конце раздела II был определен многогранник (Δ_0), зависящий только от a и l; доказать, что можно определить l в функции a так, что и он будет обладать вписанной сферой. Подсчитать для этого многогранника (Δ_0) отношение его полной поверхности к поверхности вписанной в него сферы и отношение его объема к объему этой сферы. Доказать, что ошибка, которую мы допустили, принимая это отношение равным $\frac{3}{2}$, не превосходит 0,003.

Глава XXVI

ПЛАНИМЕТРИЯ СО СТЕРЕОМЕТРИЕЙ

1***. Будем называть линией (C) всякую линию, которая может быть получена перспективой окружности. Свойства линий (C) требуется изучить, не опираясь на то, что линии (C) — конические сечения; не следует использовать теоремы о конических сечениях, вводить мнимых точек, а также не следует опираться на инволюцию. Применение же бесконечно удаленных точек и прямых допускается. Напомним определение перспективы: пусть даны плоскость (P) на конечном расстоянии и точка S, которая может быть и бесконечно удаленной; перспективой называется преобразование, которое всякой точке M_1 пространства ставит в соответствие точку M пересечения прямой SM_1 с плоскостью (P).

Введем следующие обозначения: (P) — плоскость, в которой лежит изучаемая линия (C); (Γ_1) — окружность, перспектива которой есть линия (C); (P_1) — плоскость, в которой лежит окружность (Γ_1); S — точка, не лежащая ни на плоскости (P), ни на плоскости (P_1). Исключая тривиальный случай, когда плоскости (P) и (P_1) параллельны, обозначим через (Π) плоскость, параллельную (P), проведенную через точку S и через прямую (G_1), по которой пересекаются плоскости (P_1) и (Π).

I. Фиксированы следующие элементы: пересекающиеся плоскости (P) и (P_1), точка S, не лежащая ни на одной из них, и окружность (Γ_1), лежащая в плоскости (P_1).

1°. Изучить число точек пересечения прямой (D) плоскости (P) с перспективой (C) окружности (Γ_1). Найти геометрическое место середин параллельных хорд линии (C).

2°. Найти центр симметрии и оси симметрии линии (C). Исследовать число этих осей симметрии и существование точек пересечения осей симметрии с линией (C); в выводах должны фигурировать лишь данные элементы (P_1), S (Γ_1) и прямая (G_1).

Доказать, что если линия (C) имеет более двух осей симметрии, то эта линия — окружность (Γ).

3°. Даны в плоскости (P_1) точка M_1 и ее поляра (D_1) относительно (Γ_1); говорят, что их перспективы M и (D) являются полюсом и полярой относительно линии (C). Должно быть оправдано это соглашение или нет? В случае положительного утверждения дать оправдание этому определению.

II. Даны окружность (Γ) и на ней шесть различных точек: A, A', B, B', C, C'. Доказать теорему Паскаля: если P, Q, R — соответственно точки пересечения прямых BC' и CB', CA' и AC', AB' и BA', то они лежат на одной прямой.

1°. Доказать эту теорему в каждом из следующих частных случаев:

а) $AB' \| BA'$ и, следовательно, R — бесконечно удаленная точка в направлении AB'. Доказать, что точки C C', P, Q лежат, вообще говоря, на одной окружности и что $PQ \| AB'$.

б) AB' и BA' — два диаметра (Γ). Пусть M и N — соответственно точки, в которых пересекаются прямые AC', CB' и CA', BC'; доказать, что точки M, N, C, C' лежат, вообще говоря, на одной

окружности (Γ'), ортогональной (Γ), и что точки P, Q, R лежат на одной прямой.

2°. Доказать теорему Паскаля, используя в общем случае перспективу, переводящую данную фигуру в одну из изученных выше.

III. Цель этой части — показать, что через всякие пять точек, лежащих в одной плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, проходит линия (C).

1°. Даны плоскость (P) и четыре точки: A, B, D, E, лежащие в этой плоскости, такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Пусть γ — точка пересечения AB и DE (γ может быть и бесконечно удаленной точкой). Обозначим через γ' и γ'' точки, гармонически сопряженные с точкой γ относительно A, B и D, E.

Пусть (Γ_1) — произвольная окружность, проходящая через точки D и E; плоскость (P_1), в которой лежит эта окружность, отлична от плоскости (P); обозначим через I полюс прямой DE относительно (Γ_1). Доказать, что если взять за точку S какую-нибудь точку пересечения конуса [с вершиной A и основанием (Γ_1)] с плоскостью (I, $\gamma'\gamma''$) [за исключением точек, расположенных в плоскостях (P) и (P_1)], то перспектива (Γ_1) на плоскость (P) из точки S пройдет через точку B.

2°. Снова возьмем предыдущие данные и добавим в плоскости (P) точку C так, чтобы никакие три из пяти точек A, B, C, D, E не лежали на одной прямой. Обозначим через β точку пересечения AC и DE, через β' и β'' — точки, гармонически сопряженные с точкой β относительно A, C и D, E, и, наконец, через I — точку пересечения $\gamma'\gamma''$ и $\beta'\beta''$. Доказать, что если прямая II_1 пересекает конус с вершиной A и основанием (Γ_1) и если S — одна из этих точек пересечения, то перспектива (Γ_1) на плоскость (P) из точки S пройдет через точки A, B, C, D, E.

Доказать, что необходимое и достаточное условие существования точки S заключается в том, что прямая AI пересекает отрезок DE.

3°. Применяя предыдущие обозначения, будем теперь точку I обозначать через $I(A, DE)$, для того чтобы подчеркнуть ее происхождение. Соединяя в другом порядке пять данных точек, можно получить другие точки, аналогичные точке I.

Доказать, что точки $I(B, AC)$ и $I(C, AB)$ лежат на одной прямой с точкой A и что точка, гармонически сопряженная с точкой A относительно этих двух точек, обладает особым свойством (можно, например, произвести подходящую перспективу). Доказать, наконец, что прямые, соединяющие точки A и $I(A, BC)$; B и $I(B, CA)$; C и $I(C, AB)$, проходят через одну точку.

4°. Пять предыдущих точек остаются данными. Доказать, что если взять три окружности, проходящие соответственно через B и C, через C и A, через A и B, плоскости, которые отличны от плоскости (P), то среди этих трех окружностей найдется хотя бы одна, подходящая перспектива которой переведет ее в линию (C) плоскости (P), проходящую через точки A, B, C, D, E.

IV. Из предыдущих исследований вывести, что

1°. Через всякие 5 точек, лежащих в одной плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, проходит линия (C) и притом только одна.

2°. Перспектива линии (C) есть снова линия (C).

V. Доказать, что если дана линия (C), то существует конус вращения, проходящий через эту линию, т. е. что линия (C) есть коническое сечение. Следует выбрать хорду DE линии (C), перпендикулярную одной из осей симметрии линии (C), и отыскать вершину S в плоскости-медиатрисе отрезка DE.

2**. I. Обозначения. Пусть (C) — линия второго порядка, F — ее фокус. Назовем параметром p половину фокальной хорды этой линии, т. е. половину хорды этой линии, перпендикулярной ее фокальной оси.

Назовем модулем λ расстояние от фокуса F до соответствующей ему директрисы. Заметим, что эксцентриситет равен отношению параметра к модулю: $e = \frac{p}{\lambda}$. Теперь назовем базисными элементами линии (C):

а) базисной окружностью — окружность с центром F и радиусом $2p$;

б) базисной прямой — прямую (L), симметричную директрисе (Δ) относительно фокуса F.

Заметим, что фокус F не лежит на базисной прямой и что линия (C) полностью определяется базисной окружностью и базисной прямой.

Во всем дальнейшем предполагается, что линия второго порядка задана своей базисной окружностью и базисной прямой.

II. а) Как построить точки и касательные к линии (C)?

б) Как построить касательные к линии (C), параллельные данной прямой?

III. Преобразование (H). а) Пусть даны точка F и прямая (L), не проходящая через эту точку. Пусть m — точка, не расположенная ни на прямой (L), ни на прямой (L_0), проходящей через F параллельно (L). Прямая Fm пересекает (L) в точке μ, и существует точка M, гармонически сопряженная с точкой μ относительно пары m, F. Назовем преобразованием (H) преобразование, которое точке m ставит в соответствие точку M. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать лишь одно это преобразование (H); точки m и M будем называть гомологичными. Образ M точки m можно построить так: пусть m_0 — точка прямой (L_0), отличная от F; M_1 — середина Fm_0; тогда M есть точка пересечения Fm и TM_0, где T — точка пересечения с (L) прямой m_0m; в самом деле, пучок TL, TM_0; TF, Tm_0 гармонический.

б) Частные случаи и различные замечания. Установить следующие факты:

1°. Образ m_0 точки прямой (L_0) есть середина M_0 отрезка Fm_0.

2°. Если точка m стремится к F или к μ [μ — точка (L)], то ее образ M стремится соответственно к F или μ, так что F — двойная точка преобразования (H), так же, как и любая точка прямой (L).

3°. Образы бесконечно удаленных точек плоскости суть точки прямой (Δ), симметричной (L) относительно F.

4°. Точки, образами которых служат бесконечно удаленные точки плоскости, суть точки прямой (δ), симметричной (L_0) относительно (L).

5°. Всякая прямая, проходящая через F, инвариантна.

6°. Всякая прямая (d), пересекающая (L) и (L_0) соответственно в точках T и m_0 (отличной от F), переходит в прямую (D), проходящую через точку T и середину M_0 отрезка Fm_0, так как образ M любой точки m прямой (d) на основании а) должен лежать на этой прямой (D).

7°. Всякая прямая (d), параллельная (L) [но не совпадающая ни с (L), ни с (L_0)], переходит в прямую (D), гармонически сопряженную с (L) относительно пары (d, L_0).

8°. На основании предыдущего, образом прямой (d) является всегда прямая (D); (d) и (D) будем называть гомологичными прямыми; две такие прямые совпадают, если они проходят через F; в противном случае они или пересекаются на (L), или параллельны (L). Наконец, очевидно, что если четыре точки прямой (d) образуют гармоническую четверку, то их образы на прямой (D) также образуют гармоническую четверку.

IV. Мы теперь видим, что линия (C), определенная базисной окружностью (c) и базисной прямой (L), есть образ (c) в преобразовании (H), определенном точкой F (центром c) и прямой (L). Соответствующие точки (c) и (C)

лежат на прямых, проходящих через точку F. Если на окружности (c) взять точки m_1 и m_2, то образом прямой m_1m_2 будет прямая M_1M_2, где M_1 и M_2 — образы точек m_1 и m_2; в частности, образом касательной к окружности (c) в точке (C) будет касательная к линии (C) в точке M, соответствующей точке m в преобразовании (H). Отсюда следует, что некоторые построения, относящиеся к линии (C), можно выполнить, проведя их предварительно для окружности (c). Рассмотреть два примера.

а) Пересечение с прямой линии (C), заданной базисной окружностью и прямой.

б) Касательные, проведенные из точки P к линии (C).

V. Как определить тип линии (C), если заданы (c) и (L)?

VI. Построить касательные к гиперболе (C), параллельные данной прямой. Исследовать. Рассмотреть частные случаи. Как построить центр гиперболы? Как построить центр линии (C)?

VII. Пусть F — вершина конуса вращения; (Π_1) — плоскость, проходящая через S перпендикулярно его оси; (Π') — секущая плоскость, пересекающая ось в точке (Ω); (Δ_1) — прямая пересечения (Π_1) и (Π'); (C') — сечение конуса; (C_1) — проекция (C') на плоскость (Π_1); (Π) — плоскость, симметричная (Π_1) относительно Ω; (Δ) — проекция (Δ_1) на (Π); (L) — прямая, симметричная (Δ_1) относительно Ω; F — точка пересечения оси конуса с плоскостью (Π); (c) — окружность пересечения конуса с плоскостью (Π); (C) — проекция (C') [или (C_1)] на плоскость (Π). Дать, исходя из этого построения, пространственную интерпретацию преобразованию (H) и предыдущим построениям.

3*. I. Планиметрия.** На плоскости фиксированы две точки: F и F' $(FF'=2c)$; O — середина отрезка FF', (Δ) — его медиатриса; пусть a — положительное число, отличное от c; положим $e=\frac{c}{a}$.

Рассмотрим переменную точку прямой (Δ); обозначим через (Γ) окружность с центром A и радиусом $\frac{AF}{e}$; через B — точку, сопряженную с F относительно (Γ) на диаметре AF.

1°. Доказать, что радикальная ось двух окружностей (Γ) и (Γ') с центрами A и A' есть медиатриса отрезка BB', где точки B и B' соответствуют точкам A и A' так, как указано выше.

2°. Будем считать, что точка A фиксирована, а точка A' стремится к точке A. Пусть при этом указанная радикальная ось стремится к некоторой прямой (D) и пусть I — полюс прямой (D) относительно (Γ); изучить окружность с диаметром AI. Как построить точку A, если задана прямая (D) и если при этом она пересекает (Γ) в двух точках: M и M'?

Доказать, что геометрическое место точек M и M' есть линия второго порядка (E) с фокусами F и F', касающаяся (Γ) в точках M и M'.

3°. Окружность (Γ) фиксируется так же, как и соответствующая прямая (D). Пусть P — переменная точка (E), а H — ее ортогональная проекция на (D). Доказать, что степень точки P относительно (Γ) пропорциональна PH^2. Чему равен коэффициент λ пропорциональности? Будет ли (E) геометрическим местом точек P, обладающих этим свойством?

Рассмотрим семейство $C(P)$ окружностей с центром P на (E) и радиусом $\sqrt{\lambda}PH$ в случае, если $\lambda>0$. Найти на (E) центры окружностей этого семейства, проходящих через заданную точку Q плоскости; исследовать.

II. **Стереометрия.** Пусть (D) — фиксированная прямая, а k — фиксированное положительное число. Обозначим через P какую-нибудь точку пространства, через H — ее проекцию на (D), через $S(P)$ — сферу с центром P и радиусом $k \cdot PH$.

A. Предположим, что точка P перемещается по фиксированной прямой (Δ), не лежащей в одной плоскости с прямой (D) и не ортогональной (D). Пусть K — точка прямой PH, сопряженная с точкой H по отношению к сфере $S(P)$.

1°. Каково геометрическое место точек K, если P описывает (Δ)?

2°. Пусть P и P_1 — два различных положения точки P на (Δ). Доказать, что радикальная плоскость $S(P)$ и $S(P_1)$ содержит прямую, общую плоскостям-медиатрисам отрезков HH_1 и KK_1.

3°. Доказать, что для частного значения $k = k_0$ радикальные плоскости $S(P)$ и $S(P_1)$ фиксированы, каковы бы ни были положения P и P_1 точек на прямой (Δ); вычислить k_0 в функции угла α между (D) и (Δ). Вывести отсюда что для $k = k_0$ сферы $S(P)$ вписаны в поверхность вращения (Σ), и определить меридиан этой поверхности; исследовать.

B. Фиксированы прямая (D) и число k, большее 1; фиксирована сфера (V) с центром V и радиусом ρ, не пересекающая (D), а также фиксирована какая-нибудь плоскость (R), проходящая через (D). Предлагается изучить сферы $S(P)$, касающиеся (V), центр P которых есть какая-нибудь точка P плоскости (R).

1°. Каково геометрическое место точек S прикосновения $S(P)$ и (V)? Установить существование двух семейств Φ и Φ' сфер $S(P)$, отвечающих указанным условиям; каково геометрическое место (L) центров сфер одного из этих семейств Φ и Φ'?

2°. Доказать, что сферы Φ ортогональны бесконечному множеству сфер (Ω); пусть (Ω_0) есть сфера этого семейства, центр A которой лежит в плоскости (R); вычислить отношение расстояний от центра O геометрического места (L) до (D) и до A.

3°. Доказать, что сферы Φ касаются семейства сфер (W). Каково геометрическое место центров сфер (W)? Рассмотреть частные случаи двух сфер (W), центры которых лежат в плоскости (R). Доказать, что сферы (W) и (Ω) имеют общую радикальную ось. Теперь будем считать фиксированными: (D), число $k > 1$, плоскость (R), проходящую через (D), в которой перемещается точка P, сферу (Ω). Обозначим через (v) окружность, по которой (R) пересекает (Ω), а через A — центр этой окружности; радиус этой окружности обозначим через r; допускается также и то, что (R) и (Ω) не пересекаются.

Доказать, что существуют сферы $S(P)$ с центрами на (R), ортогональные (Ω). Изучить существование и построение сферы (V), ортогональной (Ω) и касающейся всех сфер $S(P)$.

Если (V) существует, то определить, по отношению к фиксированным образам, геометрическое место (P) и огибающую больших кругов сфер $S(P)$, лежащих в плоскости (R); установить положение центра геометрического места точек P относительно точки A и точки I, в которой пересекается плоскость (R) с прямой, сопряженной или взаимной с прямой (D) относительно (Ω).

Что можно сказать про геометрическое место точек P (на основании результатов, полученных в первой части) в случае, если сфера (V) не существует?

C. Фиксированные элементы следующие: прямая (D), число $k > 1$, сфера (V) с центром V и радиусом ρ, не пересекающая (D), и еще сфера (T), с радиусом ρ' и центром T. Через (R) обозначим переменную плоскость, проходящую через (D).

1°. Доказать (без исследования), что в плоскости (R) существуют, вообще говоря, две пары точек P_1 и P_2 — центры сфер $S(P)$, касающихся (V)

... и ортогональных (T); каждая пара этих точек может быть определена как точки пересечения гиперболы с прямой (G), проходящей через фиксированную точку σ прямой (D).

2°. Если плоскость (R) вращается вокруг (D), прямая (G) описывает конус, основание которого в плоскости, перпендикулярной (D), есть линия второго порядка, фокус которой лежит на прямой (D); этому фокусу соответствует директриса, лежащая в радикальной плоскости сфер (V) и (T). Вычислить эксцентриситет этой линии.

3°. При каком условии геометрическое место центров P состоит из двух линий второго порядка, расположенных в плоскостях (R_1) и (R_2), проходящих через (D)? Как построить тогда плоскости (R_1) и (R_2)?

4*.** Все фигуры, о которых говорится в условиях частей I, II, III и IV, предполагаются расположенными в одной плоскости.

I. Обозначим через X и Y две различные фиксированные и не взаимно-перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке C. Со всякой прямой (Δ) ассоциируются две прямые: (Δ_1) и (Δ_2), симметричные прямой (Δ) относительно прямых X и Y, а также точка R пересечения этих прямых (Δ_1) и (Δ_2). Всякая ли точка плоскости может быть ассоциирована таким образом с некоторой прямой (Δ)?

Доказать, что, какова бы ни была прямая (Δ), точка R, с ней ассоциированная, гомологична ортогональной проекции N точки C на (Δ) в подобии второго рода, которое требуется определить как произведение симметрии в некоторой оси на положительную гомотетию с центром на этой оси.

Пусть (r) — прямая, гомологичная (Δ) в этом подобии; каково положение (r) отиосительно (Δ_1) и (Δ_2)? Каково геометрическое место точек R, ассоциированных с прямыми (Δ), проходящими через данную точку F, или параллельных данному направлению? Какова огибающая прямой (Δ) такой, что точка R, ей ассоциированная, описывает или данную прямую, или данную окружность?

II. Дан фиксированный треугольник ABC (не прямоугольный) с вершинами A, B, C; пусть O — центр окружности (O), описанной вокруг этого треугольника, H — его ортоцентр и A', B', C' — основания высот AH, BH и CH. Со всякой прямой (Δ) ассоциируются прямые (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), соответственно симметричные ей относительно прямых BC, CA и AB так же, как точки P, Q, R, в которых пересекаются соответственно (Δ_2) и (Δ_3), (Δ_3) и (Δ_1), (Δ_1) и (Δ_2). Точки P, Q, R, вообще говоря, — вершины некоторого треугольника (T).

1°. Обозначим через (δ) всякую прямую (Δ) такую, что точки P, Q и R, с ней ассоциированные, совпадают с одной точкой M. Определить огибающую прямых (δ) и геометрическое место ассоциированных с ней точек M.

2°. Каковы геометрические места точек P, Q, R, ассоциированных с прямыми (Δ), параллельными данному направлению? Какое отношение существует между треугольниками (T), ассоциированными с этими параллельными между собою прямыми (Δ)?

Точкам P, Q, R, ассоциированным с какой-либо прямой (Δ), не проходящей ни через одну из точек A, B, C, ставят в соответствие прямые (p), (q), (r), соответственно перпендикулярные прямым AP, BQ и CR в точках P, Q и R, так же, как точки P', Q', R', в которых пересекаются соответственно (q) и (r), (r) и (p), (p) и (q). Точки P', Q', R', вообще говоря, — вершины треугольника (T'), который будем называть треугольником, присоединенным к треугольнику (T), образованному точками P, Q, R. Каковы геометрические места точек P', Q', R', соответствующих прямым (Δ), параллельным данному направлению?

3°. Доказать, что какова бы ни была прямая (Δ) [отличная от прямой (δ)], треугольник (T), ассоциированный с ней, подобен треугольнику $A'B'C'$.

Каков род подобия (1-й или 2-й), которое треугольник (T) переводит в треугольник $A'B'C'$? Во что переходит в этом подобии треугольник (T'), присоединенный к (T)?

Вычислить в различных случаях углы треугольника (T) в функции углов треугольника ABC. Может ли быть треугольник (T) равнобедренным, если треугольник ABC неравнобедренный?

4°. Дана фиксированная точка F. Определить огибающую сторон и геометрические места вершин P, Q, R треугольников (T), ассоциированных всем прямым, проходящим через F, так же, как огибающие сторон и геометрические места вершин P', Q', R' треугольников (T'), присоединенных к (T). Уточнить положение этих различных геометрических мест относительно окружности (O).

III. Дан фиксированный треугольник с вершинами P, Q, R. Пусть (Δ) — какая-нибудь прямая. Требуется определить треугольник ABC такой, что данный треугольник PQR будет треугольником (T), ассоциированным с прямой (Δ) в смысле определения части II. Сколько решений имеет эта задача? Вычислить углы треугольника ABC в функции углов треугольника PQR.

Доказать, что треугольники ABC, соответствующие указанным образом всем прямым (Δ) плоскости, можно разделить на четыре семейства таких, что все треугольники одного семейства будут переводиться друг в друга подобием 1-го рода. Каковы геометрические места вершин A, B, C треугольников каждого из этих семейств при условии, что прямая (Δ) принимает все возможные положения? Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников ABC одного семейства, проходят через одну точку.

Каковы огибающие сторон треугольников ABC, соответствующих всем прямым (Δ), проходящим через данную точку F?

IV. Даны три окружности: (α), (β), (γ), попарно пересекающиеся и имеющие одну общую точку M_0; обозначим через I, J, K точки пересечения (отличные от M_0) соответственно (β) и (γ), (γ) и (α), (α) и (β).

1°. Доказать, что существует бесконечное множество треугольников, вершины P, Q, R которых описывают соответственно окружности (α), (β) и (γ), а стороны QR, RP и PQ проходят соответственно через I, J, K.

2°. Определить треугольник ABC такой, что все такие треугольники (см. 1°) PQR могут быть рассматриваемы как треугольники (T), ассоциированные (по отношению к треугольнику ABC) к различным прямым (Δ), проходящим через некоторую точку F, положение которой также требуется определить. Сколько решений имеет эта задача?

V. Даны две фиксированные плоскости X и Y, пересекающиеся по прямой (C). Со всякой плоскостью (Π) ассоциируются плоскости (Π_1) и (Π_2), симметричные относительно X и Y.

При каком условии плоскости (Π_1) и (Π_2) пересекаются? Пусть (R) — прямая, по которой они пересекаются; назовем ее ассоциированной с плоскостью (Π).

При каком условии данная прямая может быть рассматриваема как ассоциированная с некоторой плоскостью (Π)?

1°. Пусть (L) — фиксированная прямая, не ортогональная (C), которая не лежит в одной плоскости с (C). Доказать, что прямые (R), ассоциированные плоскостям (Π), проходящим через (L), пересекают три фиксированные прямые, которые требуется определить; могут ли быть прямые (R) охарактеризованы этим их свойством? Каково сечение поверхности, образованной геометрическим местом прямых (R), плоскостью, перпендикулярной (C)? Рассмотреть два случая: когда плоскости X и Y перпендикулярны и когда они не перпендикулярны.

2°. Даны три параллельные прямые: (A), (B), (C), определяющие попарно три различные плоскости: (B, C), (C, A) и (A, B). Со всякой пло-

скостью (Π) ассоциируются плоскости (Π_1), (Π_2), (Π_3), симметричные ей относительно плоскостей (B, C), (C, A) и (A, B). Изучить в зависимости от положения плоскости (Π) пересечение трех плоскостей: (Π_1), (Π_2), (Π_3). При каком условии эти плоскости имеют и притом только одну общую точку M? Каково геометрическое место (S) этих точек M? На геометрическом месте (S) взята точка M; соответствует ли она одной плоскости (Π) или нескольким?

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Глава XXVII

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Тождественные преобразования

П. 1. Тождества

Доказать следующие тождества:

1. $\sin a \cos(b-a) + \cos a \sin(b-a) = \sin b.$

2. $\cos(a+b) + \sin(a-b) = (\cos a + \sin a)(\cos b - \sin b).$

3. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}.$

4. $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \dfrac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0.$

5. $\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} + \dfrac{\sin(b-c)}{\sin b \sin c} + \dfrac{\sin(c-a)}{\sin c \sin a} = 0.$

6. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$

7. $\sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) + \sin(c+a)\sin(c-a) = 0.$

8. $\sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b-c)\sin(b+c) +$
$+ \sin(c+d)\sin(c-d) + \sin(d+a)\sin(d-a) = 0.$

9. $\sin^2(a+b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(a+b) =$
$= \sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b).$

10. $\sin(60^\circ - a)\cos(30^\circ + a) + \cos(60^\circ - a)\sin(30^\circ + a) = 1.$

11. $\cos^2 a + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + a\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - a\right) = \dfrac{3}{2}.$

12. $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}.$

13. $\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a - \sin^2 b}.$

14. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{ctg}^2 a \operatorname{ctg}^2 b - 1} = \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b.$

15. $\operatorname{tg}(a-b)(1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b) + \operatorname{tg}(b-c)(1+\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c) + \operatorname{tg}(c-a)(1+\operatorname{tg} c \operatorname{tg} a) = 0.$

16. $\cos(a-b)\cos(a+b) - \sin(a-b)\sin(a+b) = \cos 2a.$

17. $\dfrac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a} = \dfrac{1-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a}.$

18. $\cos^6 a - \sin^6 a = \cos 2a\left(1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2a\right).$

19. $\cos^6 a + \sin^6 a = \cos^2 2a + \dfrac{1}{4}\sin^2 2a.$

20. $$\frac{\cos^2 2a - 4\cos^2 a + 3}{\cos^2 2a + 4\cos^2 a - 1} = \operatorname{tg}^4 a.$$

21. $$\frac{(1+\operatorname{tg} a)^2 - 2\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \sin 2a + \cos 2a.$$

22. $$\operatorname{tg} 2a + \sec 2a = \operatorname{tg}(45^\circ + a).$$

23. $$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sin 2a.$$

24. $$1 + \cos 2a \cos 2b = 2\sin^2 a \sin^2 b + 2\cos^2 a \cos^2 b$$

25. $$\cos^2(a-b) - \sin^2(a+b) = \cos 2a \cos 2b.$$

26. $$\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b.$$

27. $$\cos^2(a+b) - \sin^2 a = \cos b \cos(2a+b).$$

28. $$\operatorname{tg}^2(a+b) + \operatorname{tg}^2(a-b) = \frac{2(\sin^2 2a + \sin^2 2b)}{(\cos 2a + \cos 2b)^2}.$$

29. $$\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10} = 0.$$

30. $$\frac{\cos 3a}{\cos a} = 2\cos 2a - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}.$$

31. $$\sin a \sin 3a = \sin^2 2a - \sin^2 a.$$

32. $$\cos a \cos 3a = \cos^2 2a - \sin^2 a.$$

33. $$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 2a}.$$

34. $$\frac{\sin 3a + \sin^3 a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \operatorname{ctg} a.$$

35. $$4\sin^3 a \cos 3a + 4\cos^3 a \sin 3a = 3\sin 4a.$$

36. $$32\sin^2 a \cos^4 a = 2 + \cos 2a - 2\cos 4a - \cos 6a.$$

37. $$\sin 6a = 2\sin a(16\cos^5 a - 16\cos^3 a + 3\cos a).$$

38. $$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 = 8\sin^4 a - 8\sin^2 a + 1.$$

39. $$\operatorname{tg} 4a = \frac{4\operatorname{tg} a(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{1 - 6\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^4 a}.$$

40. $$\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} 2a + 4\operatorname{tg} 4a + 8\operatorname{ctg} 8a = \operatorname{ctg} a.$$

41. $$\sin a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{ctg}\frac{a}{2}}.$$

42. $$\frac{1+\sin a}{1+\cos a} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)^2.$$

43. $$\frac{\cos a}{1+\cos a} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\right).$$

44. $$\frac{\sec a + \operatorname{tg} a}{\sec a - \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right).$$

45. $$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^4\frac{a}{4} + 4\operatorname{tg}^3\frac{a}{4} - 6\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2\frac{a}{4} - 4\operatorname{tg}\frac{a}{4} + \operatorname{tg} a = 0.$$

46. $$\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{4}\cos(a+b+c) + \frac{1}{4}\cos(b+c-a) +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos(a+c-b) + \frac{1}{4}\cos(a+b-c).$$

47. $\sqrt{3}\sin a\cos b=\frac{1}{2}\cos(60^\circ-a+b)+\frac{1}{2}\cos(a+b-60^\circ)-$
$-\frac{1}{2}\cos(60^\circ+a+b)-\frac{1}{2}\cos(60^\circ+a-b).$

48. $4\sin a\sin(60^\circ-a)\sin(60^\circ+a)=\sin 3a.$

49. $\cos^4 a=\frac{1}{8}\cos 4a+\frac{1}{2}\cos 2a+\frac{3}{8}.$

50. $\sin^4 a=\frac{1}{8}\cos 4a-\frac{1}{2}\cos 2a+\frac{3}{8}.$

51. $\cos^5 a=\frac{1}{16}\cos 5a+\frac{5}{16}\cos 3a+\frac{5}{8}\cos a.$

52. $\sin^5 a=\frac{1}{16}\sin 5a-\frac{5}{16}\sin 3a+\frac{5}{8}\sin a.$

53. $\sin^3 a\cos^3 a=\frac{3}{32}\sin 2a-\frac{1}{32}\sin 6a.$

54. $\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0.$

55. $\sin a\sin b\sin(c-d)+\sin b\sin c\sin(d-a)+$
$+\sin c\sin d\sin(a-b)+\sin d\sin a\sin(b-c)=0.$

56. $\sin^2 2a\cos^2 a-\cos^2 2a\sin^2 a=\sin a\sin 3a.$

57. $\cos(a-b)-\sin(a+b)=2\sin(45^\circ-a)\cos(45^\circ+b).$

58. $\sin 50^\circ\sin 24^\circ(\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}66^\circ)+\sin 74^\circ=2\cos 16^\circ.$

59. $\sin(a+b)\sin(b+c)-\sin a\sin c=\sin b\sin(a+b+c).$

60. $\sin a+\cos a+\sin b+\cos b=2\sqrt{2}\cos\frac{a-b}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{a+b}{2}\right).$

61. $\operatorname{tg}(a-b)+\operatorname{tg}(b-c)+\operatorname{tg}(c-a)=\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a).$

62. $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=$
$=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}.$

63. $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c=$
$=4\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}.$

64. $4\cos a\cos b\cos c+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+1=$
$=8\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}.$

65. $\cos^2(b-c)+\cos^2(c-a)+\cos^2(a-b)=2\cos(b-c)\cos(c-a)\cos(a-b)+1.$

66. $2(\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)$
(упростить).

67. $\frac{\sin 3a}{\sin(c-a)\sin(a-b)}+\frac{\sin 3b}{\sin(a-b)\sin(b-c)}+\frac{\sin 3c}{\sin(b-c)\sin(c-a)}=$
$=4\sin(a+b+c).$

68. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$

69. $\sin^3 a\sin^3(b-c)+\sin^3 b\sin^3(c-a)+\sin^3 c\sin^3(a-b)=$
$=3\sin a\sin b\sin c\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$

70. $\cos^2(a-x)+\cos^2(b-x)-2\cos(a-b)\cos(a-x)\cos(b-x)$
(упростить).

71. $$\frac{(\sin 2a+\sin 4a+\sin 6a)^3-\sin^3 2a-\sin^3 4a-\sin^3 6a}{\sin 3a\sin 4a\sin 5a\cos^2 a\cos 2a}$$

(упростить).

72. $$2\sin^2 a\,\frac{1+\operatorname{ctg} a+\operatorname{ctg}(45^\circ-a)}{\operatorname{ctg} 2a\cos 2a-2+2\sin 2a}=\operatorname{tg}^2 2a\operatorname{tg}^3(45^\circ+a).$$

П. 2. Условные тождества

Доказать, что если $a=b+c$, то

1. $$\sin a+\sin b+\sin c=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$
2. $$\cos a+\cos b+\cos c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-1.$$
3. $$\sin a+\sin b-\cos c=1-4\cos\frac{c}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{a}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{b}{2}\right).$$
4. $$\operatorname{tg} a+\operatorname{ctg} b+\operatorname{ctg} c=\operatorname{tg} a\operatorname{ctg} b\operatorname{ctg} c.$$
5. $$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2(1-\cos a\cos b\cos c).$$
6. $$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c=1.$$

Доказать, что если $a+b+c=\frac{\pi}{2}$, то

7. $$\sin a+\sin b+\sin c-1=4\sin\frac{\pi-2a}{4}\sin\frac{\pi-2b}{4}\sin\frac{\pi-2c}{4}.$$
8. $$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=1-2\sin a\sin b\sin c.$$
9. $$\operatorname{ctg} a+\operatorname{ctg} b+\operatorname{ctg} c=\operatorname{ctg} a\operatorname{ctg} b\operatorname{ctg} c.$$
10. $$\sin a\sin b\cos c+\sin a\sin c\cos b+\sin b\sin c\cos a=\cos a\cos b\cos c.$$
11. $$(1-\sin b)(1-\sin c)\cos a+(1-\sin c)(1-\sin a)\cos b+$$
$$+(1-\sin a)(1-\sin b)\cos c=\cos a\cos b\cos c.$$

Доказать, что если $a+b+c=\pi$, то

12. $$\sin a+\sin b=2\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$
13. $$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\operatorname{ctg}\frac{c}{2}.$$
14. $$\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a=\sin(a-b)\sin c.$$
15. $$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$
16. $$\cos a+\cos b+\cos c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+1.$$
17. $$\cos a+\cos b+\cos c=1+2\,\frac{\sin a\sin b\sin c}{\sin a+\sin b+\sin c}.$$
18. $$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{b}{2}+\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{\sin b+\sin c-\sin a}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}.$$
19. $$\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=-1-4\cos a\cos b\cos c.$$
20. $$\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=2\sin a\sin b\cos c.$$
21. $$\sin^3 a+\sin^3 b+\sin^3 c=3\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{3a}{2}\cos\frac{3b}{2}\cos\frac{3c}{2}.$$
22. $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}-\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}.$$
23. $$\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)+\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)+$$
$$+\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)=\sin a\sin b\sin c(1-8\cos a\cos b\cos c).$$

24. $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c-a}{2}+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}=\sin a+\sin b+\sin c.$

25. $\sin^2 a-2\sin a\sin b\cos(60^\circ+c)=\sin^2 c-2\sin b\sin c\cos(60^\circ+a).$

Доказать, что если $a+b+c=2\pi$, то

26. $1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=4\cos a\cos b\cos c.$

27. $\sin a-\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$

28. $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=0.$

Доказать, что если $a+b+c+d=\pi$, то

29. $\sin a+\sin b+\sin c-\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}.$

30. $\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c+\operatorname{tg} d=\frac{\sin(a+d)\sin(b+d)\sin(c+d)}{\cos a\cos b\cos c\cos d}.$

Доказать, что если $a+b+c+d=2\pi$, то

31. $\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}.$

32. $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d=$
$=2(1+\sin a\sin b\sin c\sin d-\cos a\cos b\cos c\cos d).$

33. Доказать, что если $a+b+c=2n\pi$, где n—целое положительное число, то

$$\sin a+\sin b+\sin c=(-1)^{n-1}4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

34. Доказать, что если $a+b+c=(2n+1)\pi$, где n — целое число, то

$$\cos^4\frac{a}{2}+\cos^4\frac{b}{2}+\cos^4\frac{c}{2}-2\left(\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}\right)+$$
$$+4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}=0.$$

35. Доказать, что

а) $\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

$\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

если $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 45^\circ$ или $315^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 360^\circ$;

б) $\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

$\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

если $45^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 135^\circ$;

в) $\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

$\sin\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

если $135^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 225^\circ$;

г) $\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

$\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,

если $225^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 315^\circ$.

36. Доказать, что если $a+b+c+d=0$, то

$$\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d=$$
$$=4(\cos a\cos b\cos c\cos d-\sin a\sin b\sin c\sin d).$$

37. Доказать, что если корни уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

суть $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$, а уравнение

$$x^3+cx^2+bx+a=0$$

имеет корни $\operatorname{tg}\beta_1$, $\operatorname{tg}\beta_2$, $\operatorname{tg}\beta_3$, то

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3=k\pi,$$

где k — целое число.

38. Доказать, что если $0<a<\pi$, $0<b<\pi$, $0<c<\pi$ и $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ являются корнями уравнения

$$x^3+xp^2+x+q=0,$$

то

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c.$$

39. Доказать, что если

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=1,$$

то имеет место одно из четырех условий

$$a\pm b\pm c=(2k+1)\pi,$$

где k — целое число.

40. Доказать, что если $\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$, то либо $a-b=k\pi$, либо

$$a+b=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2},$$

где k — целое число.

41. Доказать, что если

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=4\operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

то

$$\operatorname{tg}\frac{b-a}{2}=\frac{3\sin a}{5-3\cos a}.$$

42. Доказать, что если $\operatorname{tg}(a+b)=3\operatorname{tg}a$, то

$$\sin(2a+2b)+\sin 2a=2\sin 2b.$$

43. Доказать, что если

$$(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c)=(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c),$$

то каждая из частей этого равенства равна $\pm\sin a\sin b\sin c$.

44. Доказать, что если

$$\cos x=\cos a\cos b,$$

то

$$\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}.$$

45. Доказать, что если $a+b+c=\pi$ и

$$\sin a : \sin b : \sin c = 4 : 5 : 6,$$

то

$$\cos a : \cos b : \cos c = 12 : 9 : 2.$$

46. Доказать, что если $a+b+c=\pi$, $a=2b$, то

$$\sin^2 a = \sin b\,(\sin c + \sin b).$$

47. Доказать, что если

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0,$$

то

$$\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{12}(\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c).$$

48. Доказать, что если

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} a = (1+\cos^2 x) : (1+\sin^2 x),$$

то

$$\sin(3x+a) = 4\sin(x-a).$$

49. Доказать, что если

$$\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b},$$

то

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

50. Доказать, что если $0<a<90°$, $0<b<90°$,

$$3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1, \quad 3\sin 2a = 2\sin 2b,$$

то $a+2b=90°$.

51. Доказать, что если $\cos a = \operatorname{tg} b$, $\cos b = \operatorname{tg} c$, $\cos c = \operatorname{tg} a$, то $\sin a = \sin b = \sin c = 2\sin 18°$.

52. Доказать, что если

$$\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)} = \frac{a_1}{b_1},$$

то

$$\cos(a-b) = \frac{aa_1+bb_1}{ab_1+a_1b}.$$

53. Доказать, что если

$$\frac{\cos x}{a_1} = \frac{\cos 2x}{a_2} = \frac{\cos 3x}{a_3},$$

то

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}.$$

54. Доказать, что если

$$\frac{\sin x}{a_1} = \frac{\sin 3x}{a_3} = \frac{\sin 5x}{a_5},$$

то

$$\frac{a_1+a_5}{a_3} = \frac{a_3-a_1}{a_1}.$$

55. Доказать, что если $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

56. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7},\quad \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

то

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}.$$

57. Доказать, что если

$$\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta),$$

то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

58. Доказать, что если $a+b+c=\pi$,
то

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}=1.$$

59. Доказать, что если

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m},$$

то

$$\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}.$$

60. Доказать, что если

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2}$$

и

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

то

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

61. Доказать, что если

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2},$$

то равенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$

имеет место только тогда, когда $\alpha+\gamma+\beta=\pi$.

62. Доказать, что если

$$\cos(2\alpha+\beta)=1,$$

то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

63. Доказать, что

$$\sec 2\alpha-\cos 2\beta=\frac{m^2+n^2}{\cos 2\alpha},$$

где

$$m=\sin(\alpha+\beta),\quad n=\sin(\alpha-\beta).$$

Исключить x из соотношений:

64. $\cos x - \sin x = m, \quad \sin 2x = n.$

65. $a \sin x + b \cos x = m, \quad \sin 2x = n.$

66. $\sin 3x = a, \quad \cos 2x = b.$

67. $\sin x + \cos x = a, \quad \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = b.$

68. $\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = a, \quad \cos x = b.$

69. $n \operatorname{tg}(x - a) = m \operatorname{tg}(x + a), \quad p \sin 2x + q \cos 2x = r.$

Исключить x и y из соотношений:

70. $\cos(x - y) = c, \quad \sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b.$

71. $\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}.$

72. $a \sin^2 x + b = k + b \sin^2 x, \quad b \sin^2 y + a = e + a \sin^2 y, \quad a \operatorname{ctg} y = b \operatorname{ctg} x.$

73. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b, \quad x + y = c.$

74. $\sin x + \cos y = a, \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = b, \quad \sec x + \operatorname{cosec} y = c.$

75. $a \sin^2 x + b \cos^2 x = m, \quad b \sin^2 y + a \cos^2 y = n, \quad a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y.$

Исключить x, y, z из систем уравнений:

76. $\cos(x + y) = a, \quad \cos(y + z) = b, \quad \cos(z - x) = c.$

77. $x + y + z = \alpha, \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = A,$
$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = B, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = C.$

78. $\sin(y - x) \sin(z - x) = a \cos x, \quad \sin(z - y) \sin(x - y) = b \cos y,$
$\sin(x - z) \sin(y - z) = c \cos z.$

§ 2. Суммирование

Просуммировать следующие выражения:

1. $\sin x + \sin(x + h) + \sin(x + 2h) + \ldots + \sin(x + nh).$

2. $\cos x + \cos(x + h) + \cos(x + 2h) + \ldots + \cos(x + nh).$

3. $\sin x - \sin(x + h) + \sin(x + 2h) - \ldots + (-1)^n \sin(x + nh).$

4. $\cos x - \cos(x + h) + \cos(x + 2h) - \ldots + (-1)^n \cos(x + nh).$

5. $\cos x - \sin(x - h) - \cos(x - 2h) + \sin(x - 3h) +$
$+ \cos(x - 4h) - \ldots + \cos\left[x + n\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\right].$

6. 1) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n - 1)x;$
2) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n - 1)x.$

7. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots + (-1)^{n-1} \sin nx.$

8. $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x + \ldots + (-1)^{n-1} \sin(2n - 1)x.$

9. $\sin nx + \sin(n - 1)x + \ldots + \sin(1 - n)x.$

10. $\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \ldots + \cos(4n - 3)x - \cos(4n - 1)x.$

11. $\cos \frac{\pi}{k} + \cos \frac{2\pi}{k} + \ldots + \cos \frac{n\pi}{k}.$

12. $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{5\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{n}\pi.$

13. $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n-1}{n}\pi.$

14. $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}.$

15. $\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}+\cos\frac{6\pi}{21}+\ldots+\cos\frac{20\pi}{21}.$

16. $\sin\frac{m\pi}{n}+\sin\frac{3m\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\,m}{n}\pi.$

17. $\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x+\ldots+\sin nx\sin(n+1)x.$

18. $\sin x\sin 3x+\sin 2x\sin 6x+\ldots+\sin\left(2^{n-1}x\right)\sin\left(3\cdot 2^{n-1}x\right).$

19. $\sin^2 x+\sin^2(x+h)+\ldots+\sin^2[x+(n-1)h].$

20. $\cos^2 x+\cos^2(x+h)+\ldots+\cos^2[x+(n-1)h].$

21. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx.$

22. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx.$

23. $\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right).$

24. $\cos^2 x+\cos^2 3x+\cos^2 5x+\ldots+\cos^2(2n-1)x.$

25. $\sin^3 x+\sin^3(x+h)+\ldots+\sin^3[x+(n-1)h].$

26. $\cos^3 x+\cos^3(x+h)+\ldots+\cos^3[x+(n-1)h].$

27. $\sin^3 x+\sin^3 2x+\ldots+\sin^3 nx.$

28. $\cos^3 x+\cos^3 3x+\ldots+\cos^3(2n-1)x.$

29. $\sin^3 x+\sin^3\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^3\left[x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right].$

30. $\cos^3 x+\cos^3\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^3\left[x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right].$

31. $\sin^4 x+\sin^4(x+h)+\ldots+\sin^4[x+(n-1)h].$

32. $(n-1)\sin x+(n-2)\sin 2x+\ldots+2\sin(n-2)x+\sin(n-1)x.$

33. $\sin(x+h)+2\sin(x+2h)+\ldots+n\sin(x+nh).$

34. $\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec} 2x+\operatorname{cosec} 4x+\ldots+\operatorname{cosec} 2^{n-1}x.$

35. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} 2x+\ldots+\operatorname{tg}\left(2^{n-1}x\right)+\operatorname{ctg}\left(2^{n-1}x\right).$

36. $\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\ldots+\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}.$

37. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+1+1^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+2+2^2}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+n+n^2}=$

$=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n+1}$ (доказать).

38. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+2}$ (доказать).

39. $(1+\sec 2x)(1+\sec 4x)\ldots\left(1+\sec 2^n x\right)=\frac{\operatorname{tg}(2^n x)}{\operatorname{tg} x},$

если $x\neq k\pi$, где k — целое число, доказать.

Вычислить произведения:

40. $(2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1)\ldots(2\cos 2^{n-1}x - 1)$.

41. $\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{4}+\cos\frac{b}{4}\right)\ldots\left(\cos\frac{a}{2^n}+\cos\frac{b}{2^n}\right)$.

42. Доказать, что сумма квадратов хорд, соединяющих произвольную точку окружности с вершинами правильного вписанного в круг n-угольника, равна $2nr^2$, где r — радиус круга.

43. Доказать, что сумма четвертых степеней хорд, соединяющих произвольную точку окружности с вершинами правильного вписанного в круг n-угольника, равна $6nr^2$, где r — радиус круга.

44. В круг вписан выпуклый n-угольник так, что его последовательные стороны отсекают дуги a, $2a$, ..., na. Найти отношение площади этого многоугольника к площади правильного n-угольника, вписанного в тот же круг.

45. В плоскости данного правильного n-угольника даны точки A и B на расстоянии a. Через точку B проведены прямые, параллельные сторонам многоугольника. Найти сумму квадратов расстояний от точки A до этих прямых.

46. Найти произведение всех хорд, проведенных из вершин правильного многоугольника ко всем прочим его вершинам.

47. Пусть l — прямая, на которой лежит сторона A_1A_2 правильного n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Будем вращать многоугольник вокруг его вершины A_2 до тех пор, пока на прямую l не упадет вершина A_3, затем будем вращать многоугольник вокруг A_3 до тех пор, пока на прямую l не упадет вершина A_4 и т. д. Вычислить длину линии, которую опишет вершина A_1, когда многоугольник таким образом «прокатится» по прямой l, сделав один полный оборот (т. е. сторона A_1A_2 снова будет лежать на прямой l). Радиус окружности, описанной вокруг данного многоугольника, равен a.

48. По правильному n-угольнику, вписанному в круг радиуса a, «катится» прямая. Вычислить длину линии, которую опишет точка катящейся прямой, совпадающая в начальный момент с одной из вершин многоугольника при условии, что прямая сделает полный оборот.

49. Вычислить суммы:

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx.$$

50. $$\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{tg}4\alpha + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{tg}2^{n-1}\alpha.$$

51. $$\cos nx + C_n^1\cos(n-1)x + C_n^2\cos(n-2)x + \ldots + C_n^k\cos(n-k)x + \ldots + 1.$$

52. $$\frac{\sec\alpha\sec 2\alpha + \sec 2\alpha\sec 3\alpha + \ldots + \sec n\alpha\sec[(n+1)\alpha]}{\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}2\alpha + \operatorname{cosec}2\alpha\operatorname{cosec}3\alpha + \ldots + \operatorname{cosec}n\alpha\operatorname{cosec}[(n+1)\alpha]}.$$

53. $$1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$

54. Доказать равенства:

а) $2^{2n}\cos^{2n}x = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k\cos[2(n-k)x] + C_{2n}^n$;

б) $2^n\cos^{2n+1}x = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k\cos[(2n-2k+1)x]$;

в) $2^{2n}\sin^{2n}x = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_{2n+1}^k\sin[(2n-2k+1)x]$;

г) $2^{2n}\sin^{2n+1}x = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_{2n+1}^k\sin[(2n-2k+1)x]$.

55. Доказать, что:

а) $1+C_n^4+C_n^8+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

б) $C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

в) $C_n^1+C_n^6+C_n^{10}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

г) $C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

Глава XXVIII

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Доказать следующие шесть групп формул (задачи 1 — 6):

1. а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

в) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

2. а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

3. а) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0 < x < 1$.

б) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$

$= \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$.

в) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x > 0$.

г) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x > 0$.

4. а) $\arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$,
где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

б) $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$,
где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

в) $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$,
где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

г) $\arccos x - \arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right)$,
где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

д) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}$, где $x > 0$, $y > 0$.

е) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$, где $x > 0$, $y > 0$.

ж) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}$, где $x > 0$, $y > 0$.

з) $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arctg}\frac{y-x}{1+xy}$, где $x > 0$, $y > 0$.

5. а) $2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

б) $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

в) $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \dfrac{1-x^2}{2x}$, где $x > 0$.

г) $2 \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \dfrac{x^2-1}{2x}$, где $x > 0$.

6. а) $\dfrac{1}{2} \arcsin x = \arccos \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

б) $\dfrac{1}{2} \arccos x = \arccos \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

в) $\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $x > 0$.

7. Доказать следующие формулы:

а) $\sin(\arcsin x) = x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

в) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

д) $\cos(\arccos x) = x$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

е) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

ж) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

з) $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

и) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$;

к) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

л) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 1$;

м) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$;

н) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

о) $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 1$;

п) $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

р) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

8. Найти:

а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin \dfrac{1}{2}$; в) $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\arcsin 1$; е) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

ж) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; з) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; и) $\arcsin(-1)$.

9. Найти:

а) $\arccos 0$; б) $\arccos \frac{1}{2}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\arccos 1$; е) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; з) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; и) $\arccos(-1)$.

10. Найти:

а) $\operatorname{arctg} 0$; б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{arctg} 1$;

г) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; д) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; е) $\operatorname{arctg}(-1)$;

ж) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

11. Найти:

а) $\operatorname{arcctg} 0$; б) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{arcctg} 1$;

г) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$; д) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}(-1)$;

ж) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

12. Вычислить:

а) $\sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right)$; б) $\cos\left(\arcsin \frac{2}{3}\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; г) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

д) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$; е) $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$;

ж) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$; з) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

13. Вычислить:

а) $\sin\left(2\arccos \frac{1}{3}\right)$; б) $\cos\left(3\arcsin \frac{3}{5}\right)$;

в) $\cos(2\arccos x)$; г) $\cos(3\arccos x)$;

д) $\sin(2\operatorname{arctg} 4)$; е) $\operatorname{tg}(3\operatorname{arcctg} 5)$.

14. Вычислить:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$;

в) $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}\right)$.

15. Вычислить:

а) $\arcsin(\sin 5)$; б) $\arccos(\cos 10)$;

в) $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-8)]$; г) $\operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg}(-12)]$.

16. Выразить через арксинус следующие значения обратных тригонометрических функций:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $\arccos \frac{2}{7}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$;

г) $\operatorname{arctg}(-4)$; д) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{12}{5}\right)$; е) $\operatorname{arcctg} 2$.

17. Выразить через арккосинус значения обратных тригонометрических функций:

а) $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\operatorname{arctg} 3$; в) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{5}$;

г) $\operatorname{arctg}(-2)$; д) $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}(-3)$.

18. Выразить через арктангенс следующие значения обратных тригонометрических функций:

а) $\arcsin\frac{3}{5}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{6}\right)$; в) $\arccos\frac{7}{13}$;

г) $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$; д) $\operatorname{arcctg} 4$; е) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

19. Выразить через арккотангенс следующие значения обратных тригонометрических функций:

а) $\arcsin\frac{1}{10}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$;

г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$; д) $\arccos\frac{1}{3}$; е) $\arccos\frac{2}{3}$.

20. Пользуясь формулами сложения, произвести указанные действия:

а) $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{5}$; б) $\arcsin\frac{2}{3}-\arcsin\frac{1}{5}$;

в) $\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{5}$; г) $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{1}{4}$;

д) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$;

ж) $\operatorname{arcctg}\frac{2}{5}+\operatorname{arcctg} 3$; з) $\operatorname{arcctg} 2-\operatorname{arcctg} 5$.

21. Произвести указанные действия:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(-2)+\arcsin\frac{1}{3}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$;

в) $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)-\arcsin\frac{2}{3}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{3}{7}+\operatorname{arctg}\frac{2}{5}-\arcsin\frac{3}{4}$.

22. Применить формулы удвоения:

а) $2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $2\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $2\operatorname{arctg} 3$; г) $2\operatorname{arcctg}\frac{1}{4}$.

23. Применить формулы удвоения:

а) $2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; б) $2\operatorname{arctg}(-5)$; в) $2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{12}\right)$.

24. Применить формулы первой и шестой групп:

а) $\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$;

б) $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$;

в) $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right)$.

25. Применить формулы шестой группы:

а) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}$;

б) $\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{7}$;

в) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3$.

26. Доказать, что:

а) $2\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$;

б) $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$;

в) $3\arcsin\frac{1}{4} + \arccos\frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$.

27. Вычислить

$$\arccos\left(-\frac{20}{29}\right) - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{20}{21}\right).$$

28. Вычислить

$$3\arcsin\frac{1}{4} + \arccos\frac{11}{16}.$$

29. Доказать, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

30. Вычислить

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) - \sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Доказать следующие соотношения:

31. $$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

32. $$\arcsin\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

33. $$\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{\pi}{2}.$$

34. $$\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{146}} + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{12}.$$

35. $$\arcsin\frac{3\sqrt{3}+4}{10} - \arcsin\frac{3}{5} = \frac{\pi}{6}.$$

36. $$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right).$$

37. $$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

38. $$2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}.$$

39. $$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arctg} 5.$$

40. $$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

Преобразовать следующие выражения:

41. $\cos(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y)$.

42. $\operatorname{tg}(2 \arcsin x)$.

43. $\cos\left(\arcsin \sqrt{1-x} - \arcsin \sqrt{x}\right)$.

44. $\operatorname{ctg}[\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1-x)]$.

45. $\sin\left(\frac{3}{2} \arcsin x\right)$.

46. $\cos\left(\frac{3}{2} \arccos x\right)$.

47. $\cos(3 \arccos x)$.

48. $\cos(4 \arccos x)$.

49. $\operatorname{tg}(5 \operatorname{arc\,tg} x)$.

50. $\sin(3 \operatorname{arc\,tg} x)$.

51. $\sin(3 \arcsin x)$.

52. $\arccos(2x^2-1) + 2 \arcsin x$.

53. $2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} + \arcsin \frac{x\sqrt{3}+\sqrt{1-x^2}}{2}$.

54. $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right)$.

55. $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)$.

56. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x\right)$.

57. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,ctg} x\right)$.

58. $\cos(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x)$.

59. $\operatorname{tg}(2 \arccos x)$.

60. $\sin[\arccos(1-x) + \arccos x]$.

61. $\operatorname{ctg}(2 \arcsin x + 3 \arccos x)$.

62. $2 \operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

63. $2 \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} x^3)$.

64. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{a}{b}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{a}{b}\right)$.

Доказать следующие соотношения:

65. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi$,

где $\varepsilon = 0$, если $xy < 1$; $\varepsilon = -1$, если $xy > -1$ и $x < 0$ и $\varepsilon = 1$, если $xy > 1$, $x > 0$.

66. Если

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} z = \pi,$$

то

$$x + y + z = xyz.$$

67. $$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

68. $$\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

69. $$\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0; \\ -\operatorname{arc\,ctg}\left(-\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

70. $$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0; \\ -\pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

71. $$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant 0; \\ \pi - 2\arccos \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

72. $$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } xy \leqslant 0 \\ & \text{или } x^2+y^2 \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x > 0; \\ & y > 0 \text{ и } x^2+y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x < 0, \\ & y < 0 \text{ и } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

73. $$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } xy \geqslant 0 \\ & \text{или } x^2+y^2 \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x > 0, \\ & y < 0 \text{ и } x^2+y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x < 0, \\ & y > 0 \text{ и } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

74. $$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } xy > -1; \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x > 0,\ xy < -1; \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x < 0,\ xy < -1. \end{cases}$$

75. $$\arccos \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} -\arccos x + \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ \arccos x - \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

76. $$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } x > -1; \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

77. $$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{arc\,tg} x, & \text{если } x < -1; \\ 2\operatorname{arc\,tg} x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - 2\operatorname{arc\,tg} x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

78.
$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x, \text{ если } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ \pi-x, \text{ если } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2};\\ x-2\pi, \text{ если } \frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}. \end{cases}$$

79.
$$8\operatorname{arctg}\frac{1}{10}+\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4},$$

где

$$x=\frac{1-\operatorname{tg}\left(8\operatorname{arctg}\frac{1}{10}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(8\operatorname{arctg}\frac{1}{10}\right)}.$$

80.
$$\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\frac{\pi}{3},$$

где

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

81.
$$\arcsin\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4}-x,$$

если

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}.$$

82.
$$2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,$$

где

$$x>1.$$

83.
$$\arcsin x+\arcsin y=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy},\\ \text{если } x^2+y^2<1 \text{ или } xy\leqslant 0;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy},\\ \text{если } x^2+y^2>1,\ x>0,\ y>0;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy},\\ \text{если } x^2+y^2>1,\ x<0,\ y<0. \end{cases}$$

84.
$$2\arcsin x=\begin{cases} \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ если } |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}};\\ \pi-\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ если } \frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1;\\ -\pi-\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ если } -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

85.
$$2\arccos x=\begin{cases} \arccos(2x^2-1), \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2\pi-\arccos(2x^2-1), \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$$

86.
$$2\operatorname{arctg}x=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, \text{ если } |x|<1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, \text{ если } x>1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, \text{ если } x<-1. \end{cases}$$

87. $$4 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \arcsin x = \pi$$

при любом x, по абсолютной величине меньшем 1.

88. $$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{27} = \arcsin x,$$

где

$$x = \frac{32 + 3\sqrt{665}}{135}.$$

89. $$\arcsin x + \operatorname{arc\,tg} y = \arcsin \frac{x + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}},$$

где $0 < x < 1$, $y > 0$.

90. $$3 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \quad \text{где} \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

91. $$\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

92. $$\arccos x - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 < x < 1; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

93. $$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \arcsin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0.$$

94. $$\arcsin \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}} + \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \frac{\pi}{2},$$

если

$$-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

95. $$\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \cos\left(2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) =$$

$$= \sin\left(2 \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}\right) = x.$$

96. $$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

97. Доказать, что если x — не целое число, то

$$\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg} \frac{2x-1}{2} \pi\right) = [x],$$

где $[x]$ есть наибольшее целое число, меньшее, чем x.

98. Доказать, что если

$$\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z = \pi,$$

то

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz.$$

99*. Доказать следующую формулу:

$$\arcsin(\sin x) = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]}\left(\pi\left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]$ — наибольшее целое число, меньшее или равное $\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}$, а $\left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\}$ — дробная часть этого числа, т. е.

$$\left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} - \left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right].$$

100.** Доказать следующую формулу:

$$\arccos(\cos x) = \pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\},$$

если $\left[\frac{x}{\pi}\right]$ — число четное и

$$\arccos(\cos x) = \pi - \pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\},$$

если $\left[\frac{x}{\pi}\right]$ — число нечетное.

101.** Доказать, что если $\left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} \neq 0$, то

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \pi\left\{\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right\} - \frac{\pi}{2}.$$

102.** Доказать, что если $\left\{\frac{x}{\pi}\right\} \neq 0$ $\left(\text{т. е. } \frac{x}{\pi} \text{ не есть целое число}\right)$, то

$$\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x) = \pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\}.$$

Глава XXIX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решение тригонометрического уравнения обычно сводят к решению одного из следующих простейших уравнений:

а) $\sin x = a$;
б) $\cos x = a$;
в) $\operatorname{tg} x = a$;
г) $\operatorname{ctg} x = a$.

Итог исследования уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$ дан в следующей таблице:

Вид уравнения	Значение параметра a				
	$\lvert a \rvert > 1$	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	$-1 < a < 1$
$\sin x = a$	нет корней	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$x = k\pi$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = 2k\pi + \arcsin a$, $x = (2k+1)\pi - \arcsin a$
$\cos x = a$	нет корней	$x = (2k+1)\pi$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = 2k\pi$	$x = 2k\pi \pm \arccos a$

Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$ (a — любое число) даются формулой

$$x = k\pi + \operatorname{arc\,tg} a.$$

Все корни уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ (a — любое число) даются формулой

$$x = k\pi + \operatorname{arc\,ctg} a.$$

Отметим еще формулы, дающие все корни следующих уравнений:

Уравнение	Корни
$\sin^2 x = a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$	$x = k\pi \pm \arcsin \sqrt{a}$
$\cos^2 x = a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$	$x = k\pi \pm \arccos \sqrt{a}$
$\operatorname{tg}^2 x = a$, где $0 \leqslant a$	$x = k\pi \pm \operatorname{arc\,tg} \sqrt{a}$

где k — любое целое число.

При решении тригонометрического неравенства с одним неизвестным

$$f(x) > 0$$

следует сначала найти область определения функции $f(x)$, затем решить уравнение

$$f(x) = 0,$$

а затем воспользоваться, например, тем свойством элементарной функции, что если она определена на некотором сегменте (или интервале) и не имеет на этом сегменте (или интервале) корней, то она сохраняет знак на этом сегменте (или интервале).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство

$$7\cos x + 12\sin^2 x < 13.$$

Решение. Функция $7\cos x + 12\sin^2 x$ определена при всех значениях x. Решаем уравнение

$$7\cos x + 12\sin^2 x = 13,$$

или

$$12(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 13 = 0,$$

или

$$-12\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0,$$

или

$$12\cos^2 x - 7\cos x + 1 = 0.$$

Находим

$$\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{24} = \frac{7 \pm 1}{24}.$$

Отсюда

$$\cos x = \frac{1}{3} \text{ или } \cos x = \frac{1}{4},$$

следовательно, на сегменте $[0, 2\pi]$ уравнение $7\cos x + 12\sin^2 x = 13$ имеет следующие корни (располагаем их в порядке возрастания):

$$x_1 = \arccos\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \arccos\frac{1}{4},$$

$$x_3 = 2\pi - \arccos\frac{1}{4},$$

$$x_4 = 2\pi - \arccos\frac{1}{3}.$$

Разобьем сегмент $[0, 2\pi]$ на следующие полуинтервалы и интервалы:

$$[0, x_1),\ (x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ (x_3, x_4),\ (x_4, 2\pi].$$

Данное неравенство можно переписать в виде

$$(3\cos x - 1)(4\cos x - 1) > 0.$$

В случае

$$0 \leqslant x < x_1,$$

$$3\cos x - 1 > 0,\quad 4\cos x - 1 > 0,$$

следовательно, при всех x из полуинтервала $[0, x_1)$ данное неравенство будет выполнено.

В случае

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

будем иметь:

$$3\cos x - 1 \leqslant 0,\quad 4\cos x - 1 \geqslant 0,$$

и, значит, для всех x из сегмента $[x_1, x_2]$ данное неравенство не будет выполнено. В случае

$$x_2 < x < x_3$$

будем иметь

$$3\cos x - 1 < 0, \quad 4\cos x - 1 < 0;$$

данное неравенство выполнено для всех x из интервала (x_2, x_3).

Аналогично убеждаемся в том, что данное неравенство не будет выполнено для всех x из сегмента $[x_3, x_4]$ и будет выполнено для всех x из полуинтервала $(x_4, 2\pi]$.

Так как функция $7\cos x + 12\sin^2 x - 13$ периодическая и период ее равен 2π, то окончательно будем иметь следующий результат.

Все решения данного неравенства будут:

$$2k\pi \leqslant x < 2k\pi + \arccos\frac{1}{3},$$

$$2k\pi + \arccos\frac{1}{4} < x < 2(k+1)\pi - \arccos\frac{1}{4},$$

$$2(k+1)\pi - \arccos\frac{1}{3} < x \leqslant 2(k+1)\pi.$$

Пример 2. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < -3.$$

Решение. Функция

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

периодическая и ее период равен π.

Исследуем поэтому эту функцию только на сегменте $[0, \pi]$. Точки 0, $\frac{\pi}{2}$, π из этого сегмента не входят в область определения функции $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. В остальных точках сегмента $[0, \pi]$ функция $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ определена.

Найдем корни уравнения

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -3$$

на сегменте $[0, \pi]$.

Имеем:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3,$$

$$\sin 2x = -\frac{2}{3}.$$

Отсюда находим корни уравнения $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -3$:

$$2x = \pi + \arcsin\frac{2}{3},$$

$$2x = 2\pi - \arcsin\frac{2}{3},$$

следовательно,

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3},$$

$$x_2 = \pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}.$$

Теперь надо исследовать знак функции $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3$ в каждом из интервалов и сегменте:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, x_1\right), \quad [x_1, x_2], \quad (x_2, \pi).$$

В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 > 0$;

в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, x_1\right)$ имеем $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 < 0$;

на сегменте $[x_1, x_2]$ имеем $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 \geqslant 0$;

в интервале (x_2, π) имеем $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 < 0$.

Следовательно, все решения данного неравенства, расположенные на сегменте $[0, \pi]$, даются формулами

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3},$$

$$\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} < x < \pi,$$

а все решения данного неравенства будут:

$$k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3},$$

$$k\pi + \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} < x < k\pi + \pi,$$

где k — любое целое число.

§ 1. Тригонометрические уравнения с одним неизвестным

Решить следующие уравнения:

1. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$

2. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x).$

3. $\operatorname{tg}(40^\circ + x) \operatorname{ctg}(5^\circ - x) = \frac{2}{3}.$

4. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$

5. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$

6. $\sec x = 4 \sin x + 6 \cos x.$

7. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

8. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}.$

9. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x).$

10. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

11. $\sin^2 x + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos x = 2.$

12. $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$

13. $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

14. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$

15. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}.$

16. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0.$

17. $\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \operatorname{cosec} x = 5.$

18. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

19. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x = \sin x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.

20. $\sin\left(\frac{5\pi}{3} \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$.

21. $2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

22. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

23. $(\sin 4x - 2 \cos 4x)^2 + (\cos 4x - 2 \sin 4x)^2 = 3$.

24. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$.

25. $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

26. $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$.

27. $\sin x \sin 3x + \sin 6x \sin 10x = 0$.

28. $\sin x \sin (x + 60°) \sin (x + 120°) = \frac{1}{4}$.

29. $\dfrac{(\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x}{\cos^4 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x} = 2$.

30. $\dfrac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2} - 2}{\sin^2 2x (1 + \operatorname{ctg}^2 2x)} = \frac{1}{2}$.

31. $4 \cos^2 x + \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 3$.

32. $1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right)^2$.

33. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$.

34. $\operatorname{tg} 7x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

35. $2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 3 \sin^2 2x = 1$.

36. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{tg} 2x + 7$.

37. $\sin 3x = \cos x$.

38. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

39. $\cos x \cos 2x = \cos 3x$.

40. $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

41. $1 + \sin x + \cos x = 0$.

42. $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$.

43. $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$.

44. $\sin 3x + \cos 5x = 0$.

45. $\sin x + \cos 2x = 1 + \sin x \cos 2x$.

46. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

47. $\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x$.

48. $\operatorname{tg} x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

49. $1 + \cos x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

50. $\sin 3x = \sin x \cos 2x$.

51. $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2.$

52. $\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} = (\sin x + \cos x)^2.$

53. $\sin 17x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x = 0.$

54. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$

55. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

56. $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos x - \sin x).$

57. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$

58. $5 (1 - \sin 2x) - 16 (\sin x - \cos x) + 3 = 0.$

59. $\cos^2 (x + a) + \cos^2 (x - a) = \sin 2a.$

60. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (a - x) = 2 \operatorname{tg} a.$

61. $2 \cos x - \cos \frac{3x}{2} = 1.$

62. $\sin x + \cos x - 1 = 0.$

63. $\sin (x - a) = \sin x - \sin a.$

64. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6}.$

65. $\sin (11\pi x) \sin (4\pi x) + \sin (5\pi x) \sin (2\pi x) = 0.$

66. $\frac{\operatorname{ctg}^2 (2^{x-1}\varphi) - \operatorname{ctg}^2 (2^x \varphi)}{1 + 2 \cos (2^x \varphi)} = \operatorname{cosec} 3\varphi \operatorname{cosec} (2^x \varphi).$

67. $\sin x + \operatorname{tg} x = \sec x - \cos x.$

68. $\cos x - \cos 2x = 1.$

69. $\operatorname{tg} x = 2 \cos \frac{x}{2}.$

70. $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x.$

71. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$

72. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}.$

73. $\operatorname{tg}^3 x + \sec^3 x = 3.$

74. $(3 + \sin 2x) \sin^4 x - (3 + \sin 2x) \sin^2 x + 1 = 0.$

75. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{1}{2} \sin^2 2x = 0.$

76. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{cosec}^3 x = 3.$

77. $\cos x = \cos^2 \frac{3x}{4}.$

78. $\frac{\cos^3 \delta}{\cos x} + \frac{\sin^3 \delta}{\sin x} = 1.$

79. $\sqrt{2} \sin^3 x = 4 \cos^2 x.$

80. Найти $\cos x$ и $\sin x$, если

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

81. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} (60^\circ + x) = 0.$

82. $\cos 2x + 2\sin 2x = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}$.

83. $2\cos^2 x = \sqrt{\sin^2 x - 16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x + \cos^2 x}$.

84. $5\sin^2(2x+30^\circ) + 3\cos(2x+30^\circ) = 3$.

85. $4\cos\frac{2x}{3} + 2\cos\frac{x}{3} + 4 = 0$.

86. $2\sin 2x\operatorname{tg} 2x - 8\cos 2x + 1 = 0$.

87. $a\cos x + b\sec x + c = 0$.

88. $5\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right) - 2\sec\left(x+\frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0$.

89. $4\sin\frac{5x}{6} - 8\operatorname{cosec}\frac{5x}{6} + \operatorname{ctg}\frac{5x}{6} = 0$.

90. $2\sin^2\left(\frac{3x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) + 4\cos^2\left(\frac{3x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = 3 - \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right)$.

91. $\sin x - 2\cos 2x = 1$.

92. $a\operatorname{cosec}(nx) + b\operatorname{ctg}^2(nx) + c = 0$.

93. $\sec(36^\circ - 5x) + 8\cos(36^\circ - 5x) + 6\operatorname{tg}(5x - 36^\circ) = 0$.

94. $a\operatorname{tg}(mx) + b\operatorname{ctg}(mx) + c = 0$.

95. $5\sin^2 x - 3\cos^2 x = \operatorname{ctg}^2 x$.

96. $\operatorname{tg}^2 2x = \frac{51}{50}\operatorname{tg} 2x$.

97. $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin x$.

98. $2\sin^2 x + \cos x = 2\sin^2 x\cos x + 1$.

99. $2\sin\frac{3x}{2} + 6\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} - 3\cos\frac{3x}{2} = 1$.

100. $\sin^2 x\sec x - \sqrt{3} = \operatorname{tg} x - \sqrt{3}\sin x$.

101. $\cos x + \cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$.

102. $\sin 4x + \cos 4x + 1 = 0$.

103. $2\operatorname{ctg} 5x = \sin 10x$.

104. $1 + \sec 2x = \operatorname{ctg}^2 x$.

105. $\sin(x - 10^\circ) = 0{,}3\cos(x - 10^\circ)$.

106. $3\cos^2 2x = \sin^2 2x$.

107. $\sin^2 x + 1{,}7\cos^2 x = 6\sin x\cos x$.

108. $\sin^2 x + \sin 2x\cos 2x = 2\cos^2 2x$.

109. $\sin^3 x = 3\sin x\cos^2 x$.

110. $\sin^5 x - \sin^4 x\cos x = 2\sin^3 x\cos^2 x$.

111. $\sin^4 x\cos^2 x + \sin^2 x\cos^4 x = \sin^3 x\cos^3 x + \sin x\cos^5 x$.

112. $10\sin^2\frac{x}{2} + 13\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 5$.

113. $2\sin x + 6\cos x = \sec x$.

114. $\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1$.

115. $8\operatorname{tg} 3x\sin 3x + 6\sin 3x + 3\cos 3x = 4\sec 3x$.

116. $a \operatorname{ctg}(mx+\alpha)\cos(mx+\alpha)+b\sin(mx+\alpha)+c\cos(mx+\alpha)=d.$

117. $\sin 5x=\sin 7x.$

118. $\cos x=\cos 3x.$

119. $\sin 2x-\cos\frac{x}{3}=0.$

120. $\operatorname{tg} 8x-\lg 2x=0.$

121. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\operatorname{ctg}\frac{3x}{4}.$

122. $\operatorname{tg}(nx+\alpha)=\operatorname{ctg}(mx+\beta).$

123. $\sin 3x+\cos 3x=0.$

124. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

125. $\sin(180^\circ-x)-\sin(270^\circ-2x)=0.$

126. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(2\pi-x).$

127. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\operatorname{tg}(2\pi-x)=0.$

128. $\sin(630^\circ-x)+\cos(x-90^\circ)=0.$

129. $\operatorname{ctg}(405^\circ-x)=\operatorname{tg}(2x-690^\circ).$

130. $\cos\left(\frac{23\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)=-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{25\pi}{6}\right).$

131. $m\sin(x+15^\circ)=n\sin(x-75^\circ).$

132. $3\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right).$

133. $\cos\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)=3\cos\left(\frac{x}{2}-90^\circ\right).$

134. $-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right).$

135. $3\sin(30^\circ+3x)=5\cos(60^\circ-3x).$

136. $10\operatorname{tg}(x+\alpha)=6\operatorname{tg}(x+\beta).$

137. $-4\operatorname{ctg}(5x+43^\circ)=\operatorname{ctg}(5x+13^\circ).$

138. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{3}\right).$

139. $\frac{5}{3}\operatorname{tg}(23^\circ+8x)=-3\operatorname{ctg}(77^\circ-8x).$

140. $\sin 3x\cos 3x=-0{,}5.$

141. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin 2x\cos 2x.$

142. $\sin(2x+70^\circ)\sin(2x-50^\circ)=\frac{1}{4}.$

143. $\sin(\alpha+mx)\cos(\beta-mx)=a.$

144. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)=0{,}1084.$

145. $\sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)=a.$

146. $\cos(x+35^\circ)\cos(x+5^\circ)=-0{,}3205.$

147. $\cos\left(75^\circ-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-15^\circ\right)=0{,}25.$

148. $\sin 3x \sin 2x = \sin 11x \sin 10x.$

149. $\sin x \sin(\pi - 4x) = \sin 2x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right).$

150. $\sin(8x + 56°) \sin(5x + 34°) = \sin(4x + 26°) \sin(x + 4°).$

151. $\cos 3x \cos x = \cos 7x \cos 5x.$

152. $\cos 10x \cos 6x = \cos^2 8x.$

153. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{12}\right).$

154. $2 \sin x + 3 \cos x + 2 = 0.$

155. $\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0.$

156. $\sin(x - 30°) - 2 \cos(x - 30°) = \frac{1}{6}.$

157. $4 \sin(2x + 20°) - \cos(2x + 200°) = 3.$

158. $2 \cos 3x + 19{,}9 \sin 3x = 17{,}32.$

159. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a.$

160. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2} \sin x.$

161. $\sin(x + 60°) + \cos(x + 60°) = 2 \sin(2x + 120°) - 11.$

162. $\sin\left(\frac{x}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{x}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2} \sin(x + 2\alpha).$

163. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right).$

164. $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

165. $\cos(mx + \alpha) - \sin(mx + \alpha) = \sqrt{2} \cos(nx + \beta).$

166. $\cos^2(x + 30°) + \cos^2(x - 30°) = \frac{3}{2}.$

167. $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 0{,}5.$

168. $\sin^2(x + \alpha) + \sin^2(x - \alpha) = a.$

169. $\sin^2\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

170. $\sin^2(2x + 150°) + \cos^2(2x - 150°) = 0{,}137.$

171. $\sin^2(mx + \alpha) - \cos^2(mx - \alpha) = a.$

172. $\cos x = \cos 2x - \cos 3x.$

173. $\cos(270° + 5x) + \sin(3x + 90°) + \sin(360° - x) = 0.$

174. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

175. $\cos x - \cos 17x = 1 + 2 \sin 8x \sin x - \cos 16x.$

176. $1 + \cos 2x + \cos 4x = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x.$

177. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0.$

178. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) + \operatorname{tg}(\pi - 2x) + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

179. $\cos nx + \cos[(n + 2)x] = \cos x.$

180. $\sin x + \cos nx = \cos[(n+1)x]$.

n — целое положительное число.

181. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 7x$.

182. $\sin(nx)\sin(mx) = 1$,

где m и n — целые положительные числа.

183. $4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{4} + 8\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\frac{x}{12} - \operatorname{tg}\frac{x}{8}$.

184. $\sin^5 x + \sec x = \cos^5 x + \operatorname{cosec} x$.

185. $(\cos x - \sin x)(2\operatorname{tg} x + \sec x) + 2 = 0$.

186. $2\cos^2 4x + \sin^2 3x = 1$.

187. $\sec^2 x + \sec^2 12x = 12$.

188. $3\sin(x - 60^\circ) + 4\sin(x + 30^\circ) + 5\sin(5x + 30^\circ) = 0$.

189. $8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

190. $2\cos^4 2x + \cos^2 2x\cos 4x + \cos 6x\cos 2x + \cos 8x = \frac{1}{2\sin x}$.

191. $\sin(x + 3\alpha) = 3\sin(\alpha - x)$.

192. $16\sin^6 x + 6\cos 2x - 3\cos 4x = 4{,}75$.

193. $(a-1)\cos x + (a+1)\sin x = 2a$.

194. $\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\cos mx}{\cos x}$.

195. $a(\sin x + \cos x)^2 = b\cos 2x$.

196. $\sin(x - \alpha) = \sin x - \sin\alpha$.

197. $8\cos x - 14\cos^2 x + 8\cos^3 x - 2\cos^4 x + \cos 2x = 1$.

198. $5\sin 2x + \sin x + \cos x = 1$.

199. $\sin 3x\sin^3 x + \cos 3x\cos^3 x = \frac{1}{8}$.

200. $\frac{a\sin x + b}{b\cos x + a} = \frac{a\cos x + b}{b\sin x + a}$, $ab > 0$.

201. $2^{\sin^2 x} = \sin x$.

202. $\sin x\cos x = \sin 40^\circ$.

203. $\sec^2 x + \sec^2 2x = 12$.

204. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$.

205. $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 1$.

206. $\sin x = \cos\frac{1}{x}$.

207. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

208. $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$.

209. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cosec} 3x$.

210. $\sec^2\frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2} = 16\operatorname{ctg} x$.

211. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

212. $\sin 3x = \frac{3}{4}$.

213. $\cos 5x = \frac{1}{3}$.

214. $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = 8$.

215. $\operatorname{ctg} \frac{2x}{3} = -\frac{7}{13}$.

216. $\cos^2 x = \frac{3}{5}$.

217. $\sin^2 x = \frac{1}{7}$.

218. $\operatorname{tg}^2 x = 10$.

219. $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{7}{13}$.

220. $\sin(5x + 3) = \cos(4x + 2)$.

221. $\operatorname{tg}\left(\pi x + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$.

222. $2\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$.

223. $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

224. $\sin(\pi x) \sin(3\pi x) = \frac{1}{2}$.

225. $\cos(7\pi x) \sin(6\pi x) = \cos(5\pi x) \sin(8\pi x)$.

226. $\operatorname{tg}(3\pi x) = \operatorname{tg}(5\pi x)$.

227. $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \cos 7x = 0$.

228. $\operatorname{tg}[\pi(x - 1)] \operatorname{ctg}[\pi(x - 1)] = 1$.

229. $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$.

230. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

231. $\sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) = \sin(2\pi x)$.

232. $\sin x \sin 5x = \sec 4x$.

233. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x$.

234. $\operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 4x + \operatorname{cosec} 8x = 0$.

235. $2\sqrt{3 \sin x} = \frac{3 \operatorname{tg} x}{2\sqrt{\sin x - 1}} - \sqrt{3}$.

236. $\sin^{10}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos^{10}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = a$.

237. Найти все значения x, для которых

$$\cos x = \frac{3}{5}, \quad \sin x = -\frac{4}{5}.$$

238. $\sin x + \sin 3x + \sin 7x = 3$.

239. Сколько корней на сегменте $[0, \pi]$ имеет уравнение

$$\operatorname{tg}(10x) = \sin x.$$

Решить уравнения (240—241).

240. $(a - 1)\sin^2 x + a \sin x - 2 = 0$.

241. $\sin(\pi \operatorname{tg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$.

242. Подобрать в уравнении $\operatorname{ctg}(m\cos 2\pi x)=\sqrt{3}$ коэффициент m так, чтобы уравнение имело корни $x=\pm\frac{1}{6}$, и затем найти при найденном значении m все остальные решения уравнения.

243. Решить уравнение

$$\sin\frac{\pi}{x}=1.$$

Сколько корней имеет это уравнение на отрезке

$$0{,}001\leqslant x\leqslant 0{,}002?$$

244. Решить уравнение

$$m(\cos x-\sin x)=\sqrt{1+\sin x\cos x}.$$

Положить $\sin\alpha=\dfrac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$; выразить решение данного уравнения через α.

Изучить расположение на тригонометрическом круге точек, соответствующих решениям. Доказать, что если $|m|>\frac{1}{2}$, данное уравнение имеет два корня, заключенные между $-\pi$ и π.

245. 1°. Решить уравнение

$$\cos mx=\cos(m-1)x.$$

В каком случае оно обращается в тождество?

Дать геометрическую интерпретацию для m целого положительного, большего 1.

Рассмотреть случаи $m=2$ и $m=3$.

2°. Найти значения $\cos x$ такие, что

$$\cos mx=\cos(m-1)x,$$

при $m=2$ и $m=3$.

3°. Применить 2° для вычисления сторон правильного треугольника и правильного пятиугольника (выпуклого и звездчатого), вписанного в окружность.

4°. Найти, какому уравнению удовлетворяет $\cos x$, если

$$\cos 3x=\cos 4x.$$

Доказать, что значения $\cos x\neq 1$ удовлетворяют уравнению третьей степени; дать геометрическую интерпретацию корням этого последнего уравнения.

§ 2. Системы тригонометрических уравнений

Решить следующие системы уравнений:

1.
$$x+y=\frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1.$$

2.
$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n},$$
$$x+y=\alpha.$$

3.
$$\cos(x+y):\cos(x-y)=\frac{1}{9},\quad \sin x\sin y=\frac{1}{3}.$$

4. $$\sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}.$$

5. $$\sin x \cos y = \frac{1}{4},$$
$$3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y.$$

6. $$x + y = \varphi,$$
$$\cos x \cos y = a.$$

7. $$\sin x = \operatorname{cosec} x + \sin y,$$
$$\cos x = \sec x + \cos y.$$

8. $$x + y = 135^\circ,$$
$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2.$$

9. $$y - x = 30^\circ,$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

10. $$\sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4},$$
$$\cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

11. $$\cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{4}.$$

12. $$x + y + z = \pi,$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3,$$
$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6.$$

13. $$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = a,$$
$$1 + b\cos y = \frac{1-b^2}{1-b\cos x}.$$

14. $$x + y = \frac{1}{3},$$
$$\sin(\pi x) + \sin(\pi y) = 1.$$

15. $$x + y = \frac{2}{3},$$
$$2\cos(\pi x) + 4\cos(\pi y) = 3.$$

16. $$x + y = \frac{2}{3},$$
$$\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(\pi y) = 2\sqrt{3}.$$

17. $$x + y = \frac{1}{4},$$
$$\cos(\pi x)\cos(\pi y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. $$\sin(\pi x) + \sin(\pi y) = \frac{3}{2},$$
$$\cos(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

19. $\sin(\pi x)\sin(\pi y)=\frac{3}{4}$,
$\operatorname{tg}(\pi x)\operatorname{tg}(\pi y)=3$.

20. $\frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi y)}=a$, $\frac{\cos(\pi x)}{\cos(\pi y)}=b$.

21. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}=a$,
$1+b\cos(\pi y)=\frac{1-b^2}{1-b\cos(\pi x)}$.

22. $\operatorname{tg}(\pi x)\operatorname{tg}(\pi z)=2$,
$\operatorname{tg}(\pi y)\operatorname{tg}(\pi z)=18$,
$x+y+z=1$.

23. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x+y}=0$, $xy=\frac{1}{32}$.

24. $\cos\left[\pi\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]=1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$.

25. $\arcsin x=\arccos y$,
$\cos\frac{7\pi}{x+y}=1$.

26. $\arcsin x=-\arccos y$,
$\cos[3\pi(x+y)]=1$.

27. $x^2+y^2=16$, $\operatorname{tg}[\pi(x-y)]=1$.

28. $\sin x+\sin y=a$, $\cos x+\cos y=b$, где $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

29. $\cos(x+y)=0$, $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{2}{3}$.

30. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2$.

31. $x+y=a$, $\sin x+\sin y=b$.

32. $x+y=a$, $\sin x+\cos y=b$.

33. $x+y=a$, $\sin x\cos y=b$.

34. $x+y=a$, $\cos x\cos y=b$.

35. $x+y=a$, $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=b$.

36. $x+y=a$, $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=b$.

37. $x+y=a$, $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=b$.

38. $x+y=54^\circ$, $\sin x\cos y=\frac{1}{4}$.

39. $\sin x=\cos 2y$, $\sin 2x=\cos y$.

40. $x+y=a$, $b\sin x+c\sin y=d$.

41. $x-y=a$, $b\cos x-c\cos y=d$.

42. $x+y=\frac{\pi}{2}$, $\sin(x+a)-\sin(x-a)+2\cos^2\frac{y}{2}=k$.

43. $3(\sin x-\sin y)=4(\sin 2x-\sin 2y)$,
$3(\cos x-\cos y)=4(\cos 2x-\cos 2y)$.

44. $\sin 2x+\sin 2y=3(\sin x+\sin y)$,
$\cos 2x+\cos 2y=\cos x+\cos y$.

45. $\cos x \sin y - \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 0, \quad \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1.$

46. $x + y + z = \pi, \quad \sin x : \sin y : \sin z = 2 : 3 : 4.$

47. $x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad \cos x : \cos y : \cos z = a : b : c.$

48. $x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{ctg} x : \operatorname{ctg} y : \operatorname{ctg} z = a : b : c.$

49. $x + y = 2z, \quad \sin x : \sin y : \sin z = a : b : c.$

50.
$$x(\sin y + \sin z) = a,$$
$$x(\cos y + \cos z) = b,$$
$$x(\sin 2x + \sin 2y) = c.$$

51. Найти самый общий вид решений неопределенной системы:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(y - z),$$
$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(z - x).$$

Как изменятся эти решения, если к заданным уравнениям добавить условие $\operatorname{tg} z = a \operatorname{tg}(x - y)$, где a — какое угодно число?

§ 3. Решение тригонометрических неравенств

Решить следующие неравенства:

1. $\sin^4 x - 6 \sin^2 x + 4 > 0.$

2. $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg}^3 x < 7{,}875.$

3. $4 \sin x \sin 3x > 1.$

4. $2 \sin x \sin 3x < 1.$

5. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1.$

6. $\sin^2 2x > \sin^2 x + \frac{1}{4}.$

7. $\operatorname{tg}^2 x + \sec 2x > 7 - \frac{10\sqrt{3}}{3}.$

8. $\sin x + \cos x < \sqrt{2}.$

9. $\sin x + a \cos x < a, \quad a \neq 0.$

10. $\sec x < 2 |\sin x + \cos x|.$

11. $\operatorname{cosec} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{cosec} \frac{x}{2}.$

12. $\sin 4x + 4 \sin 3x \cos x < 0.$

13. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\sin x}{\cos \frac{3x}{2}}.$

14. $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x.$

15. $\operatorname{tg} x (1 + \cos 2x) < \cos 2x \operatorname{tg} 2x.$

16. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0.$

17. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x > 1 + \operatorname{tg} x.$

18. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x > 0.$

19. $\operatorname{tg} 2x < \sin x + \operatorname{tg} x.$

20. $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x < 2.$

21. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 2.$

22. $\cos x > \sin^2 x - \cos^2 x.$

23. $4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) < \sin 6x.$

24. $\sin 7x \cos 7x < \frac{1}{2}(3 - 4 \sin^2 5x) \sin 5x.$

25. $\sin 5x + \cos 5x + \sin 7x + \cos 7x < 0.$

26. $\sin 7x + \sqrt{3} \cos 5x > \sin 5x + \sqrt{3} \cos 7x.$

27. $\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x.$

28. $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x.$

29. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2},$

30. $\sin(\pi x) > \cos(\pi \sqrt{x}).$

31. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) < \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}}.$

32. $\sin 3x < \sin x + \frac{1}{2}.$

33. $\operatorname{tg} 2x < 8 \cos^2 x - \operatorname{ctg} x.$

34. $\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cos x\right) < \cos\left(\frac{2\pi}{5} \sin x\right).$

35. $\cos^4\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) > \frac{3}{16}(2 \cos^2 x - 1).$

36. $\sin 5x > 16 \sin^5 x.$

37. $4 \sin x \sin 5x > 1.$

38. $8 \sin x \sin 2x \sin 3x \sin 4x < 3.$

39. $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x < \frac{3}{4}.$

40. $\sin^4 x + \cos^4 x > a.$

41. $\sin[\pi(x + 3\alpha)] < 3 \sin[\pi(\alpha - x)], \quad -1 < \alpha < 1.$

42. $\cos^2 \frac{2\pi}{5} + \cos^2(\pi x) + \cos^2\left[\pi\left(\frac{2}{5} + x\right)\right] < 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos\left[\pi\left(\frac{2}{5} + x\right)\right].$

43. $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) < 0.$

44. $\sin \frac{\pi}{x} > 0.$

45. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x + 1)} > 1.$

46. $\sin(2\pi \cos x) > 0.$

47. Изобразить графически множество решений неравенства

$$\sin[\pi(x + y)] > 0.$$

48. Изобразить графически множество всех решений следующей системы неравенств:

$$\operatorname{tg}[\pi(x + y)] > 0,$$
$$\operatorname{tg}[\pi(x - y)] > 0.$$

49. Изобразить графически множество всех решений неравенства $\sin(\pi x y) > 0.$

§ 4. Доказательство тригонометрических неравенств

Доказать следующие неравенства:

1. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

а) $\operatorname{tg} x > x$; б) $\sin x < x$; в) $\operatorname{ctg} x > \cos x$;

г) $\sin x \cos x < \frac{1}{2}$; д) $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$; е) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 2$.

2. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, то

а) $\sin(x+y) < \sin x + \sin y$; б) $\sin(x+y) < \cos x + \cos y$.

3. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ и $0 < x+y < \frac{\pi}{2}$,

то

а) $0 < \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y < 1$; б) $\operatorname{tg}(x+y) < \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.

4. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < \frac{\pi}{2}$,

$0 < x+y+z < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin(x+y+z) < \sin x + \sin y + \sin z.$$

5. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{\cos x} < \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}.$$

6. Если A, B, C — углы треугольника, то

а) $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant 1$;

б) $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{8}\sqrt{3}$;

в) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}$;

г) $\sin A + \sin B + \sin C \geqslant \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.

7. Доказать, что если

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2},$$

то

$$\alpha - \sin \alpha < \beta - \sin \beta.$$

8. Доказать, что если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

то

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geqslant 1.$$

9. Дано:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Доказать, что неравенства

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$$

будут выполнены тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha < 1.$$

10*. Доказать, что если

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},$$

то

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}.$$

11*. Доказать, что если

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},$$

то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

12. Доказать, что если

$$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2},$$

то

$$\sqrt{5+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\sqrt{5+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}+\sqrt{5+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

13. Доказать, что если

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},$$

то

$$\alpha-\operatorname{tg}\alpha<\beta-\operatorname{tg}\beta.$$

14. Доказать, что

$$\sin\frac{1}{n-1}-2\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n+1}>0,$$

где n — натуральное число, большее или равное 2.

15. Дано:

$$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

Доказать, что тогда

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant\frac{26}{27}.$$

16. Доказать, что если $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C\geqslant 1.$$

17. Доказать, исходя из равенства

$$\sin x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2},$$

что если

$$0<x<\frac{\pi}{2},$$

то

$$0<x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x.$$

18.** Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$0<x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x<x.$$

19.** Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$0<x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

20. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x > x - \frac{2x^3}{\pi}.$$

21. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1.$$

22. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$x + \cos x > \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right).$$

23.** Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

24.** Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

25. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}.$$

26. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x > x.$$

27. Исходя из результатов задач 18, 19, 21, 24, установить ошибку приближенных равенств:

1) $\sin x \cong x$; 2) $\cos x \cong 1$; 3) $\sin x \cong x - \frac{x^3}{6}$; 4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$,

считая $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

28. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{6}$, то приближенное равенство

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{6}$$

верно с точностью до 0,0005.

29. Доказать, что если

$$0 < x < \frac{\pi}{30},$$

то приближенное равенство

$$\sin x \cong x$$

верно с точностью до 0,0005.

30. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{10}$, то приближенное равенство

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

верно с точностью до 0,0005.

31. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{20}$, то приближенное равенство $\cos x \approx 1$ верно с точностью до 0,0005.

32. С какой точностью верно равенство

$$\sin 1^\circ = \sin 0{,}0175453 = 0{,}0175453?$$

§ 5. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком аркфункции

Решить следующие уравнения:

1. $\arcsin(1-x) - 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x = 0$.

3. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2}$.

4. $2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

5. $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right) = 1$.

6. $\arcsin x + \arccos(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

7. $\arccos x = \operatorname{arcctg} x$.

8. $\arcsin(3x+5) + \arcsin(1-x) = \frac{\pi}{4}$.

9. $\operatorname{arctg}(x^2+x) + \operatorname{arctg}(x^2-x) = \frac{\pi}{4}$.

10. $\arcsin(2x+1) = \arccos x$.

11. $\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} x$.

12. $\arcsin\frac{3x}{5} + \arcsin\frac{4x}{5} = \arcsin x$.

13. $\arccos\left(x\sqrt{3}\right) + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

14. $\arcsin 2x = 3\arcsin x$.

15. $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x} = 2\operatorname{arctg}(x-1)$.

16. $\arccos[\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} x)] = 0$.

17. $x = \operatorname{arcctg}(2\operatorname{ctg} x)$.

18. $\arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$.

19. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2}$.

20. $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1) = \frac{\pi}{2}$.

21. $\arcsin x - \arccos x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22. $\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg}(x-1) = \operatorname{arctg} 2$.

23. $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$.

24. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}=\operatorname{arc\,tg}a.$

25. $\operatorname{arc\,ctg}x+\operatorname{arc\,ctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}.$

26. $\arcsin x\cdot\arccos x=a^2.$

27. $\operatorname{arc\,tg}(x-1)+\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}(x+1)=\operatorname{arc\,tg}3x.$

28. $\arccos x=\operatorname{arc\,tg}x.$

29. $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}.$

30. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}.$

31. $\sin(n\operatorname{arc\,tg}x)=0$ (n — целое положительное число).

32. $\arcsin(ax)=\arccos(bx).$

33. $\arcsin 2x+\arcsin x=\frac{\pi}{3}.$

34. $2\arcsin x+\arccos(1-x)=0.$

35. $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3}{1}=0.$

36. $\arcsin 2x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{2x}=\frac{\pi}{2}.$

37. $(\operatorname{arc\,tg}x)^2+(\operatorname{arc\,ctg}x)^2=\pi^2.$

38. $(\arcsin x)^3+(\arccos x)^3=\pi^3.$

39. $\arcsin\frac{3x}{5}+\arcsin\frac{4x}{5}=\arcsin x.$

40. $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arc\,tg}(x-1).$

41. $\operatorname{arc\,tg}2x+\operatorname{arc\,tg}3x=\frac{3\pi}{4}.$

42. $\arcsin x=\operatorname{arc\,ctg}x.$

43. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2-x}}+\operatorname{arc\,tg}\left(1-x\sqrt{2}\right)=\operatorname{arc\,tg}x^2.$

44. $\arccos|x|=\arcsin 2x.$

45. $\operatorname{arc\,tg}(x+1)-\operatorname{arc\,tg}(x-1)=\frac{\pi}{12}.$

46. $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{3\pi}{2}.$

47. $2\operatorname{arc\,tg}(\cos x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sin x}\right).$

Решить следующие системы уравнений:

48. $\arcsin x\cdot\arcsin y=\frac{\pi^2}{12},\qquad \arccos x\cdot\arccos y=\frac{\pi^2}{24}.$

49. $\arcsin x+\arccos y=0,\qquad \arcsin y+\arccos x=\pi.$

50. $x^2+y^2=1,\qquad 2\arccos(x+y)+\frac{5\pi^2}{8\arccos(x+y)}=3\pi.$

51. $xy=1,\qquad \arcsin x+\arccos y=\frac{\pi}{2}.$

52. $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=\frac{\pi}{4},\qquad xy=-2.$

Решить следующие неравенства:

53. $\arcsin x > \arccos x$.

54. $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arcctg} x$.

55. $2 \arcsin x > \operatorname{arctg} x$.

56. $\arcsin x < \arccos(1 - x)$.

57. $\arcsin x - 2 \arccos x > \frac{\pi}{3}$.

§ 6. Трансцендентные уравнения

Решить следующие уравнения:

1. $\log_a(\sin x + \cos x) = 2$,

где a — положительное число, не равное 1, причем $a^2 \leqslant \sqrt{2}$.

2. $\arcsin(\log_{10} x) = 0$.

3. $\log_{10}(\arcsin x) = 0$.

4. $\arccos(\pi \log_3 \operatorname{tg} x) = 0$.

5. $\log_{\sin x} \frac{4}{3} = -2$.

6. $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}$.

7. $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

8. $\sin(5 \operatorname{arctg} 3x) = 1$.

9. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

10. $\operatorname{tg}(3 \operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(3 \operatorname{arcctg} x)$.

11. $\sqrt[3]{1 + \lg \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x} = 2$.

12. $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$.

13. $\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

14. $\log_{10}(\operatorname{arctg} x) + \log_{10}(\operatorname{arcctg} x) = a$.

Исследовать решения в зависимости от значений a.

15. $3x - \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}\right) = 0$.

16. $4 \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) = \pi$.

17. $\arcsin[\lg(x^2)] + \arcsin \lg x = \frac{\pi}{3}$.

18. $\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}\left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

19. $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

20. $\operatorname{arctg}(2 + \sin x) - \operatorname{arctg}(1 + \sin x) = \frac{\pi}{4}$.

21. $\arcsin 2^{x+2} + \arcsin\left(4\sqrt{3} \cdot 2^x\right) = \frac{\pi}{2}$.

22. $\operatorname{arc\,tg}\, 3^x - \operatorname{arc\,tg}\, 3^{-x} = \frac{\pi}{6}$.

23. $\sin(\pi \operatorname{arc\,tg}\, x) = \cos(\pi \operatorname{arc\,tg}\, x)$.

24. $\sin[\pi(\operatorname{arc\,tg} x^2)] = \frac{1}{2}$.

§ 7. Исследование элементарных функций

Найти области определения следующих элементарных функций:

1. $y = \arccos \frac{3}{x}$.

2. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

3. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x$.

4. $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$.

5. $y = \lg_{\frac{1}{2}} \arcsin(3x^2 + 4x)$.

6. $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$.

7. $y = \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$.

8. $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$.

9. $y = \lg_{10} \lg_{10} \lg_{10} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

10. $y = \lg(\sin x - \cos x)$.

11. $y = \lg_{\cos x} \sin x$.

12. $y = \sqrt{\lg_{10}(\cos 2\pi x)}$.

13. $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$.

Исследовать на возрастание и убывание следующие функции:

14. $y = x + \sin x$.

15. $y = \sin x + \cos^2 x$.

16. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

17. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

18. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

19. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

20. $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

21. Доказать, что функция $y = \sin x$ на сегменте $[0, \pi]$ выпукла вверх.

22. Доказать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ выпукла вниз.

Построить графики следующих функций:

23. $y = \sin 2x$.
24. $y = \cos 3x$.
25. $y = \sin \frac{x}{2}$.
26. $y = 2 \cos \frac{x}{3}$.
27. $y = \operatorname{tg} 5x$.
28. $y = \operatorname{ctg} \frac{2x}{3}$.
29. $y = \sin (2x + 3)$.
30. $y = 3 \cos \left(7\pi x - \frac{\pi}{7}\right)$.
31. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} [\pi (x - 1)]$.
32. $y = 3 \operatorname{ctg} [(2 - x)\pi]$.
33. $y = \sin x + \cos x$.
34. $y = \sin x + \sin 3x$.
35. $y = \sec x$.
36. $y = \operatorname{cosec} x$.
37. $y = 2 \sin x + 3 \cos x$.
38. $y = \sin \frac{1}{x}$.
39. $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$.
40. $y = \cos \frac{1}{x}$.
41. $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.
42. $y = \lg_{10} \sin x$.
43. $y = \sin (x^2)$.
44. $y = \arcsin (\sin x)$.
45. $y = \arccos (\cos x)$.
46. $y = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} x)$.
47. $y = \operatorname{arc\,ctg} (\operatorname{ctg} x)$.
48. $y = x - \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} x)$.
49. $y = x - \arcsin (\sin x)$.
50. $y = x \arcsin (\sin x)$.
51. $y = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} x) - \arcsin (\sin x)$.
52. $y = \arccos (\cos x) - \arcsin (\sin x)$.
53. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$.
54. $y = \operatorname{arc\,ctg} (\lg_{10} x)$.

55. $y = \arcsin \frac{1}{x^2}$.

53. $y = \lg_{10}(\arcsin x)$.

57. $y = \arcsin(\lg_{10} x)$.

53. $y = \sin(\operatorname{arctg} x)$.

§ 8. Разные задачи

Вычислить (без помощи таблиц):

1. $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$.

2. 1) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$; 2) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.

3. $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$.

4. $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

5. $\operatorname{tg}^2 36^\circ \operatorname{tg}^2 72^\circ$.

6. $\left(\cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13}\right)\left(\cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13}\right)\left(\cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{12\pi}{13}\right)$.

7. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

8. $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$.

9. $\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1}$.

10. $\sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n}$.

11. $\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1}$.

12. $\cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{3\pi}{4n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n}$.

13. $\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1}$.

14. $\cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1}$.

15. $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$.

16. $\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}$.

17. $\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13}$.

18. $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$.

19. $\cos \frac{2\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} - \cos \frac{7\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{15}$.

20. $\operatorname{ctg} 7^\circ,5 + \operatorname{tg} 67^\circ,5 - \operatorname{tg} 7^\circ,5 - \operatorname{ctg} 67^\circ,5$.

21. Доказать, что корни уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$$

суть $4\cos^2 \frac{\pi}{7}$, $4\cos^2 \frac{2\pi}{7}$ и $4\cos^2 \frac{3\pi}{7}$.

22. Доказать, что корни уравнения

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$$

суть $\operatorname{tg}^2 20°$, $\operatorname{tg}^2 40°$ и $\operatorname{tg}^2 80°$.

23. Доказать, что

$$\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\cos\frac{11\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}.$$

24. Найти $\sin x$ из уравнения

$$\sin a + \sin(x - a) + \sin(2x + a) = \sin(x + a) + \sin(2x - a),$$

причем $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

25. Найти $\operatorname{tg} x$ из уравнения

$$2\cos x\cos(a - x) = \cos a.$$

26. Найти $\operatorname{tg} 2x$ из уравнения

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

27. Преобразовать в произведение

$$\operatorname{ctg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x - 8\cos 4x \operatorname{ctg} 4x.$$

28. Найти алгебраические связи между углами x, y, z, если

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z.$$

Найти затем при этом условии наименьшие положительные значения углов x, y, z, если известно, что

$$x = \frac{y+z}{2} \quad \text{и} \quad z = \frac{x+y}{2}.$$

29. Сколько корней имеет уравнение

$$x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x = 1.$$

30. Сколько корней, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant x < 2\pi,$$

имеет уравнение

$$\sin 2x = \lg \sin x.$$

31. Дано $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 2$. Найти $\alpha + \beta$.

32. Дано: $\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$. Найти $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$.

33. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и $0 < \alpha < 45°$.

34. Выразить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ через A и B, если

$$\sin\alpha = A\sin\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta.$$

35. При каких значениях a и b возможно равенство

$$\sin a + \sin b = \sin(a + b)?$$

36. Дано $\cos x = \frac{3}{4}$. Вычислить $32\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}$.

37. При каких значениях n выражение

$$\frac{\sin nx}{\sin\frac{x}{n}}$$

имеет период 4π.

38. Известно, что $\sin\beta=\frac{4}{5}$. Чему равно выражение

$$\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)-2\sec\frac{\pi}{6}\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha},$$

а) если угол β острый; б) если угол β тупой?

39. Вычислить без таблиц:

а) $(\operatorname{tg}7°30'+\operatorname{tg}37°30'+\operatorname{tg}67°30')(\operatorname{tg}22°30'+\operatorname{tg}52°30+\operatorname{tg}82°30')$;

б) $\left(2\sin\frac{\pi}{16}\right)^{16}+\left(2\cos\frac{\pi}{16}\right)^{16}$.

40. Найти наибольшее и наименьшее значение каждой из следующих функций:

а) $a\cos x+b\sin x$;

б) $a\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x$.

41. Вычислить:

а) $\cos 18°$; б) $\cos\frac{\pi}{32}$; в) $\sin\frac{\pi}{32}$; г) $\sin 9°$;

д) $\cos 9°$; е) $\sin 15°$; ж) $\cos 15°$; з) $\operatorname{tg}15°$;

и) $\sin 7°30'$; к) $\cos 7°30'$; л) $\operatorname{tg}7°30'$;

м) $\operatorname{tg}22°30'$; н) $\operatorname{ctg}22°30'$; о) $\cos 33\frac{3°}{4}$;

п) $\operatorname{tg}142°30'$.

42. Найти $\operatorname{tg}a+\operatorname{ctg}a$, если $a=\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi$.

43. Доказать, что

а) $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{1}{2}$;

б) $\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}+\ldots+\cos\frac{20\pi}{21}=-\frac{1}{2}$.

44. При каком значении x функция

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{9}\right)$$

принимает наибольшее и наименьшее значения?

45. Найти угол x, если известно, что

а) $0<x<\frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{x}{\pi}$ — число рациональное;

в) $\cos x$ — число рациональное.

46. Рассмотрим функцию

$$y=\cos^2 x+\sin x\cos x,$$

где

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

1°. Выразить y через $\operatorname{tg}x$.

2°. Дано значение y. Вычислить $t=\operatorname{tg}x$. Исследовать. Исследовать знаки соответствующих значений y.

3°. Доказать, что между двумя решениями t' и t'', соответствующими заданному значению y, существует соотношение, не зависящее от y.

4°. Можно ли выбрать y так, чтобы для двух соответствующих значений x' и x'' удовлетворялось условие

$$\operatorname{tg}2x'=\operatorname{tg}2x''?$$

Вычислить в этом случае $\operatorname{tg}x'$ и $\operatorname{tg}x''$.

Глава XXX

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 1. Тригонометрические соотношения между элементами треугольника

В настоящей главе * принимаются следующие обозначения: A, B, C — вершины и соответствующие внутренние углы треугольника ABC; a, b, c — стороны, соответственно противолежащие углам A, B, C;

$2p$ — периметр;

h_a, h_b, h_c — длины высот;

m_a, m_b, m_c — длины медиан;

l_a, l_b, l_c — длины биссектрис внутренних углов A, B, C;

l_a^*, l_b^*, l_c^* — длины биссектрис внешних углов A, B, C;

s — площадь;

R — радиус описанной окружности;

r — радиус вписанной окружности;

r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей;

A_1, B_1, C_1 — основания высот;

A', A'', A''' — середины сторон BC, CA и AB;

D_1, D_2, D_3 — точки пересечения биссектрисс внутренних углов A, B, C с противоположными сторонами;

D_1', D_2', D_3' — точки пересечения биссектрисс внешних углов треугольника ABC с противоположными сторонами;

O' — центр описанной окружности;

O, O_a, O_b, O_c — центры вписанной и вневписанных окружностей;

O'' — точка пересечения медиан;

M — точка пересечения высот;

E_1, E_2, E_3 — точки прикосновения вписанной окружности со сторонами BC, CA и AB;

F_a', F_b', F_c', F_a'', F_b'', F_c'' — точки, в которых стороны или их продолжения касаются вневписанных окружностей.

Доказать (№ 1—15), что во всяком прямоугольном треугольнике имеют место следующие соотношения (C — прямой угол):

1. $$\sin A + \cos A = \sin B + \cos B.$$

2. $$(\sin A + \cos B) : (\sin B + \cos A) = \operatorname{tg} A.$$

3. $$b - a = c\sqrt{2}\sin\frac{B-A}{2}; \quad b + a = c\sqrt{2}\cos\frac{B-A}{2}.$$

4. $$\frac{b-a}{b+a} = \operatorname{tg}\frac{B-A}{2}.$$

5. $$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{2c}}, \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c+a}{2c}}.$$

---

* Если нет оговорок, указывающих на другие обозначения.

6. $$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}=\frac{c-a}{b}=\frac{b}{c+a}.$$

7. $$\sec 2B-\operatorname{tg}2A=\frac{a+b}{a-b}.$$

8. $$s=\frac{c^2}{4}\sin 2B.$$

9. $$\operatorname{tg}2A=\frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

10. $$\sin(B-A)=\frac{b^2-a^2}{c^2}.$$

11. $$\cos(B-A)=\frac{2ab}{c^2}.$$

12. $$\cos(2B-A)=\frac{3bc^2-4b^3}{c^3}.$$

13. $$p=c\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

14. $$h_c=\frac{c}{2}\sin 2B=2p\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

15. $$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}-\frac{\cos^2 B}{\sin^2 A}=\frac{c^2(b^2-a^2)}{a^2b^2}.$$

Доказать (№ 16—26), что при выполнении следующих условий треугольник будет прямоугольным ($\widehat{C}=90^\circ$):

16. $$2[1-\cos(B-A)]:(1-\cos 2B)=(b-a)^2:b^2.$$

17. $$\left(1-\frac{r_c}{r_a}\right)\left(1-\frac{r_c}{r_b}\right)=2.$$

18. $$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{a+c}{b}.$$

19. $$s=p(p-c)=(p-a)(p-b).$$

20. $c:a:b=a_5:a_6:a_{10}$ (a_5, a_6, a_{10} — стороны правильных вписанных в один и тот же круг 5-, 6- и 10-угольников).

21. Если расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот равно половине одной из сторон треугольника.

22. $$8R^2=a^2+b^2+c^2.$$

23. $$r_c=r+r_a+r_b.$$

24. $$rr_c=r_ar_b.$$

25. $$\sin C\cos B\cos A=\frac{\sin B+\sin A}{\sec B+\sec A}.$$

26. $$\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1.$$

Доказать (№ 27—31), что при выполнении следующих условий треугольник будет или прямоугольный или равнобедренный:

27. $$(b^2+c^2)\sin(C-B)=(c^2-b^2)\sin(C+B).$$

28. $$\operatorname{tg}B:\operatorname{tg}A=\sin^2 B:\sin^2 A.$$

29. $$\frac{\cos C+2\cos A}{\cos C+2\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

30. Если квадраты двух сторон относятся как их проекции на третью сторону.

31. $1+\operatorname{ctg}(45^\circ - B) = 2:(1-\operatorname{ctg} A)$, $4s = c^2$ (и равнобедренный и прямоугольный).

Доказать, что во всяком треугольнике имеют место следующие соотношения:

32. $$\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}.$$

33. $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

34. $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

35. $$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{p-b}{p-a}.$$

36. $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}.$$

37. $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{b}{p}.$$

38. $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{p-c}{c}\sin\frac{C}{2}.$$

39. $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{p}{c}\sin\frac{C}{2}.$$

40. $$\frac{a(a+c-b)}{b(b+c-a)} = \frac{1-\cos A}{1-\cos B}.$$

41. $$s = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

42. $$s = aR\sin B\sin C.$$

43. $$s = 2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

44. $$s(\sin A+\sin B+\sin C) = 2pR\sin A\sin B\sin C = p^2(\cos A+\cos B+\cos C-1).$$

45. $$s = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

46. $$s = (p-b)(p-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

47. $$s^2 = abcp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

48. $$s^2 = abc(p-a)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

49. $$s = p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

50. $$s = (p-a)^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

51. $$ps = abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

52. $$\frac{p^2}{c} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

53. $$s = \frac{b^2+c^2-a^2}{4}\operatorname{tg} A.$$

54. $$4s = \frac{a^2+b^2+c^2}{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C} = \frac{(a^2+b^2+c^2)\sin A\sin B\sin C}{2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}.$$

55. $$a+b=4R\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

56. $$a-b=4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

57. $$a+b+c=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

58. $$a+b-c=8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

59. $$a^2-b^2=4R^2\sin C\sin(A-B).$$

60. $$(a+b)^2-c^2=16R^2\sin A\sin B\cos^2\frac{C}{2}.$$

61. $$a^2-(b-c)^2=16R^2\sin B\sin C\sin^2\frac{A}{2}.$$

62. $$2R\sqrt[3]{h_ah_bh_c}=\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

63. $$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C.$$

64. $$2sp^2=Rp^2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=8abc\,R\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}.$$

65. $$bc\sin^2A=a^2(\cos A+\cos B\cos C).$$

66. $$a(\cos A+\cos B\cos C)=b(\cos B+\cos A\cos C)=c(\cos C+\cos A\cos B).$$

67. $$\frac{\sin^2A}{a^2}=\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}.$$

68. $$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

69. $$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$$

70. $$a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0.$$

71. $$\frac{a^3\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^3\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^3\sin(A-B)}{\sin C}=0.$$

72. $$(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C+(b^2-c^2)\operatorname{ctg}A+(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B=0.$$

73. $$a\sin(B-C)\cos(B+C-A)+b\sin(C-A)\cos(C+A-B)+$$
$$+c\sin(A-B)\cos(A+B-C)=0.$$

74. $$\frac{bh_a}{c}+\frac{ch_b}{a}+\frac{ah_c}{b}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}.$$

75. $$a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=12Rs.$$

76. $$(a^2+c^2)[1+\cos C\cos(A-B)]=(a^2+b^2)[1+\cos B\cos(A-C)].$$

77. $$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C).$$

78. $$a\cos A+b\cos B+c\cos C=$$
$$=\frac{1}{2}[a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)].$$

79. $$a^2\cos^2A-b^2\cos^2B-c^2\cos^2C=2bc\cos B\cos C\cos 2A.$$

80. $$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)=c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

81. $$\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

82. $$\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}.$$

83. $$\frac{\cos 2a}{a^2}+\frac{\cos 2B}{b^2}+\frac{\cos 2C}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{3}{2R^2}.$$

84. $bc\cos A - ac\cos B = b^2 - a^2$.

85. $bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

86. $bc(b^2 - c^2)\cos A + ac(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$.

87. $(b+c)\cos A + (a+c)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$.

88. $\frac{\cos A}{c\cos B + b\cos C} + \frac{\cos B}{c\cos A + a\cos C} + \frac{\cos C}{a\cos B + b\cos A} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

89. $(b-c)(p-a)\cos A + (c-a)(p-b)\cos B + (a-b)(p-c)\cos C = 0$.

90. $2abc(\cos A + \cos B) = (a+b)(c+b-a)(c+a-b)$.

91. $2abc(\cos A - \cos B) = (b-a)(a+b+c)(a+b-c)$.

92. $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)$.

93. $\frac{b^2-c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A + \cos B} = 0$.

94. $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c - b\cos A}{b - c\cos A}$.

95*. $(b - a\cos C)\operatorname{tg} A = a\sin C$.

96. $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$.

97. $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{a(a - b\cos C)}{b(b - a\cos C)}$.

98. $s = \frac{1}{4}(c^2\sin 2B + b^2\sin 2C)$.

99. $a^2 - b^2 = 2s(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$.

100. $b\cos^2\frac{A}{2} + a\cos^2\frac{B}{2} = p$.

101. $b\sin^2\frac{A}{2} + a\sin^2\frac{B}{2} = p - c$.

102. $(b+c)\cos^2\frac{A}{2} + (a+c)\cos^2\frac{B}{2} + (a+b)\cos^2\frac{C}{2} = 3p$.

103. $(b+c)\sin^2\frac{A}{2} + (a+c)\sin^2\frac{B}{2} + (a+b)\sin^2\frac{C}{2} = p$.

104. $bc\cos^2\frac{A}{2} + ac\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = p^2$.

105. $(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

106. $(p-a)\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

107. $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$.

108. $(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2} + (c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + (b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 0$.

109. $\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 0$.

* В задачах № 95—99 предполагается, что все углы треугольника — острые.

110. $$a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}=p+\frac{s}{R}.$$

111. $$\frac{a^2\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\dfrac{A-C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=2(ab+ac+bc).$$

112. $$a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

113. $$bc\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+ac\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+ab\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=4Rp^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{p}\right).$$

114. $$(b+c)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+(a+c)\operatorname{tg}\frac{B}{2}+(a+b)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$$
$$=4R(\cos A+\cos B+\cos C).$$

115. $$h_a\cos\frac{A}{2}=2p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

116. $$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\operatorname{cosec}A:\operatorname{cosec}B:\operatorname{cosec}C.$$

117. $$a\sin A+b\sin B+c\sin C=2(h_a\cos A+h_b\cos B+h_c\cos C).$$

118. $$\cos A=\frac{1}{2}\left(\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}-\frac{h_bh_c}{h_a^2}\right).$$

119. $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-\alpha_2)(P-\alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3}},\quad\text{где}\quad\alpha_1=h_bh_c,\quad\alpha_2=h_ch_a,$$
$$\alpha_3=h_ah_b\quad\text{и}\quad 2P=h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b.$$

120. $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{P(P-\alpha_1)}{\alpha_2\alpha_3}}\quad\text{(см. предыдущую задачу).}$$

121. $$\cos A=\frac{4m_a^2-a^2}{4bc}.$$

122. $$\operatorname{ctg}A=\frac{4m_a^2-a^2}{8s}.$$

123. $$\frac{l_a}{l_a^*}=\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}\quad(\widehat{C}>\widehat{B}).$$

124. $$\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{l_a}+\frac{\cos\dfrac{B}{2}}{l_b}+\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{l_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

125. $$e_a=\frac{h_a}{\cos\dfrac{B-C}{2}}=\frac{2s}{a\cos\dfrac{B-C}{2}}=\frac{2s}{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}}=$$
$$=\frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}=\frac{2p\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}.$$

126. $$l_a^*=\frac{h_a}{\sin\dfrac{C-B}{2}}=\frac{2s}{a\sin\dfrac{C-B}{2}}=\frac{2s}{(c-b)\cos\dfrac{A}{2}}=$$
$$=\frac{2bc\sin\dfrac{A}{2}}{c-b}=\frac{2p\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C-B}{2}}\quad(c>b).$$

127. $$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

128. $$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

129. $$r=\frac{h_a\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

130. $$r=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

131. $$r^2=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

132. $$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

133. $$r_a=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{c\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

134. $$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=(p-c)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.$$

135. $$r_a=\frac{s}{p-a}.$$

136. $$r_a=\frac{h_a\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

137. $$r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=r_a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=r_b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=r_c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

138. $$r_a^2=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

139. $$Rr=\frac{s}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

140. $$rr_a=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)(p-c).$$

141. $$r_ar_b=s\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=p(p-c).$$

142. $$r_a-r=a\operatorname{tg}\frac{A}{2}=4R\sin^2\frac{A}{2}.$$

143. $$(r_a-r):(r_b-r):(r_c-r)=\sin^2\frac{A}{2}:\sin^2\frac{B}{2}:\sin^2\frac{C}{2}.$$

144. $$r_a-r_b=(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

145. $$r_a+r_b=c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=4R\cos^2\frac{C}{2}.$$

146. $$(r_b+r_c):(r_c+r_a):(r_a+r_b)=\cos^2\frac{A}{2}:\cos^2\frac{B}{2}:\cos^2\frac{C}{2}.$$

147. $$r+r_a+r_b-r_c=4R\cos C.$$

148. $(r_a+r_b+r_c-r):(-r_a+r_b+r_c+r):(r_a-r_b+r_c+r):(r_a+r_b-r_c+r)=1:\cos A:\cos B:\cos C$.

149. $\dfrac{rr_a}{r_br_c}=\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}$.

150. $\dfrac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}=\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2}$.

151. $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{h_a-2r}{h_a}=\dfrac{h_a}{2r_a+h_a}$.

152. $\left(\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\right)^2=\dfrac{(r_a+r_b+r_c)^2}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}$.

153. $a\operatorname{ctg}A+b\operatorname{ctg}B+c\operatorname{ctg}C=2(R+r)$.

154. $(p-a)^2\sin A+(p-b)^2\sin B+(p-c)^2\sin C=4r(2R-r)\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

§ 2. Решение треугольников

Решить прямоугольный треугольник по следующим данным (C — прямой угол):

1. R, $\dfrac{b}{a}=m$.
2. c, $\dfrac{s}{p^2}=m$.
3. r_c, $\dfrac{r}{R}=2m-1$.
4. s, $b^2=2ac$.
5. m_c, $\dfrac{m_b}{m_a}=m$.
6. c, h_c.
7. c, p.
8. c, r.
9. c, s.
10. c, l_c.
11. c, m_b.
12. c, $b-a=k$.
13. s, l_c.
14. h_c, s.

Найти углы прямоугольного треугольника по следующим данным:

15. $\dfrac{2p}{c}=m$.
16. $\dfrac{b}{2p}=\dfrac{1}{m}$.
17. $\dfrac{s}{c^2}=m$.
18. $\dfrac{s}{p^2}=m$.
19. $\dfrac{c}{r}=\dfrac{1}{m}$.
20. $\dfrac{c}{h_c}=m$.
21. $\dfrac{p}{h_c}=m$.
22. $\dfrac{r_c}{R}=m$.
23. $\dfrac{r}{r_c}=m$.

Решить произвольный треугольник по следующим данным:

24. A, B, C, R.
25. A, B, C, h_a.
26. A, B, C, s.
27. A, B, C, $a+b=k$.
28. A, B, C, $a-b=k$.
29. A, B, C, p.
30. A, B, C, $p-a$.
31. A, B, C, l_a.
32. A, B, C, l_a^* $(b>c)$.
33. A, B, C, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{k}$.
34. A, B, C, m_a.

35. A, B, C, $h_a + h_b$.

36. A, B, C, $h_a + h_b + h_c$.

37. A, B, C, r.

38. A, B, C, r_a.

39. A, B, C, $r_a + r_b + r_c$.

40. A, B, C, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{k}$.

41. A, B, a.

42. A, a, $\frac{b}{c}$.

43. A, b, $\frac{a}{c}$.

44. A, a, $\frac{b-a}{c}$.

45. A, a, $\frac{h_b}{h_c}$.

46. A, a, $\frac{b-c}{h_a} = m$.

47. A, r, $\frac{s}{ac} = m$.

48. a, C, $\frac{r + r_a}{r_b + r_c} = m$.

49. a, A, $\frac{h_b + h_c}{h_a} = m$.

50. A, m_a, $\frac{m_b}{b} = \sqrt{m - \frac{1}{4}}$.

51. A, s, $\frac{r_a + r_b + r_c}{r} = 4m + 1$.

52. a, $\frac{b}{c} = m$, $\frac{h_a}{h_b} = n$.

53. R, $ab : ac : bc = m : n : q$.

54. a, b, $A - B = 2k$.

55. a, b, $\sin C : \sin A = k$.

56. a, b, $\cos A : \cos B = m$.

57. a, b, h_a.

58. a, b, h_c.

59. a, b, s.

60. a, b, R.

61. a, b, l_c.

62. a, b, m_c.

63. a, b, $r_a = 3r$.

64. a, b, $rr_a r_b r_c = k^4$.

65. a, b, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = m$.

66. a, B, h_a.

67. a, B, $b + c = k$.

68. a, B, m_a.

69. a, B, m_b.

70. a, B, m_c.

71. a, B, R.

72. a, B, r_b.

73. a, B, $r_b + r_c = k$.

74. a, B, l_c.

75. a, B, l_b.

76. a, B, $m_b^2 - m_c^2 = k^2$.

77. a, A, h_a.

78. a, A, $2p$.

79. a, A, $b^2 - c^2 = k^2$.

80. a, A, $b^2 + c^2 = k^2$.

81. a, A, $b(b - c) = k^2$.

82. a, A, $h_b + h_c = k$.

83. a, A, $\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = k$.

84. a, A, m_a.

85. a, A, m_b.

86. a, A, l_a.

87. a, A, r.

88. a, A, r_a.

89. a, A, r_b.

90. a, A, $r_a + r_b = k$.

91. a, A, $r_a - r_b = k$.

92. h_a, h_b, A.

93. h_a, h_b, $A - B = 2k$.

94. h_a, h_b, h_c.

95. h_a, h_b, r.

96. h_a, h_b, $r_a - r_b = k$.

97. h_a, h_b, $\frac{c}{a} = m$.

98. h_a, h_b, $\frac{a}{R} = m$.

99. h_a, h_b, m_c.

100. h_a, h_b, m_a.

101. m_a, m_b, m_c.

102. m_a, m_b, A.

103. m_a, m_b, C.

104. m_a, m_b, $\frac{r_a}{r_b} = 3$.

105. a, h_a, $b + c = k$.

106. $a,\ h_a,\ B-C=k.$

107. $a,\ h_a,\ \frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=k.$

108. $a,\ h_a,\ r.$

109. $a,\ h_a,\ r_a.$

110. $a,\ h_a,\ r_c.$

111. $a,\ h_a,\ r_b+r_c=k.$

112. $a,\ h_a,\ r_b-r_c=k.$

113. $a,\ h_a,\ r_br_c=k^2.$

114. $a,\ m_a,\ b+c=k.$

115. $a,\ m_a,\ p.$

116. $a,\ m_a,\ s.$

117. $a,\ m_b,\ b+c=k.$

118. $a,\ m_b,\ s.$

119. $a,\ l_a,\ b+c.$

120. $a,\ l_a,\ b-c=k.$

121. $a,\ l_a,\ bc=k^2.$

122. $a,\ l_a,\ s.$

123. $a,\ l_a,\ B-C=2k.$

124. $a,\ l_a,\ R.$

125. $a,\ l_a,\ r_b+r_c=k.$

126. $a,\ l_b,\ b+c=k.$

127. $a,\ l_b,\ b-c=k.$

128. $a,\ l_b,\ p.$

129. $a,\ l_b,\ 2C+B=2k.$

130. $a,\ r,\ B-C=2k.$

131. $a,\ r,\ s.$

132. $A,\ h_a,\ m_a.$

133. $A,\ h_a,\ b+c=k.$

134. $A,\ h_a,\ b-c=k.$

135. $A,\ h_a,\ p.$

136. $A,\ h_a,\ h_b+h_c=k$

137. $A,\ h_a,\ h_bh_c=k^2.$

138. $A,\ h_a,\ r.$

139. $A,\ h_a,\ r_a.$

140. $A,\ m_a,\ b+c=k.$

141. $A,\ m_a,\ b^2-c^2=k^2.$

142. $A,\ m_a,\ p.$

143. $A,\ m_a,\ h_b+h_c=k.$

144. $A,\ m_a,\ r.$

145. $A,\ m_b,\ r_b-r_c=k.$

146. $A,\ l_a,\ b+c=k.$

147. $A,\ l_a,\ b-c=k.$

148. $A,\ l_a,\ p.$

149. $A,\ l_a,\ r.$

150. $A,\ s,\ R.$

151. $A,\ s,\ p.$

152. $A,\ s,\ p-b=k.$

153. $A,\ r,\ \frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=m.$

154. $A,\ r,\ r_a.$

155. $A,\ r,\ r_b.$

156. $A,\ r,\ \frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}=m.$

157. $A,\ r_a,\ b-c=k.$

158. $A,\ r_a,\ a-b=k.$

159. $A,\ r_a,\ h_b-h_c=k.$

160. $A,\ r_a,\ \frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}=m.$

161. $A,\ r_b,\ b+c=k.$

162. $A,\ r_b,\ a+c=k.$

163. $A,\ r_b,\ a+b=k.$

164. $A,\ r_b,\ a-b=k.$

165. $A,\ r_b,\ p-b=k.$

166. $A,\ r_b,\ bc=k^2.$

167. $h_a,\ l_a,\ b+c.$

168. $h_a,\ l_a,\ p.$

169. $h_a,\ l_a,\ m_a.$

170. $h_a,\ l_a,\ r.$

171. $h_a,\ r_a,\ l_a.$

172. $h_a,\ l_a,\ r_b+r_c=k.$

173. $h_a,\ l_a,\ r_b-r_c=k.$

174. $h_a,\ l_a,\ \frac{r_b+r_c}{r_a}=m.$

175. $m_a,\ b+c=k,\ h_b-h_c=q.$

176. $m_a,\ b+c=k,\ r_b+r_c=q.$

177. $m_a,\ b+c=k,\ h_b+h_c=q.$

178. $m_a,\ bc=q^2,\ r_b-r_c=q.$

179. $m_a,\ bc=q^2,\ \frac{r_b}{r_c}=m.$

180. $m_a,\ \frac{b}{c}=m,\ r_b+r_c=k.$

181. m_a, $\frac{b}{c}=m$, $r_b r_c=k^2$.

182. R, r, $\frac{b+c}{a}=m$.

183. R, r, $\frac{r_b}{r_c}=m$.

184. R, r, $a-b=k$.

185. r_a, R, $b-c=k$.

186. R, r_a, $\frac{r_b}{r}=m$.

187. r, r_a, $b+c=k$.

188. r, r_a, $b-c=k$.

189. r, r_a, $B-C=2k$.

190. r, r_a, r_b.

191. r, r_a, $h_b+h_c=k$.

192. r_a, r_b, r_c.

193. r_a, r_b, h_a.

194. r_a, r_b, $a^2+b^2=k^2$.

195. r_a, r_b, $A-B=2k$.

196. r_a, r_b, $h_a-h_b=k$.

197. R, h_a, p.

198. R, h_a, $\frac{r_b}{r_c}=m$.

199. R, h_a, $b^2+c^2=k^2$.

200. p, h_a, $B-C=2k$.

201. p, h_a, $r_b+r_c=k$.

202. $p-c=q$, h_a, R.

203. s, p, $r_b+r_c=k$.

204. $a+b=k$, h_c, r.

205. $a+b=k$, h_c, $r_a+r_b=q$.

206. $a-b=k$, h_c, r.

207. h_c, r_c, $h_a+h_b=k$.

208. h_c, r_c, $\frac{a}{b}=m$.

209. h_c, r_c, $r_a-r_b=k$.

210. h_c, r_c, $h_b-h_a=k$.

Решить, не применяя таблиц, следующие задачи:

211. $m_b^2-m_c^2=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, $B=15°$. Найти другие углы.

212. $h_a=8$, $h_b=6$, $m_c=5$. Определить угол C.

213. $h_a=3\sqrt{3}$, $h_b=4\sqrt{3}$, $m_a=2\sqrt{7}$. Определить угол C.

214. $a=3$, $m_a=2$, $h_b^2+h_c^2=\frac{5}{2}$. Определить $\sin A$.

215. $A=36°$, $h_a=\sqrt{5}+1$, $\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}$. Найти углы B и C.

216. $a-b=1$, $h_c=2$, $A=30°$. Определить $\sin B$.

217. $a-b=1$, $h_c=\frac{3}{2}$, $R=4$. Определить углы.

218. $a=\sqrt{5}$, $b=1$, $l_c=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Определить угол C.

219. $B=18°$, $a=\sqrt{5}+1$, $l_c=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Определить угол C.

220. $a=3$, $b+c=9$, $l_b=\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Определить угол C.

221. $h_a=\sqrt{3}$, $l_a=2$, $B-A=15°$. Определить углы.

222. $bc=5$, $l_a=2$, $h_a=\frac{5-\sqrt{5}}{4}$. Определить угол A.

223. $s=8$, $h_a=3$, $l_a=4$. Определить $\sin(B-C)$ и $\operatorname{tg} A$.

224. $h_a=2$, $l_a=\sqrt{13}$, $b=2c$. Определить $\operatorname{tg} A$.

225. $h_a=l_a\cos 40°$, $2h_b=a$. Определить углы.

226. $h_a=4$, $l_a=5$, $3(b+c)=8(h_b-h_i)$. Определить угол A.

227. $a=6$, $r=1$, $\cos B=\frac{4}{5}$. Определить $\sin C$.

228. $A=108^\circ$, $h=\sqrt{5}$, $r=1$. Определить углы.

229. $\cos A=\frac{4}{5}$, $a-c=2$, $r=1$. Определить $\operatorname{tg} C$.

230. $A=60^\circ$, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{3}$, $r=3$. Определить углы.

231. $r=1$, $p-c=\sqrt{3}$, $R=2\sqrt{3}$. Определить $\cos(A-B)$.

232. $rr_ar_br_c=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9}$, $a=\frac{4}{3}$, $b=2$. Определить угол C.

233. $r_a-r_b=2$, $a=7$, $b=5$. Определить угол C.

234. $r=1$, $r_a=\sqrt{2}$, $a=1$. Определить угол A.

235. $r_a=\sqrt{3}+1$, $r=\sqrt{3}-1$, $A=60^\circ$. Определить углы.

236. $h_a=l_a\sin 77^\circ$, $r_br_c=3rr_a$. Определить углы.

237. $R=4$, $r=\sqrt{5}$, $r_c=6-\sqrt{5}$. Определить угол C.

238. $R=1$, $r_a=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $A-B=60^\circ$. Определить углы.

239. Вычислить тангенсы углов треугольника, если

$$r:r_a:r_b=1:2:3.$$

240. Вычислить тангенсы углов треугольника, если $r=2$, $r_a=3$, $h_b=5$.

241. $r=1$, $r_a=2$, $\frac{r_b}{r_c}=\frac{3}{2}$. Определить угол C.

242. $R=8$, $h_a=2\sqrt{5}-3$, $r_b=\sqrt{5}-1$. Определить угол A.

243. $p=3$, $\cos A=\frac{3}{5}$, $r_a+r_b=\frac{5}{2}$. Определить углы.

244. $r_a=1$, $p=3$, $\frac{b}{c}=\frac{7}{2}$. Определить углы.

245. $\sin A=0{,}96$; $B=18^\circ$; $a=1{,}44(\sqrt{5}+1)$. Определить b.

246. $a+b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $A=132^\circ$, $B=12^\circ$. Определить c.

247. $p=\sqrt{3}$, $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{B}{2}$, $C=60^\circ$. Определить a.

248. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\sin B=\frac{5}{13}$, $5a+13b+65c=320$.

Определить a, b и c.

249. $A=30^\circ$, $b=3\sqrt{3}$, $a+c=3h_b$. Определить a и c.

250. $a=\sqrt{2}$, $b=1$, $A-B=45^\circ$. Определить c.

251. $b=13$, $a=12$, $13\cos A=20\cos B$. Определить c.

252. $s=4$, $b-c=3$, $A=90^\circ$. Определить a, b и c.

253. $a=2$, $p=\frac{9}{2}$, $s=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. Определить b и c.

254. $b=R$, $a=2R$, $h_a=3$. Определить R.

255. $a=\sqrt{5}$, $h_a=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $b=2c$. Определить b и c.

256. $A=18^\circ$, $h_a=2(\sqrt{5}-1)$, $bc=8\sqrt{2}$. Определить a.

257. $\sin A = \frac{3}{5}$, $h_a = \frac{3}{4}$, $b^2 + c^2 = 15$. Определить стороны.

258. $A = 30^\circ$, $h_b + h_c = \frac{5}{2}$, $s = \frac{3}{2}$. Определить b и c.

259. $h_a h_b = \sqrt{5} - 1$, $C = 18^\circ$. Определить s.

260. $h_a = 1$, $p = 3$, $s = 1$. Определить стороны.

261. $p - a = 2$, $h_a = 1$, $s = 1$. Определить стороны.

262. $s = 1$, $h_a = p - c = 1$. Определить стороны и угол A.

263. $A = 60^\circ$, $m_b = 8$, $b + c = a\sqrt{3}$. Определить стороны.

264. $m_a = 3$, $m_b = \frac{3}{2}$, $s = 3$. Определить a.

265. $a = \sqrt{14}$, $m_a = 3$, $bc = 12$. Определить b и c.

266. $m_a = 4$, $h_a = 3$, $A = 45^\circ$. Определить a и b.

267. $b + c = 5$, $m_a = \sqrt{5{,}65}$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Определить стороны.

268. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, $b^2 + c^2 = 25$, $m_a = \sqrt{11{,}05}$. Определить стороны.

269. $A = 60^\circ$, $p = 10$, $m_a = 2\sqrt{11}$. Определить a.

270. $b + c = 7$, $m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}$, $b - c = \frac{a}{2}$. Определить стороны.

271. $b + c = 7$, $m_a = 3$, $s = 3{,}25$. Определить стороны и угол A.

272. $B = 18^\circ$, $C = 54^\circ$, $l_a = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$. Определить b.

273. $a = \frac{18}{5}$, $l_b = 4$, $a + c = 3b$. Определить сторону c.

274. $A = 120^\circ$, $b + c = 5$, $l_a = \frac{6}{5}$. Определить стороны.

275. $A = 60^\circ$, $b - c = 1$, $l_a = 6\sqrt{0{,}12}$. Определить стороны.

276. $\cos A = \frac{1}{3}$, $l_a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $p = 3$. Определить a.

277. $s = 6\sqrt{6}$, $a + b = 11$, $r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$. Определить стороны.

278. $a = 4$, $r = 1$, $b - c = 2$. Определить b, c и угол B.

279. $r = \sqrt{2}$, $R = 2\sqrt{2}$, $b + c = 2a$. Определить углы и стороны.

280. $A = 40^\circ$, $b^2 - a^2 = ac$, $r_c = \sqrt{3}$. Определить периметр.

281. $A = 60^\circ$, $r_a = \sqrt{3}$, $b + c = 4$. Определить стороны.

282. $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 3$, $bc = \frac{10}{3}$, $r_a = 1$. Определить стороны.

283. $\sin A = \frac{3}{5}$, $r_b = 6$, $b - c = 1$. Определить a.

284. $R = 2$, $r_a = \sqrt{3} + 1$, $b + c = a\sqrt{3}$. Определить углы и стороны.

285. $r_a = 1$, $R = \frac{3}{4}$, $bc = 1$. Определить угол A и стороны.

286. $r_a = 2$, $R = \frac{3}{2}$, $h_a = \frac{3}{2}$. Определить a и A.

287. $h_a = 3$, $p = 4$, $r_b = 2$. Определить стороны.

288. $p = 5$, $s = 4$, $r_a = 2$. Определить стороны.

289. $s = 6$, $p - a = 1$, $r_b = 3$. Определить стороны.

290. $p = 16{,}5$; $a = 9$, $r_b = \frac{3\sqrt{35}}{2}$. Определить b и c.

291. $p = 5$, $a = 4$, $r_a = \frac{5}{2}$. Определить b.

292. $r_a = p = 6$, $h_b + h_c = 7$. Определить стороны.

293. $r_a = 4\sqrt{5}$, $p = 12$, $bc = 56$. Определить стороны.

294. $\operatorname{cosec} A = \frac{13}{12}$, $r_a - r = \frac{2}{3}$. Определить a.

295. $r_b r_c = 15$, $\sin C = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{4}{5}$. Определить a.

296. $a = 6$, $b = 7$, $r_b r_c = 16$. Определить c.

297. $a = 15$, $r_b + r_c = 5$. Определить $\cos A$.

298. $a = 2$, $h_a = \frac{18}{5}$, $r_b - r_c = \frac{24}{5}$. Определить b и c.

299. $A = 60^\circ$, $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_b + r_c = \sqrt{3}$. Определить стороны

300. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, $r_b = 6$, $r_a r_c = r r_b$. Определить стороны.

301. $r = 1$, $R = 3$, $r_b + r_c = 6$. Определить стороны и угол A.

В задачах 302—325 требуется определить стороны треугольника

302. $p = 6$, $r_a = 2$, $r = 1$.

303. $r = 4$, $r_a = 9$, $b - c = \frac{3a}{5}$.

304. $r = 3$, $r_a = 4$, $b^2 + c^2 = 1201$.

305. $r = 1$, $r_a = 2$, $p - c = 1$.

306. $r_a = 3$, $r_b = 10$, $a + c = 18$.

307. $r_a = 114$, $r_b = 57$, $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$.

308. $r_a = 8$, $r_b = 3$, $a + b = 5c$.

309. $r_a = 6$, $r_b = 3$, $a^2 + b^2 = 41$.

310. $r_a = 54$, $r_b = 24$, $r_c = 4r$.

311. $r_a = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $r_b = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $p - c = \frac{1}{2}$.

312. $R = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $p = 3$, $r = \frac{1}{3} r_a$.

313. $p - a = 1$, $h_a = 2{,}4$; $r_b + r_c = 5$.

314. $p - a = 5$, $h_a = 12$, $r_b - r_c = 5$.

315. $p - a = 2$, $13 h_a = 60$, $r_b r_c = 30$.

316. $r_a - r = 8$, $p - a = 8$, $h_a = \frac{9}{4}$.

317. $h_a = 1$, $p - a = 1$, $r_a = \frac{3}{2} r$.

318. $p-c=12,\ h_a=3\sqrt{3},\ r_b=3r_c.$

319. $h_a=12,\ p-c=8,\ rr_a=256.$

320. $p=5,\ s=\frac{8}{5}\sqrt{5},\ r_ar_b=5.$

321. $s=6,\ a+b=8,\ r_ar_b=12.$

322. $r_a-r_b=-\frac{\sqrt{15}}{3},\ a-b=-1,\ s=\frac{21}{4}\sqrt{15}.$

323. $s=6\sqrt{6},\ a-b=1,\ r_ar_b=36.$

324. $s=12,\ a-b=3,\ r_a=4r_b.$

325. $A=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3},\ p=5,\ r_br_c=10.$

326. $r=\frac{2}{3},\ r_a=\frac{3}{2},\ r_br_c=3.$ Определить a и A.

327. $h_a=1,\ p=3,\ r_b+r_c=\frac{18}{7}.$ Определить стороны и A.

328. $a=15,\ p=20,\ r_b-r_c=15.$ Определить b и c.

329. $p=6,\ a=4,\ r_b=3r_c.$ Определить b и c.

330. $a-b=1,\ h_c=1,\ r_b+r_c=3.$ Определить стороны и углы.

§ 3. Задачи по планиметрии с применением тригонометрии

1. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис внутренних углов данного треугольника (со сторонами a, b, c) с противоположными сторонами.
2. Найти произведение отрезков гипотенузы прямоугольного треугольника, на которые ее делит биссектриса прямого угла. Даны катеты a и b.
3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D, а описанную окружность — в точке L. Доказать, что

$$DL=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}.$$

4. Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках L, M, N. Доказать, что

$$\text{пл. }\triangle LMN=\frac{Rp}{2}.$$

5. Доказать, что если E_1, E_2, E_3 — точки, в которых вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA и AB, то

$$AE_2=AE_3=p-a=R(\sin B+\sin C-\sin A),$$
$$BE_1=BE_3=p-b=R(\sin A-\sin B+\sin C),$$
$$CE_1=CE_2=p-c=R(\sin A+\sin B-\sin C).$$

6. Доказать, что если F'_a, F'_b, F'_c — точки, в которых вневписанная окружность касается стороны BC и продолжения сторон AB и AC, то $AF'_c=AF'_b=p$, $BF'_c=BF'_a=p-c$, $CF'_b=CF'_a=p-b$.

Аналогично, если F''_a, F''_b, F''_c и F'''_a, F'''_b, F'''_c — точки касания соответствующих вневписанных окружностей к сторонам AC и AB и продолжениям других сторон, то

$BF''_a = BF''_c = CF'''_a = CF'''_b = p$, $CF''_a = BF'''_a = CF''_b = BF'''_c = p - a$, $AF'''_b = AF'''_c = p - b$, $AF''_c = AF''_b = p - c$.

7. $F'_cF'''_c = F'_aF'''_a = b$, $F'_bF''_b = F'_aF''_a = c$, $F''_bF'''_b = F''_cF'''_c = a$.

8. $F''_aE_1 = F''_cE_3 = b$, $F'''_bE_2 = F'''_aE_1 = c$, $F'_bE_2 = F'_cE_3 = a$.

9. $E_1F'_a = b - c$, $E_2F''_b = c - a$, $E_3F'''_c = b - a$ $(b > c > a)$.

10. $F'_cE_3 = F''_aE_1 = a$, $F''_cE_3 = F''_aE_1 = b$, $F'''_aE_1 = F'''_bE_2 = c$.

11. Доказать, что радиусы вневписанных окружностей суть корни каждого из следующих уравнений:

$$x^3 - p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)x^2 + p^2x - \frac{s^2}{r} = 0,$$

$$sx^3 + p\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - p^2\right)x^2 + p^2sx - s^2p = 0,$$

$$(x^2 + p^2)(x - r) = 4Rx^2.$$

12. Доказать, что стороны треугольника суть корни уравнения

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

13. Доказать, что если O — центр вписанной окружности, то

а) $OA \cdot OB \cdot OC = 4Rr^2$;

б) $a \cdot OA^2 + b \cdot OB^2 + c \cdot OC^2 = abc$.

14. Доказать, что если O_1 — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, то

$$O_1A \cdot O_1B \cdot O_1C = 4Rr_a^2.$$

15. Доказать, что если O_1, O_2, O_3 — центры вневписанных окружностей, а O — центр вписанной окружности, то

а) $\dfrac{OA}{O_1A} + \dfrac{OB}{O_1B} + \dfrac{OC}{O_1C} = 1$;

б) $OO_1 \cdot OO_2 \cdot OO_3 = 16R^2r$;

в) $OO_1 : OO_2 : OO_3 = \sin\dfrac{A}{2} : \sin\dfrac{B}{2} : \sin\dfrac{C}{2}$;

г) $O_1O_2 = 4R\cos\dfrac{C}{2}$;

д) $O_1O_2 : O_1O_3 : O_2O_3 = \cos\dfrac{C}{2} : \cos\dfrac{B}{2} : \cos\dfrac{A}{2}$;

е) $OO_1 \cdot O_2O_3 = 4aR$;

ж) $OO_1 : O_2O_3 = \dfrac{r}{p-a} = \dfrac{r_a}{p}$;

з) $OO_1^2 + O_2O_3^2 = OO_2^2 + O_1O_3^2 = OO_3^2 + O_1O_2^2 = 16R^2$;

и) $O_1O_2 \cdot O_1O_3 \cdot O_2O_3 = 16R^2p$;

к) $O_1O_2^2 + O_2O_3^2 + O_1O_3^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$.

16. Доказать, что если $OO_1 = OO_2$, то треугольник равнобедренный.

17. Доказать, что расстояние от центра описанного круга до центра O_1 вневписанного равно $\sqrt{R^2 + 2Rr_a}$.

18. Доказать, что сумма квадратов расстояний от центра описанной окружности до четырех центров O, O_1, O_2, O_3 вписанной и вневписанных окружностей равна $12R^2$.

19. Доказать, что расстояния от центра описанной окружности до сторон равны $R\cos A$, $R\cos B$ и $R\cos C$.

20. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\widehat{OO'O_1}) = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1},$$

где O — центр вписанной окружности, O' — центр описанной, а O_1 — центр вневписанной окружности.

21. Доказать следующие соотношения:

а) $O'H^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$;

б) $O'H^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 - 3R^2$,

где H — ортоцентр, а O' — центр описанной окружности.

Доказать теоремы (22—28), относящиеся к центрам O, O_1, O_2, O_3 вписанной и вневписанных окружностей:

22. Углы $\triangle O_1O_2O_3$ равны $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$, $\frac{A+B}{2}$.

23. Радиус R_1 окружности, описанной вокруг треугольника $O_1O_2O_3$, равен $2R$.

24. Площадь s_1 треугольника $O_1O_2O_3$ равна

$$8R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2Rp = \frac{abc}{2r}.$$

25. $\frac{s_1}{s} = 1 + \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c}$.

26. пл. $\triangle OO_1O_2 = 8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2R(p-c) = \frac{abc}{2p\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$.

27. пл. $\triangle OO_1O_2$: пл. $\triangle OO_1O_3$: пл. $\triangle OO_2O_3$: пл. $\triangle O_1O_2O_3 =$
$= (p-c) : (p-b) : (p-a) : p = r_c : r_b : r_a : r$.

28. Площадь четырехугольника $OBCO_1$ равна

$$\frac{a(r + r_a)}{2}.$$

Вершины треугольника $E_1E_2E_3$ (задачи 29—36) находятся в точках касания окружности, вписанной в треугольник ABC к его сторонам. Обозначим через E_1, E_2, E_3 углы треугольника $E_1E_2E_3$, через a_1, a_2, a_3 — его стороны, через R' и r' — радиусы описанной и вписанной окружностей, через F — площадь.

Доказать следующие соотношения (задачи 29—36):

29. $E_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $E_2 = \frac{\pi - B}{2}$, $E_3 = \frac{\pi - C}{2}$.

30. $R' = r$.

31. $a_1 = 2r\cos\frac{A}{2} = 2(p-a)\sin\frac{A}{2}$.

32. $F = 2s\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

33. $r' = \frac{2p\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}$.

34. $$a_1a_2a_3 = \frac{2r^3p}{R}.$$

35. $$\frac{a_1a_2a_3}{abc} = \frac{r^2}{2R^2}.$$

36. $$\frac{F}{s} = \frac{r}{2R}.$$

37. Доказать, что если s_1, s_2, s_3 — площади, отсекаемые от треугольника ABC касательными к вписанной окружности и соответственно параллельные сторонам треугольника, то

$$s_1 : s_2 : s_3 : s = (p-a)^2 : (p-b)^2 : (p-c)^2 : p^2.$$

38. Доказать, что если p_1, p_2, p_3 — отрезки этих касательных (см. № 37), заключенные между сторонами треугольника, то

$$\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b} + \frac{p_3}{c} = 1.$$

Обозначим (задачи 39—57) через A_1, B_1, C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC; через k_1, k_2, k_3 — стороны треугольника $A_1B_1C_1$; через R_h — радиус окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$; через ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 — радиусы вписанной и вневписанных окружностей для треугольника $A_1B_1C_1$. Через H обозначим ортоцентр треугольника ABC; отрезки HA, HB и HC обозначим через h'_a, h'_b, h'_c и, наконец, периметр треугольника $A_1B_1C_1$ обозначим через $2p_1$.

Доказать, что:

39. Треугольники AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 подобны треугольнику ABC, причем $\frac{B_1C_1}{a} = \frac{AC_1}{b} = \frac{AB_1}{c} = \cos A$; следовательно, всякий линейный элемент треугольника AB_1C_1 равен соответственному элементу треугольника ABC, умноженному на $\cos A$.

40. $$k_1 = R\sin 2A,\quad k_2 = R\sin 2B,\quad k_3 = R\sin 2C.$$

41. $$A_1 = 180^\circ - 2A,\quad B_1 = 180^\circ - 2B,\quad C_1 = 180^\circ - 2C.$$

42. $$R_h = \frac{1}{2}R.$$

43. $$\rho = 2R\cos A\cos B\cos C,\quad \rho_1 = 2R\cos A\sin B\sin C.$$

44. $$\rho_1 + \rho = 2R\cos A\cos(B-C),\quad \rho_1 - \rho = 2R\cos^2 A.$$

45. $$\rho_1 + \rho_2 = 2R\sin^2 C,\quad \rho_1 - \rho_2 = 2R\sin C\sin(B-A).$$

46. $$2\rho_1 = 4R\sin A\sin B\sin C.$$

47. $$\rho = \rho_1\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C,\quad \rho_1 = p_1\operatorname{ctg}A.$$

48. $$\frac{h_ah'_a}{\rho_1} = \frac{h_bh'_b}{\rho_2} = \frac{h_ch'_c}{\rho_3} = 2R.$$

49. $$\text{пл. } \triangle AC_1B_1 = s\cos^2 A.$$

50. $$\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1 = s(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C) =$$
$$= 2s\cos A\cos B\cos C = \frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C =$$
$$= 2s\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}.$$

51. Высоты треугольника ABC суть биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, ортоцентр H треугольника ABC совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

52.
$$\frac{k_1}{a^2}+\frac{k_2}{b^2}+\frac{k_3}{c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

53.
$$\frac{b^2-c^2}{a^2}k_1+\frac{c^2-a^2}{b^2}k_2+\frac{a^2-b^2}{c^2}k_3=0.$$

54.
$$k_1k_2k_3=AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1=AB_1\cdot BC_1\cdot CA_1.$$

55. Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, HAB, HBC и HCA равны между собой.

56. Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через середины A', A'', A''' сторон BC, CA и AB. Радиус этой окружности равен $\frac{R}{2}$.

57. Доказать, что та же окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середины отрезков HA, HB и HC.

58. Доказать, что центр O_9 окружности (O_9) девяти точек (т. е. окружности, проходящей через основания высот, середины сторон и через середины отрезков HA, HB и HC) отстоит от сторон на расстояниях

$$\frac{1}{2}R\cos(B-C),\quad \frac{1}{2}R\cos(C-A),\quad \frac{1}{2}R\cos(A-B).$$

59. Расстояния от O_9 до высот равны

$$\frac{1}{2}R\sin(B-C),\quad \frac{1}{2}R\sin(C-A),\quad \frac{1}{2}R\sin(A-B).$$

60. Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника ABC, есть окружность девяти точек для треугольника $O_1O_2O_3$.

61. Доказать следующие соотношения:

а) $AO_9^2=\frac{R^2}{4}(1+8\sin B\sin C\cos A)$;

б) $AO_9^2+BO_9^2+CO_9^2=\frac{R^2}{4}(11+8\cos A\cos B\cos C)$.

Даны a, b, A, причем $a<b$ («сомнительный» случай решения треугольников). Обозначим через c_1 большее, а через c_2 — меньшее значения третьей стороны.

Доказать, что (задачи 62—66):

62.
$$c_1-c_2=2a\cos B,\quad c_1+c_2=2b\cos A.$$

63.
$$c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A=4a^2\cos^2 A.$$

64.
$$\frac{c_1+c_2}{c_1-c_2}=\frac{\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}B}.$$

65. c_1 и c_2 — корни уравнения

$$x^2-2bx\cos A+b^2-a^2=0.$$

66. Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ACB_1 и ACB_2, равны между собой.

Доказать, что в каждом из следующих случаев треугольник равнобедренный (задачи 67—73):

67.
$$2\cos B=\frac{\sin A}{\sin C}.$$

68.
$$a=2b\cos C.$$

69. $$a = 2b \sin \frac{A}{2}.$$

70. $$a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b) \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}.$$

71. $$(p - b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

72. $$\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}.$$

73. $$\operatorname{cosec} B + \operatorname{ctg} B = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}.$$

74. Доказать, что если $3R = 4r$, то

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{7}{4}.$$

75. Доказать, что если

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{bc}},$$

то $a^2 = 2bc$.

76. Доказать, что если

$$(b + c + a)(b + c - a) = 3bc,$$

то $A = 60°$.

77. Доказать, что если $B = 45°$, то

$$(1 + \operatorname{ctg} A)(1 + \operatorname{ctg} C) = 2.$$

78. Доказать, что если $A = 60°$, то прямая, соединяющая точку пересечения высот с центром описанной окружности, образует со сторонами AB и AC равные углы.

79. Основание треугольника разделено на три равные части и точки деления соединены с вершиной. Доказать, что если t_1, t_2, t_3 — углы, противолежащие отрезкам деления, то

$$(\operatorname{ctg} t_1 + \operatorname{ctg} t_2)(\operatorname{ctg} t_2 + \operatorname{ctg} t_3) = 4(1 + \operatorname{ctg}^2 t_2).$$

80. В сектор радиуса R вписана окружность, радиус которой равен r. Хорда сектора равна $2c$. Доказать, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{c}.$$

81. В вершинах треугольника проведены касательные к описанной окружности. Доказать, что углы треугольника, образованного этими касательными, будут: $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$, а стороны

$$\frac{a}{2 \cos B \cos C}, \quad \frac{b}{2 \cos C \cos A}, \quad \frac{c}{2 \cos A \cos B}.$$

82. На полуокружности взята точка P. Вписано две окружности: одна касается диаметра и окружности в середине дуги BP, а другая — диаметра и окружности в середине M дуги CP. Доказать, что радиусы этих окружностей равны:

$$\frac{ac}{2(a + c)} \quad \text{и} \quad \frac{ab}{2(a + b)},$$

где a, b, c — гипотенуза и катеты треугольника BPC.

83. Вершина A прямого угла соединена с серединой O' гипотенузы. Доказать, что квадрат расстояния между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABO' и ACO', равен

$$\frac{a^2(2 - \sin 2C)}{(1 + \sin C)(1 + \cos C)}.$$

84. Окружности радиусов R_1 и R_2 пересекаются под углом C. Доказать, что длина их общей хорды равна

$$\frac{2R_1R_2\sin C}{\sqrt{R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos C}}.$$

Окружности (O_1), (O_2), (O_3), радиусы которых R_1, R_2, R_3, касаются попарно внешне друг друга в точках P, N и M.

85. Доказать, что (задачи 85-87):

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{8}{abc}.$$

86. Общие касательные пересекаются в одной точке, расстояние которой до каждой из точек касания равно

$$\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}.$$

87. Если $R_1=R_2=R_3=R$, то площадь, ограниченная дугами MN, MP и NP, равна $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2$.

88. 1°. Доказать, что радиус x окружности (K), касающейся сторон угла A треугольника ABC и внешне касающейся описанной окружности, определяется одной из формул

$$x=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{4Rr_a}{r_b+r_c}=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sec^2\frac{A}{2}=\frac{bcs}{p(p-a)^2}.$$

2°. Если B_1 и C_1 суть точки прикосновения к сторонам угла A, то середина G_1 хорды B_1C_1 есть центр вневписанной окружности треугольника ABC.

3°. Если B_2 и C_2 суть точки, в которых сторон угла касается окружность, имеющая с описанной вокруг треугольника окружностью внутреннее касание, то середина G_2 хорды B_2C_2 есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

4°. Если y и z суть радиусы двух окружностей, касающихся также внешне описанной окружности (вокруг треугольника ABC) и сторон углов B и C, то

а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2R-r}{2Rr}$;

б) $32R^3-2R(xy+yz+zx)-xyz=0$

89. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а R_1, R_2, R_3 — радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников BOC, COA и AOB. Доказать, что

$$R_1^2R_2^2R_3^2=R^3AO\cdot BO\cdot CO.$$

90. Пусть O' — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, а R_1, R_2, R_3 — радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников $BO'C$, $AO'C$ и $AO'B$. Доказать, что:

а) $\frac{a}{R_1}+\frac{b}{R_2}+\frac{c}{R_3}=\frac{abc}{R^3}$;

б) $R_1R_2R_3=\frac{1}{8}abc\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{C}{2}\right)$.

91. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Доказать, что AH, BH и CH — корни уравнения

$$x^3 - 2(R+r)x^2 + (r^2+p^2-4R^2)x - 8R^3\cos A\cos B\cos C = 0.$$

92. Высоты треугольника ABC продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках M_1, M_2 и M_3. Доказать, что

1°. пл. $\triangle M_1M_2M_3 = 8s\cos A\cos B\cos C$.

2°. $AM_1\sin A + BM_2\sin B + CM_3\sin C = 8R\sin A\sin B\sin C$.

93. Доказать, что если r', r'', r''' — радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников O_1BC, O_2AC и O_3AB, то $r'r''r''' = 2R^2r$ (O_1, O_2, O_3 — центры вневписанных окружностей).

94. Доказать, что $\dfrac{OO_1\cdot O_1O_3 + OO_2\cdot O_2O_3}{O_1O_2} = \dfrac{OO_1\cdot O_2O_1 + OO_3\cdot O_3O_2}{O_1O_3} = \dfrac{OO_2\cdot O_1O_2 + OO_3\cdot O_3O_1}{O_2O_3}$, где O, O_1, O_2 и O_3 — центры вписанной и вневписанных окружностей в треугольнике.

95. Доказать, что если a и b — стороны параллелограмма ($a > b$), t — меньший угол, x — большая диагональ, y — меньшая диагональ, t_1 — меньший из углов, образуемых диагоналями, то:

1°. $x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos t$;

2°. $y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos t_1$;

3°. $4a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos t_1$;

4°. $4b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos t$;

5°. $\sin t : \sin t_1 = \dfrac{2ab}{xy}$;

6°. $\cos t\cdot\cos t_1 = \dfrac{(x+y)(x-y)(a+b)(a-b)}{4abxy}$;

7°. $\operatorname{tg} t_1 = \dfrac{2ab\sin t}{a^2-b^2}$;

8°. $\operatorname{tg} t = \dfrac{2xy\sin t_1}{x^2-y^2}$;

9°. $s = \dfrac{1}{4}\sqrt{(2a+x+y)(2a+x-y)(2a-x+y)(x+y-2a)}$.

96. Обозначим в трапеции большее основание AB через a, боковую сторону BC — через b, меньшее основание CD — через c, боковую сторону DA — через d, диагональ AC — через g, диагональ BD — через f, точку пересечения диагоналей — через O и $\angle AOD$ — через t. Доказать, что:

1°. $f^2 + g^2 = b^2 + d^2 + 2ac$;

2°. $f^2 - g^2 = \dfrac{a+c}{a-c}(b+d)(b-d)$;

3°. $f^2 = ac - bd + \dfrac{(ab-cd)(b+d)}{a-c}$;

4°. $g^2 = ac - bd + \dfrac{(ad-bc)(b+d)}{a-c}$;

5°. $\cos t = \dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2fg} = \dfrac{(a+c)^2-(f^2+g^2)}{2fg}$;

6°. $\sin\dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a+b+f+g)(f+g-a-c)}{fg}}$;

7°. $\cos\dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a+c+f-g)(a+c-f+g)}{fg}}$.

97. Принимая обозначения предыдущей задачи для произвольного четырехугольника ($AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=g$, $BD=f$, угол между диагоналями t); доказать, что:

1°. $a^2+c^2-2ac\cos(a,\ c)=b^2+d^2-2bd\cos(b,\ d)$;

2°. $fg\cos t=ac\cos(a,\ c)-bd\cos(b,\ d)=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)$;

3°. $2ac\cos(a,\ c)=f^2+g^2-b^2-d^2$;

4°. $4p^2=f^2+g^2-2fg\cos t=f^2+g^2+b^2+d^2-a^2-c^2=$
$=b^2+d^2+2bd\cos(b,\ d)$,

где p — отрезок, соединяющий середины сторон a и c.

5°. $s=\frac{1}{2}fg\sin t$.

6°. $s=\frac{1}{4}\sqrt{4f^2g^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$.

7°. $s=pq\sin(p,\ q)$, где q — отрезок, соединяющий середины сторон b и d.

8°. $s=\frac{1}{4}\left(g^2-f^2\right)\operatorname{tg}(p,\ q)$.

98. Обозначим через a, b, c, d стороны AB, BC, CD и DA вписанного четырехугольника, через d_1 и d_2 — его диагонали AC и BD, через s — площадь, через t — угол между диагоналями и через $2p$ — периметр. Доказать, что:

1°. $\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$;

2°. $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{ad+bc}}$;

3°. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$;

4°. $\sin A=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc}$;

5°. $s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$;

6°. $\operatorname{tg}A=\frac{4s}{a^2+d^2-b^2-c^2}$;

7°. $d_1=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+dc}}$, $d_2=\sqrt{\frac{(ab+dc)(ac+bd)}{ad+bc}}$;

8°. $d_1d_2=ac+bd$, $\frac{d_2}{d_1}=\frac{ab+dc}{ad+bc}$;

9°. $\frac{d_2-d_1}{d_2+d_1}=\frac{(a-c)(b-d)}{(a+c)(b+d)}$;

10°. $4Rs=\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)(ac+bd)}$;

11°. $(ac+bd)\sin t=2s$;

12°. $\frac{x_1}{ad}=\frac{x_2}{bc}=\frac{d_1}{ad+bc}$, $\frac{y_1}{ab}=\frac{y_2}{cd}=\frac{d_2}{ab+cd}$,

$\frac{x_1}{ad}=\frac{x_2}{bc}=\frac{y_1}{ab}=\frac{y_2}{cd}$,

где $x_1=AK$ и $x_2=CK$ — отрезки, на которые диагональ AC делится диагональю BD, а $y_1=BK$ и $y_2=DK$ — отрезки, на которые диагональ BD делится диагональю AC.

99. В плоскости даны две взаимно-перпендикулярные оси:

$$x'Ox \text{ и } y'Oy.$$

На полуоси Ox берется точка A, на полуоси Oy — точка B, при этом $\overline{OA}=\overline{OB}=a>0$. Повернем прямую $y'y$ вокруг точки O на угол α, заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; получим прямую (D); с другой стороны, повернем вокруг точки A прямую AB на угол $-\alpha$. Получим прямую (Δ). При каких значениях α прямые (D) и (Δ) будут параллельны?

При каких значениях α прямые (D) и (Δ) будут перпендикулярны?

100. 1°. Вычислить в функции сторон a, b, c и углов A, B, C треугольника ABC стороны a', b', c' и углы A', B', C' треугольника $A'B'C'$, где A', B', C' — основания высот AA', BB', CC' треугольника ABC. Рассмотреть два случая:

а) A, B, C — углы острые и $a>b>c$.

б) A — тупой угол.

2°. Доказать, что полученные результаты можно использовать для вычисления углов A, B, C треугольника ABC, если известны числа l, m, n:

$$l=a\cos A,\quad m=b\cos B,\quad n=c\cos C.$$

Рассмотреть два случая:

а) l, m, n положительны;

б) $l<0$.

3°. Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки, в которых прямые $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ пересекают соответственно BC, CA и AB. Доказать, что четверки точек $(BCA'A_1)$, $(CAB'B_1)$, $(ABC'C_1)$ гармонические.

4°. Указать в каждом из двух предыдущих предположений а) и б) геометрический способ построения треугольника ABC, если известны l, m, n.

101*. Рассмотрим треугольник ABC: длины его сторон BC, CA и AB — соответственно a, b, c, внутренние углы — A, B, C. Предположим, что $b>c$.

1°. Пусть D и E — основания на стороне BC биссектрисы соответственно внутреннего и внешнего угла A. Вычислить AD и AE в функции b, c, $\frac{A}{2}$.

2°. Пусть $AD=AE$; найти соотношение между углами B и C.

3°. В дальнейшем рассматриваются треугольники ABC, для которых $B-C=\frac{\pi}{2}$.

а) Вывести геометрически соотношение между отрезками AE и AD биссектрисы угла A.

б) Доказать, что высота, опущенная из вершины A, касается окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

в) Найти соотношение между сторонами треугольника.

102*. 1°. В треугольнике ABC три угла, расположенные в порядке возрастания $(A<B<C)$, образуют арифметическую прогрессию со знаменателем φ. Найти стороны треугольника, зная его периметр $2p$, и угол φ. Исследовать.

2°. Дан периметр $2p$ и площадь s треугольника ABC. Вычислить φ. Исследовать. Найти соотношение между p и s, при выполнении которого треугольник будет прямоугольный.

3°. Построить треугольник ABC, зная его периметр $2p$ и сторону l квадрата, площадь которого равна площади этого треугольника.

103*. Дана фиксированная окружность (O) с центром O и радиусом R. На этой окружности фиксируется точка A, а на радиусе OA берется точка ω на расстоянии $\frac{3}{4}R$ от точки A. Пусть (ω) — окружность с центром ω,

проходящая через точку A. Рассмотрим касательную (Δ) к окружности (ω) в переменной точке I этой окружности; обозначим через B и C точки, в которых эта касательная пересекает окружность (O), через M — середину BC, через D — точку, в которой продолжение AI пересекает (O).

1°. Доказать, что AI — биссектриса угла BAC. Доказать, что треугольники ABD и BID подобны. Вывести отсюда, что $AD = 2BD$ и что $b + c = 2a$, где a, b и c длины сторон треугольника ABC.

2°. Дан угол A; вычислить B и C.

3°. Выразить в функции R и A длину стороны BC треугольника ABC, затем из рассмотрения трапеции $OAHM$ высоту AH этого треугольника и его площадь s. Построить график функции $s = s(A)$.

4°. Доказать, используя инверсию (O, R^2), что окружность (BOC) при изменении (Δ) касается фиксированной окружности.

Найти геометрическое место центров окружности (BOC) и геометрическое место полюсов P прямой (Δ) относительно окружности (O). Доказать, что касательная в точке P к геометрическому месту точек P есть поляра точки I относительно окружности (O).

104*. ABC — равносторонний треугольник, $AB = a$, O — центр окружности, описанной вокруг этого треугольника. Обход треугольника ABC в направлении от A к B и C примем за положительный обход в плоскости. Пусть $A'B'C'$ — треугольник, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол θ $(0 < \theta < 120°)$ и пусть, наконец, Oz — прямая, в которую перейдет OA при повороте вокруг O на угол θ.

1°. Доказать, что треугольники ABC и $A'B'C'$ симметричны относительно Oz. Пусть D — точка пересечения прямых AC и $A'C'$, E — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, F — точка пересечения прямых BC и $B'C'$. Доказать, что треугольники ADE и $A'EF$ равны.

2°. Вычислить периметр и углы треугольника $A'EF$. Выразить его стороны в функции a и θ.

3°. Определить θ при условии, что $EF = \dfrac{a\sqrt{3}}{3m}$, где m — данное положительное число. Исследовать. Пусть $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = t$. Доказать, что $y = A'E = \dfrac{2at}{3t + \sqrt{3}}$. Обозначим через r радиус окружности, вписанной в треугольник $A'EF$. Вычислить r в функции y. Найти максимум r при условии, что y изменяется.

105*. Треугольник ABC изменяется таким образом, что точки B и C фиксированы, причем расстояние между ними равно 6. Сумма сторон AB и AC постоянна и равна 10. Обозначим через D основание биссектрисы внутреннего угла A, а через O — середину BC. Положим $\overline{OD} = x$.

1°. Построить, используя геометрическое место точек, которое описывает точка A, треугольник ABC, зная точку D, расположенную между B и C.

2°. Доказать, что для любого треугольника ABC, удовлетворяющего условию задачи, имеем

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin (B + C)} = \frac{5}{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{4}.$$

3°. Вычислить в функции x длины сторон AB и AC. Вычислить косинус угла A, затем косинус угла BAD. Найти проекции AB' и AC' сторон AB и AC на прямую AD. Установить, что касательная AT к окружности с диаметром $B'C'$ сохраняет постоянную длину при изменении x. Найти $\operatorname{tg}\widehat{DAT}$. Какой треугольник ABC соответствует минимуму угла DAT?

106.** Доказать, что углы A, B, C треугольника ABC удовлетворяют соотношению

$$2\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C.$$

Существуют ли треугольники, для которых

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C.$$

107.** Дан треугольник ABC; I — центр вписанной в него окружности. Пусть A_b и A_c — проекции точки A на BI и CI; B_c и B_a — проекции точки B на CI и AI и, наконец, C_a и C_b — проекции C на AI и BI. Доказать, что произведения сторон треугольников $A_bB_cC_a$ и $A_cB_aC_b$ равны между собой и что сумма площадей этих треугольников равна половине площади треугольника ABC.

108*. Переменный треугольник ABC вписан в окружность (Γ) (фиксированную) с центром O и радиусом R. Вершина A фиксирована, а сторона BC проходит через середину D радиуса OA. Обозначим через A, B, C углы треугольника ABC, через s — его площадь, а через φ — угол ADB (черт. 77).

1°. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольника ABC.

2°. Доказать, что

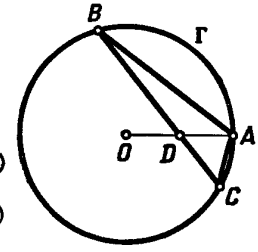
$$\varphi=\frac{\pi}{2}+C-B.$$

3°. Доказать, что

$$2\cos(B+C)=\cos(B-C), \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C=\frac{1}{3}, \qquad (2)$$

$$s=-\frac{1}{2}R^2\sin 2A, \qquad (3)$$



Черт. 77.

и доказать, что из каждого из этих соотношений следует два других. Доказать также, что если выполнено любое из этих соотношений, то сторона BC проходит через середину D радиуса OA окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4°. Вычислить A, B, C, если задан угол φ.

109*. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что для треугольника ABC выполнено соотношение

$$a^4=b^4+c^4,$$

является условие

$$2\sin^2 A=\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C. \qquad (1)$$

Вычислить высоту этого треугольника, опущенную из вершины A, в функции радиуса описанной окружности и расстояния от центра этой окружности до стороны BC.

110*. Решить треугольник ABC, зная его сторону $BC=a$, медиану m, исходящую из вершины B, и произведение $k=\overline{CA}\cdot\overline{CD}$, где D — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC. Провести исследование возможных значений k, считая, что $m=\frac{3}{2}a$.

111*. Пусть O — центр тригонометрического круга (радиуса 1), $A'OA$ и $B'OB$ — два его взаимно-перпендикулярных диаметра, которые мы примем соответственно за оси Ox и Oy. Пусть M — произвольная точка тригонометрического круга. Обозначим через u угол от оси Ox до луча OM,

$u=(OA, OM)$ (значения этого угла для точек A, B, A' и B' соответственно таковы: 0, $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$). Пусть P — проекция точки M на ось Ox, а Q — проекция точки M на ось Oy, H — проекция точки M на прямую PQ. Продолжим прямую HM в обе стороны и отложим на ней в обе стороны от точки M отрезки $m'M$ и Mm, длина каждого из которых равна радиусу тригонометрического круга, т. е. 1. Отрезок Mm отложим в направлении от H к M, отрезок Mm' — в противоположном направлении.

1°. Предполагая, что точка M находится на дуге AB первого квадранта, выразить в функции $\sin u$ и $\cos u$ координаты x, y точек m и m'. Определить геометрическое место точек m и m' при условии, что точка M описывает дугу AB. Каково будет геометрическое место этих точек, если точка M опишет всю окружность. Будем считать теперь во всем последующем, что точка M находится на дуге AB, расположенной в первом квадранте.

2°. Определить положение точки M при условии, что площадь треугольника Omm' равна $\frac{1}{2}$. Пусть отрезок Mm вращается вокруг оси Ox и вокруг оси Oy. Выразить поверхности s и s' вращения в функции $\sin u$ и $\cos u$; полагая $\operatorname{tg} u=X$, $\frac{s}{s'}=Y$, выразить Y в функции от X (X — считать положительным). Определить точку M, если $Y=3\sqrt{3}-4$.

3°. На перпендикуляре к плоскости xOy, проходящем через точку M, взята точка T. Определить MT при условии, что площади треугольников mPQ и TPQ равны между собой. Установить связь длин Om и MT.

112. (C) — окружность радиуса R с центром O; (C') — окружность радиуса $\frac{R}{2}$ с центром A, лежащим на окружности (C). Обозначим через M и N точки пересечения окружностей (C) и (C'). Выразить приближенно угол MON (в радианах).

113.** Рассмотрим треугольник ABC.

1°. Доказать, что каждое из трех следующих соотношений влечет за собою выполнение двух других:

$$A=2C, \tag{1}$$

$$a^2=(b+c)\,c, \tag{2}$$

$$b=4c\cos\left(30^\circ+\frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right). \tag{3}$$

Построить с помощью циркуля и линейки треугольник, обладающий указанным свойством, зная, кроме того, длину a стороны BC и зная, что $\triangle ABC$ или равнобедренный или прямоугольный.

2°. а) Доказать, что во всяком треугольнике ABC длина биссектрисы внутреннего угла A равна

$$\frac{a\sin B\sin C}{\sin\frac{A}{2}(\sin C+\sin B)}.$$

б) В треугольнике ABC даны сторона a, длина l биссектрисы внутреннего угла A и известно, что $A=2C$. Вычислить угол C этого треугольника, а затем и другие его углы. Как следует выбрать l и a, чтобы треугольник существовал?

в) Построить геометрически этот треугольник и получить геометрически результаты предыдущего исследования.

114.** Будем рассматривать треугольники (T), углы которых удовлетворяют условию

$$\operatorname{ctg} A = 2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C). \qquad (1)$$

1°. Вычислить стороны b и c этого треугольника (T), если заданы сторона $BC = a$ и угол A. Провести исследование.

2°. Доказать, что равенство (1) выражает необходимое и достаточное условие того, что в треугольнике ABC медианы, выходящие из вершин B и C, взаимно перпендикулярны. Построить треугольник (T), если даны его вершины B, C и угол A; исследовать.

3°. Пусть даны две взаимно перпендикулярные оси: Ox и Oy. Рассмотрим все треугольники (T), вершина A которых расположена на оси Oy, а сторона BC, имеющая данную длину a, лежит на оси Ox. Найти геометрическое место центров тяжести этих треугольников.

115*. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из вершины A треугольника ABC на прямую, соединяющую центры I и O вписанной и описанной окружностей, пересекает BC в точке M такой, что разность радиусов окружностей, описанных около треугольников ABM и ACM, равна OI.

116.** В треугольнике ABC дана длина a стороны BC и известно, что $AB = 2AC$.

1°. Дан еще угол A. Вычислить стороны AB и AC. Показать, что треугольник ABC всегда существует, каков бы ни был угол A ($0 < A < 180°$).

2°. Дать геометрическое построение треугольника ABC.

3°. Изучить изменение высоты $AH = h$ при условии, что угол A изменяется.

Начертить кривую, представляющую зависимость h от A, полагая $a = 1$ (угол A измеряется в радианах).

4°. Найти A, если задано h; исследовать.

5°. Найти геометрическое место середины стороны AB и середины биссектрисы угла A, если A переменное.

117*. Рассмотрим равнобочную трапецию, площадь которой равна 1 $м^2$, большее основание — AD, меньшее — BC, непараллельные стороны — AB и CD.

Обозначим острый угол прямой BC с прямой CD через θ; полусумму оснований — через x; $AB + BC + CD = p$; высоту — через h; длину отрезков — через BC и AD, β и β'.

1°. Сколько надо задать размеров из числа указанных, чтобы полностью определить такую равнобочную трапецию площадью 1 $м^2$? Дать несколько примеров условий, определяющих эту трапецию.

2°. Вычислить p в функции θ и x.

3°. Пусть x задано; определить трапецию, для которой p минимально. При каком значении θ будет получен этот результат?

4°. Доказать, что каждому произвольному значению x соответствует минимум функции p от θ. Какое значение надо дать x, чтобы получить наименьший из этих минимумов?

5°. Для трапеции, определенной в вопросе 4°, вычислить BC, h и AB. Какое простое замечание можно сделать по поводу этой трапеции?

118.** В треугольнике ABC дан периметр $2p$, радиус r вписанной окружности и высота h, выходящая из вершины A.

1°. Вычислить его стороны и углы (при вычислении b и c найти сначала $b + c$, затем bc).

2°. Какое соотношение должно существовать между p, r и h, для того чтобы $A = 90°$?

3°. Пусть $p = 6$, $h = 3$. Каковы границы изменения r, при которых треугольник ABC существует?

4°. Вычислить стороны и углы треугольника, если $p = 6$, $h = 3$, $r = 1$.

119.** Обозначим через D и D' точки пересечения биссектрис (внутренней и внешней) угла A треугольника ABC со стороной BC, а через l и l' — длины этих биссектрис.

1°. Решить треугольник, зная l, l' и A (выразить длины сторон через l, l', A и угол u, определенный соотношением $\operatorname{tg} u = \frac{l'}{l}$).

Дать геометрическое построение треугольника, если даны l, l' и A.

2°. Пусть заданы точки D и D' и величина угла A ($0 < A < \pi$). Каково геометрическое место точек A? Доказать, что стороны AB и AC проходят через две фиксированные точки I и J. Построить эти точки. Как расположены точки B и C при условии, что точка A занимает в условиях вопроса всевозможные положения?

Построить треугольник, если дана:

а) середина A' стороны BC; исследовать;

б) точка P, из которой сторона BC видна под прямым углом; исследовать.

120.** Построим произвольный треугольник ABC.

1°. Вычислить в функции синусов углов этого треугольника отношения l, m, n каждой стороны a, b, c к соответствующей высоте.

2°. Дано отношение l и угол A; вычислить углы B и C. Провести исследование.

3°. Построить треугольник, зная a, l, A. Найти условие возможности построения.

4°. При каком условии, наложенном на a, l и A, треугольник будет равнобедренный? Прямоугольный?

121*. 1°. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d может быть вычислена по формуле

$$s^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

2°. Доказать, что

$$x^2y^2 = (ac+bd)^2 - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2},$$

где x и y — длины диагоналей.

3°. Доказать, что если заданы отрезки a, b, c, d, то необходимое и достаточное условие того, что можно построить выпуклый четырехугольник со сторонами a, b, c, d заключается в том, что наибольшая из длин a, b, c, d меньше суммы трех остальных.

4°. Доказать, что если наибольшее из чисел a, b, c, d меньше суммы трех остальных, то существует выпуклый четырехугольник со сторонами a, b, c, d, около которого можно описать окружность; из всех выпуклых четырехугольников этот четырехугольник будет с наибольшей площадью и максимальным произведением диагоналей.

122.** Обозначим через H ортоцентр какого-нибудь треугольника ABC, через A' — основание высоты, опущенной из вершины A, через O — центр окружности, описанной около треугольника ABC; наконец, пусть M — середина BC.

1°. Где находится центр гомотетии и каков ее коэффициент, если эта гомотетия вектор $\overrightarrow{HA}$ переводит в вектор $\overrightarrow{OM}$?

2°. Установим на прямой AA' положительное направление от A к A' и положим $\overline{AA'} = h$, $\overline{AH} = d$. Вычислить h и d в функции радиуса R окружности, описанной около треугольника, и в функции его углов.

3°. Вычислить углы A, B, C треугольника, зная h, d и R. Исследовать.

4°. Построить треугольник, зная h, d и R (сначала построить точку O). Получить отсюда еще раз результаты предыдущего исследования.

5°. Построить треугольник ABC, зная центр O описанной вокруг него окружности, ортоцентр H и вершину A. Если точки O и H фиксированы, в какой области может находиться точка A, чтобы построение было возможно?

123.** Рассмотрим треугольник ABC со сторонами

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c$$

и углами A, B, C; предположим, что $B>C$. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, радиус этой окружности равен R. Сторона BC и окружность (O) пересекаются с биссектрисой внутреннего угла соответственно в точках D и E, а с биссектрисой внешнего угла — соответственно в точках D' и E'. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через I_a, I_b, I_c — соответственно центры окружностей, вневписанных в углы A, B и C.

1°. Доказать, что поляра точки I относительно окружности с диаметром DD' проходит через I_a. Что можно сказать про расположение точек I_b и I_c относительно этой окружности? Доказать, что проекция i_bi_c отрезка I_bI_c на BC равна $b+c$. Вычислить в функции углов B и C угол $AD'B$.

2°. Приложить полученные результаты 1° к построению треугольника по следующим данным:

$$B-C=2\alpha,\quad AH=h_a,\quad b+c=2l,$$

где H — основание высоты, опущенной из A на сторону BC. Исследовать.

3°. Вычислить $b+c$ и h_a в функции R и углов A, B, C треугольника ABC. Исходя из тех же данных, что и в 2°, вычислить углы треугольника ABC. Можно принять за неизвестное $\cos\frac{A}{2}=x$. Получить аналитически результаты проведенного ранее геометрического исследования.

124.** В плоскости даны оси OX, OY, OZ, на которых взяты точки A, B, C. Положим

$$\overline{OA}=x,\quad \overline{OB}=y,\quad \overline{OC}=z.$$

1°. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точки A, B, C являются ортогональными проекциями точки M соответственно на оси OX, OY, OZ, может быть записано в виде

$$x\sin(OY,\ OZ)+y\sin(OZ,\ OX)+x\sin(OX,\ OY)=0. \qquad (1)$$

2°. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точки A, B, C лежат на одной прямой, может быть записано в виде

$$\frac{\sin(OY,\ OZ)}{x}+\frac{\sin(OZ,\ OX)}{y}+\frac{\sin(OX,\ OY)}{z}=0. \qquad (2)$$

3°. Рассмотрим три различные точки A_1, A_2, A_3, расположенные на оси OX, и три точки B_1, B_2, B_3, расположенные на оси OY. Положим

$$\overline{OA}_1=x_1,\quad \overline{OA}_2=x_2,\quad \overline{OA}_3=x_3;$$
$$\overline{OB}_1=y_1,\quad \overline{OB}_2=y_2,\quad \overline{OB}_3=y_3.$$

Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке, может быть записано в виде

$$\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right)+\frac{1}{x_3}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)=0.$$

4°. Обозначим через I точку, в которой пересекаются прямые A_1B_1, A_2B_2. * Каково геометрическое место точек I, если x_1, y_1, x_2, y_2 связаны соотношениями

а) $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{y_2};$$

б) $$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{y_2}\right)=\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{y_1}\right).$$

5°. Что дает соотношение (1), если треугольник ABC равнобедренный ($AB=AC$), причем точка M взята на дуге $\overset{\smile}{BC}$ окружности (ABC), не содержащей точку A, а за оси OX, OY, OZ принимаются полупрямые MA, MB и MC; что мы получаем, если ABC — прямоугольный треугольник? Если он равнобедренный?

6°. Четыре точки A, B, C, D лежат на одной окружности и образуют выпуклый четырехугольник. Принимая за O точку D, установить, что дает соотношение (1).

7°. Пусть ABC — какой-нибудь треугольник, а D и D' — точки пересечения биссектрисы внутреннего угла со стороной BC и с окружностью, описанной вокруг этого треугольника. Положим $AD=l_a$ и $AD'=\lambda_a$. Принимая за точку O точку A, установить, что дает соотношение (1) для точек A, B, D', C и соотношение (2) для точек A, B, D, C.

125.** Фиксируем в ориентированной плоскости ось $x'Ox$ и на этой оси — точку A с данной положительной абсциссой R. Пусть (O) — окружность радиуса R с центром O.

А. Рассмотрим еще ось $X'OX$ и две точки: M и N, лежащие на окружности (O) и симметричные относительно этой оси. Обозначим через θ ориентированный угол от $\overrightarrow{Ox}$ до $\overrightarrow{OX}$:

$$\theta=(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OX}),$$

а через φ — ориентированный угол от $\overrightarrow{OX}$ до $\overrightarrow{ON}$:

$$\varphi=(\overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{ON});$$

тогда

$$(\overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{OM})=-\varphi.$$

1°. Вычислить в функции θ и φ длины сторон треугольника AMN. Доказать, что если условие

$$2MN=AM+AN \tag{1}$$

будет выполнено, то θ и φ связаны или соотношением

$$4\cos\varphi-\cos\theta=3, \tag{2'}$$

или соотношением

$$4\cos\varphi-\cos\theta=-3. \tag{2''}$$

---

* Предполагаем, что точки A_1 и A_2 различны, точки B_1 и B_2 также различны.

2°. Доказать, что из (2′) или (2″) следует (1).
Для этого сначала нужно установить, что из соотношения

$$|\sin u| = 2|\sin v|$$

следует, что

$$\sin(u+v)\sin(u-v) \geqslant 0,$$

а из соотношения

$$|\cos u| = 2|\cos v|$$

следует, что

$$\sin(u+v)\sin(u-v) \leqslant 0.$$

3°. Пусть C — точка оси $x'Ox$ такая, что $\overline{OC} = \frac{R}{4}$, H — ее проекция на MN, (C) — окружность с центром C, которая проходит через A. Используя полученные выше результаты, доказать, что для выполнения соотношения (1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение

$$CH = \frac{3}{4}R, \tag{3}$$

иначе говоря, чтобы MN касалась окружности (C).

B. Назовем треугольником (T) переменный треугольник, вписанный в окружность (O), вершина A которого фиксирована, причем выполнено все время соотношения (1).

1°. Доказать, что прямая AH, соединяющая точку A с проекцией H точки C на MN, есть биссектриса внутреннего угла A треугольника (T). Найти, если (T) меняется, геометрическое место центров I окружности, вписанной в треугольник (T), и геометрическое место центров I' окружности, вневписанной в угол A этого треугольника $\left(\text{рассмотреть отношения } \frac{\overline{IA}}{\overline{IH}} \text{ и } \frac{\overline{I'A}}{\overline{I'H}}\right)$.

2°. Доказать, что, вообще говоря, существует для всякого положения треугольника (T) гипербола, проходящая через точки M и N, для которых A — фокус, а соответствующая ему директриса — прямая CH.

Найти, если (T) изменяется, геометрическое место вершин этой гиперболы и геометрическое место ее центра.

Доказать, что каждая из ее асимптот проходит через фиксированную точку.

Замечание. Части B и A можно решать независимо одну от другой (в части B использовать лишь 3°, A).

126. Из точки M окружности радиуса R выходят одновременно и движутся равномерно по окружности точки A и B со скоростями соответственно v_1 *м/сек* и v_2 *м/сек*. Определить площадь треугольника MAB через t *сек*. после начала движения.

127. Определить угол A между данными сторонами b и c треугольника, если медиана, выходящая из вершины A, есть средняя пропорциональная между b и c.

128. На одной из сторон острого угла φ даны две точки, расстояния которых от другой стороны угла равны a и b. Определить радиус окружности, проходящей через эти две точки и касающейся другой стороны угла или ее продолжения.

129. Зная углы треугольника, определить угол x между медианой и высотой, проведенными из вершины какого-нибудь угла.

130. Угол B между боковыми сторонами равнобедренного треугольника ABC равен 2α. В каком отношении делится площадь этого треугольника прямой, проходящей через середину высоты треугольника h_b и наклонной под углом β к продолжению основания его?

131. Расстояние между центрами двух расположенных в одной плоскости кругов радиуса R равно d. Определить площадь части второго круга, лежащей вне первого круга.

132. Непараллельные стороны трапеции перпендикулярны друг другу; одна из них, равная a, составляет с диагональю угол α, а другая образует такой же угол α с большим основанием. Вычислить площадь трапеции.

133. Две квадратные пластинки расположены так, что центры их совпадают, а угол между их диагоналями равен α. Определить периметр и площадь образовавшейся восьмиконечной звезды, если сторона каждой пластинки равна a.

134. Внутрь острого угла α вписано n кругов: C_1, C_2, ..., C_n так, что круг C_2 касается внешне кругов C_1 и C_3, круг C_3 касается внешне углов C_2 и C_4 и т. д. Доказать, что радиусы этих кругов образуют геометрическую прогрессию. Найти зависимость между знаменателем прогрессии и величиной острого угла α.

135. Доказать, что если прямая Эйлера параллельна стороне треугольника, то тангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию.

136. В треугольнике ABC даны: угол A, высота h_b и радиус R описанного круга. Вычислить его площадь.

137. Стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найти произведение $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, где A — наибольший, а C — наименьший угол.

138. Найти сторону a треугольника ABC, если даны радиус r вписанной в него окружности, угол A и площадь s.

139. Дан прямоугольный треугольник ABC (C — прямой угол). Из вершины A радиусом, равным катету AC, описана дуга, пересекающая гипотенузу в точке E. Из вершины B радиусом, равным катету BC, описана дуга, пересекающая гипотенузу в точке D. В криволинейную фигуру CDE вписан равносторонний треугольник CMN, причем точка M лежит на дуге CD, а точка N — на дуге CE. Определить площадь треугольника CMN, если площадь треугольника ABC равна Q, а дуга MD равна половине дуги CM.

140. Определить углы равнобедренного треугольника, в котором высота вдвое больше биссектрисы угла при основании.

141. Доказать, что если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то и котангенсы половин углов треугольника также составляют арифметическую прогрессию.

142. В каком отношении делится площадь правильного треугольника прямой, проходящей через середину стороны его и составляющей угол, равный α ($0 < \alpha < 90°$), с этой стороной?

143. Вычислить площадь треугольника по углам и по одной из медиан.

144. Каждая из непараллельных сторон равнобочной трапеции равна меньшему ее основанию. Большее основание относится к меньшему, как $m : n$. Определить углы трапеции.

145. На четырех сторонах квадрата как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники, боковая сторона каждого из которых равна a. Каков должен быть угол при вершине каждого из построенных равнобедренных треугольников, чтобы площадь получившегося при этом построении многоугольника имела бы наибольшую величину?

146. Найти сторону квадрата, вписанного в сегмент круга радиуса a, если хорда этого сегмента стягивает дугу α.

147. Расстояние между центрами двух кругов равно d. Общая внутренняя касательная их составляет с линией центров угол, равный α, а общая внешняя касательная их составляет с линией центра угол, равный β. Определить радиусы этих кругов.

148. Из точки A, лежащей вне круга радиуса r, проведены касательная AB и секущая AC. Определить площадь треугольника ABC, если секущая наклонена под углом α к касательной AB и проходит на расстоянии, равном d от центра круга.

149. Хорда, проходящая через точку M, лежащую внутри окружности, делится этой точкой в отношении $\frac{m}{n}$. В каком отношении делит данную окружность эта хорда, если она образует угол φ с диаметром, проходящим через точку M?

150. Через точку, лежащую внутри круга радиуса R, проведены две взаимно перпендикулярные хорды, расстояния которых от центра круга равны a и b. Определить площадь части круга, ограниченной этими хордами и наименьшей дугой этой окружности, соединяющей их концы.

151. В круговой сектор OAB, центральный острый угол которого равен α, а радиус r, вписан прямоугольник данной площади s, одна из сторон которого лежит на радиусе OA. Вычислить стороны этого прямоугольника.

152. В круге с центром в точке O проведен радиус OA и на нем отложен отрезок $OB = a$. Определить наибольший из вписанных в этот круг углов, опирающихся на отрезок OB $(a < R)$.

§ 4. Применение тригонометрии к стереометрии

П. 1. Плоскости, прямые, двугранные углы

1. На ребре двугранного угла α взят отрезок c и из его концов в плоскостях граней восставлены перпендикуляры a и b. Определить расстояние между концами этих перпендикуляров.

2. Прямая AB параллельна плоскости p. Прямая CD пересекает прямую AB под углом α и образует с плоскостью p угол φ. Определить угол между плоскостью p и плоскостью, в которой лежат прямые AB и CD.

3. Все двугранные углы трехгранного угла равны α. Найти расстояние от точки до вершины трехгранного угла, зная, что эта точка находится на расстоянии a от каждого ребра трехгранного угла.

4. В трехгранном угле все плоские углы равны α. Найти расстояние от точки M до вершины этого угла, если точка M находится на расстояниях, равных a от всех трех граней данного трехгранного угла.

5. Отрезок AB, длина которого равна a, параллелен плоскости p. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные отрезку AB и образующие с плоскостью p углы α и β. Расстояние между точками пересечения плоскости p с проведенными прямыми равно b. Найти расстояние от отрезка AB до плоскости p.

6. Две пересекающиеся под углом α прямые пересекают плоскость P. Одна из них образует с плоскостью P угол β, а другая — угол γ. Определить угол между плоскостью, в которой лежат данные прямые, и плоскостью P.

7. Отрезки двух прямых линий, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся, как 2 : 3, а их углы с плоскостью — как 2 : 1. Определить эти углы.

8. Даны три плоских угла трехгранного угла:

$$\angle BSC = \alpha, \quad \angle CSA = \beta, \quad \angle ASB = \gamma.$$

Найти двугранные углы этого трехгранного угла.

9. Один из плоских углов трехгранного угла равен α, двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны соответственно β и γ. Найти два других плоских угла.

10. Найти угол ребра SA с плоскостью грани SBC трехгранного угла $SABC$, если

$$\angle BSC=\alpha,\quad \angle CSA=\beta,\quad \angle ASB=\gamma.$$

11. Определить угол между скрещивающимися диагоналями двух граней куба.

12. Отрезок AB параллелен плоскости. Из его концов проведены к плоскости две наклонные: $AC=c$ и $BD=d$. Наклонная AC составляет с плоскостью угол α. Определить угол наклонной BD с этой плоскостью.

13. Наклонная образует с плоскостью угол α. Через вершину этого угла проведена к данной плоскости вторая прямая под углом β к проекции наклонной на плоскость. Определить угол между этими прямыми.

14. Концы отрезка AB, длина которого равна a, отстоят от данной плоскости на расстояниях m и n. Определить угол между отрезком и плоскостью.

15. Дан трехгранный угол $SABC$, в котором плоские углы CSA и CSB равны α, а плоский угол ASB равен β. Определить угол наклона ребра SC к плоскости грани ASB.

16. Прямоугольный треугольник ABC расположен так, что его гипотенуза AB лежит на плоскости p, а катеты образуют с плоскостью p углы α и β. Определить угол между плоскостью треугольника и плоскостью p.

17. Параллелограмм и плоскость p расположены так, что одна из меньших сторон параллелограмма находится на плоскости p, а противоположная ей — удалена от плоскости на расстояние, равное расстоянию между большими сторонами параллелограмма. Определить угол между плоскостью p и плоскостью параллелограмма, если стороны параллелограмма относятся, как $3:5$.

18. На плоское зеркало под углом α падает световой луч (угол α — это угол, который образует падающий луч с перпендикуляром к зеркалу). Пусть l — отраженный луч. Затем зеркало поворачивают на угол β вокруг проекции падающего луча в плоскость первоначального положения зеркала. На какой угол отклонится отраженный луч l?

19. Доказать, что в любом трехгранном угле углы α_1, α_2, α_3 наклона ребер к противоположным граням связаны соотношением

$$\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{1}{\sin\alpha_2}-\frac{1}{\sin\alpha_3}\geqslant 1.$$

20. Доказать, что отношение синусов плоских углов любого трехгранного угла равно отношению синусов соответственно линейных углов трехгранных углов.

21. Сторона AB треугольника ABC лежит на плоскости p. Дано: $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$; двугранный угол между плоскостью треугольника ABC и плоскостью p равен φ. Найти внутренние углы треугольника ABC', где C' — проекция точки C на плоскость p.

22. Квадрат, сторона которого равна a, проектируется на некоторую плоскость в виде ромба со стороной b и острым углом α. Найти косинус угла между плоскостью квадрата и плоскостью его проекции.

23. В плоскости (P) дан ромб $ABCD$ со стороной a и углом $A=120°$. Через точки B, C, D проводят полупрямые By, Cz и Dt, перпендикулярные плоскости (P) и идущие по одну сторону от (P). На лучах By и Dt откладываются отрезки, соответственно равные $BB'=DD'=x$. Плоскость (P'), проходящая через точки A, B', D', пересекает Cz в точке C'.

1°. Доказать, что при изменении x плоскость (P') проходит через фиксированную прямую. Что представляет собою четырехугольник $AB'C'D'$? Определить в функции a и x длину CC', затем стороны и площадь четырехугольника $AB'C'D'$.

2°. Обозначим через φ угол между плоскостями (P) и (P'); вычислить $\operatorname{tg}\varphi$ и $\cos\varphi$ в функции a и x. Выразить $\operatorname{tg}\frac{B'AD'}{2}$ через $\cos\varphi$.

3°. Можно ли выбрать x так, чтобы четырехугольник $AB'C'D'$ был: а) квадратом, б) ромбом, подобным ромбу $ABCD$?

4°. Вычислить в функции a и x объем многогранника $ABCDA'B'C'D'$.

24. Пусть $ABCD$ и $ABEF$ — две грани куба с ребром a. На диагонали AC первой грани от точки A в направлении к точке C откладывается отрезок AM, а на диагонали FB от точки F к точке B откладывается отрезок той же длины $FN = AM = x$.

1°. Доказать, что при изменении x, MN остается параллельной некоторой плоскости. Найти геометрическое место середин отрезков MN.

2°. Вычислить в функции a и x величину $y = MN^2$. Изобразить эту функцию графически. Определить x, если задан $y = l$. Исследовать.

3°. Обозначим через α и β острые углы, которые образуют отрезок MN соответственно с AC и BF. Вычислить α и β в случае, если длина отрезка MN минимальна. Вычислить $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ в функции a и x в общем случае. Доказать при помощи полученных формул для $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, что MN никогда не может быть общим перпендикуляром к AC и FB. Как это можно установить чисто геометрически? Вычислить $\cos 2\alpha$, если $x = \frac{a}{2}$.

П. 2. Параллелепипед

1. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны a, b и c. Ребра a и b взаимно-перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объем параллелепипеда.
2. Ребра параллелепипеда, исходящие из общей вершины, соответственно равны a, b и c. Ребра a и b взаимно-перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них по углу, равному α. Определить угол наклона ребра c к плоскости ребер a и b.
3. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Одна из диагоналей параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней — угол φ. Найти объем параллелепипеда.
4. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна d и составляет угол α с большей стороной основания. Через эту сторону и противолежащую ей сторону верхнего основания проведена плоскость, которая наклонена к плоскости нижнего основания под углом β. Определить боковую поверхность параллелепипеда.
5. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.
6. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами α. Определить объем этого параллелепипеда.
7. Стороны основания параллелепипеда a и b образуют между собой угол α, боковое ребро его, равное c, наклонено к плоскости основания под углом β. Найти объем параллелепипеда.
8. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с острым углом α. Стороны основания равны a и b. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить площадь сечения, если секущая плоскости проходит через первую из этих диагоналей параллельно второй.
9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (одинаковыми буквами обозначены соответствующие точки верхнего и нижнего оснований) через диагональ AC_1 проведены плоскости AC_1D_1 и AC_1B_1. Вычислить угол между ними.

10. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с его основанием угол α. Боковая поверхность этого параллелепипеда равна s. Определить угол между диагональю и стороной основания.
11. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда проведена плоскость, параллельная диагонали основания, не пересекающей эту диагональ параллелепипеда. По сторонам основания a, b и высоте $2h$ определить внутренние углы фигуры, по которой плоскость пересекает параллелепипед.
12. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом α. Под каким углом к плоскости основания наклонена плоскость, рассекающая этот параллелепипед по квадрату?
13. Определить объем параллелепипеда, в котором даны площади p и q двух его граней, длина a их общего ребра и угол α между этими гранями.

П. 3. Призма

1. Определить объем прямой призмы, в основании которой лежит ромб с меньшей диагональю d и острым углом α, если угол между меньшей диагональю основания призмы и меньшей диагональю самой призмы равен β.
2. В основании четырехугольной призмы лежит ромб со стороной a и острым углом α; боковые ребра этой призмы равны b и наклонены к плоскости основания призмы под углом β. Определить объем призмы.
3. В основании прямой призмы лежит прямоугольник. Определить боковую поверхность и объем призмы, если диагональ призмы равна m и составляет с боковыми гранями соответственно углы α и β.
4. Основанием призмы служит ромб со стороной a и углом α. Боковые ребра имеют длину b и наклонены к основанию под углом β. Определить площадь перпендикулярного сечения призмы.
5. В треугольной призме известны длина бокового ребра l, углы α, β между ребром и прилежащими сторонами основания, длины a и b этих ребер и двугранный угол γ между боковыми гранями, проходящими через эти ребра. Определить объем призмы.
6. Определить объем прямой призмы, у которой в основании лежит ромб со стороною a и тупым углом α, если диагональ боковой грани этой призмы составляет с боковым ребром призмы угол β.
7. От правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью s. Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получающегося в сечении, равен α.
8. В правильной треугольной призме проведено сечение, проходящее через одну из сторон нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. Определить площадь сечения, если сторона основания равна a, а плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом α.
9. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Как надо пересечь эту призму, чтобы в сечении получился квадрат с вершинами на боковых ребрах.
10. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), периметр которого равен $2p$ и угол при вершине A равен α. Через сторону BC нижнего основания и противолежащую вершину A верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол β. Определить объем призмы.
11. В правильной четырехугольной призме проведена плоскость через середину оси и середины двух последовательных сторон основания. Сторона основания равна a, а боковое ребро равно b. Найти угол между проведенной плоскостью и основанием.
12. В основании усеченной призмы лежит равносторонний треугольник ABC с углами $ABC = \beta$, $BAC = \alpha$ и стороной $AB = c$. Вершины $A'B'C'$ верхнего

основания удалены от плоскости треугольника ABC на расстояниях $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$. Вычислить объем призмы $ABCA'B'C'$.

13. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, которая в сечении с призмой дает треугольник, периметр которого в n раз больше периметра основания призмы. Найти угол между секущей плоскостью и основанием призмы.

14. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к основанию так, что ее площадь равна s. Сторона основания равна a. Определить:
   а) угол между сечением и основанием;
   б) углы многоугольника, полученного в сечении.

15. Через сторону BC основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость, проходящая через вершину второго основания. Найти угол между этой плоскостью и основанием призмы для каждого из следующих случаев:
   а) отношение боковой поверхности призмы к полной поверхности отсеченной от нее треугольной пирамиды A_1ABC равно m;
   б) отношение боковой поверхности призмы к полной поверхности четырехугольной пирамиды $ABCB_1C_1$ равно m;
   в) отношение полной поверхности четырехугольной пирамиды $ABCB_1C_1$ к полной поверхности треугольной пирамиды A_1ABC равно m.

П. 4. Треугольная пирамида

1. Две боковые грани треугольной пирамиды — прямоугольные равнобедренные треугольники, гипотенузы которых равны a и образуют между собою угол α. Найти объем пирамиды.
2. Определить объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l и наклонено к плоскости основания под углом α.
3. Определить косинус внутреннего двугранного угла правильного тетраэдра.
4. Дана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковые ребра равны l и наклонены к основанию под углом β. Определить объем пирамиды.
5. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды.
6. Ребра оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны a и b $(a<b)$. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если известно, что боковые ребра наклонены к плоскости бо́льшего основания под углом α.
7. Ребра оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны соответственно a и b $(a<b)$. Определить ее высоту, если известно, что боковые грани образуют с плоскостью бо́льшего основания равные двугранные углы α.
8. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через одну из сторон основания перпендикулярно противолежащему ребру. Определить площадь сечения, если сторона основания равна a и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.
9. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно a, а боковая сторона равна b. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы α. Определить высоту пирамиды.
10. Основание пирамиды — правильный треугольник; из трех боковых граней этой пирамиды одна перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Под какими углами наклонены к основанию боковые ребра?
11. Вокруг правильной треугольной пирамиды, двугранный угол между боковыми гранями которой равен φ, описан шар. Найти отношение объема пирамиды к объему шара.

12. В пирамиде $SABC$ дано: $AB = AC = a$, $BAC = \varphi$. Грань SBC перпендикулярна плоскости основания ABC, а грани SBA и SCA образуют с плоскостью основания угол t. Определить объем и боковую поверхность.
13. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной вокруг боковой грани, равен r.
14. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания (длина общего перпендикуляра) равно d. Определить объем этой пирамиды.
15. Через среднюю линию основания правильного тетраэдра проведена плоскость, пересекающая два боковых ребра и наклоненная к основанию под углом α. Определить отношение площади сечения к площади грани тетраэдра.
16. Грани правильной усеченной треугольной пирамиды касаются шара. Определить отношение поверхности шара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом α.
17. Через одно из ребер правильного тетраэдра проведена плоскость, наклоненная под углом α к противоположному (т. е. не пересекающемуся с данным ребром) ребру. Определить площадь полученного сечения, если ребро тетраэдра равно a.
18. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, равную l. Из трех плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими ребрами, два равны α, а третий равен β. Найти объем пирамиды.
19**. В треугольной пирамиде $SABC$ дано: $\angle BSC = \alpha$, $\angle CSA = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Найти угол между скрещивающимися ребрами SA и BC, а также кратчайшее расстояние между ними.
20. В треугольной пирамиде, основание которой — прямоугольный равнобедренный треугольник, две грани, проходящие через катеты, перпендикулярны плоскости основания, а третья составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить боковую поверхность пирамиды, если площадь основания равна Q.
21. Определить зависимость между углами оснований боковых граней треугольной пирамиды и доказать, что эта зависимость справедлива и для n-угольной пирамиды.
22. В правильной треугольной пирамиде между двумя боковыми ребрами дан угол α. Найти угол между боковым ребром и основанием.
23. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна радиусу окружности, описанной вокруг основания. Через вершину A основания проведена плоскость, параллельная стороне BC основания и перпендикулярная боковой грани BSC. Определить угол между этой плоскостью и основанием.
24. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна радиусу окружности, описанной вокруг основания. Через вершину A основания проведена плоскость, параллельная стороне BC, которая делит объем пирамиды, считая от вершины S, в отношении $m : n$. Определить угол между секущей плоскостью и основанием.
25. Определить объем треугольной пирамиды по ее боковым ребрам a, b, c и двугранным углам β_1, β_2, β_3 при этих ребрах.
26. Определить объем треугольной пирамиды по ее боковым ребрам a, b, c и плоским углам α, β, γ при вершине.
27. Через ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, делящая его объем в отношении 3 : 5. На какие части она делит двугранный угол?
28. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α. Через боковое ребро проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении $m : n$. На какие части эта плоскость делит двугранный угол между боковыми гранями?

29. Пусть $SABC$ — правильная пирамида, основанием которой служит равносторонний треугольник, вписанный в окружность с центром O и радиусом R. Дан угол $ASB = \theta$.

1°. Вычислить сторону основания, длину бокового ребра, апофему, высоту и боковую поверхность пирамиды для случая $\theta = 60°$ и для случая $\theta = 90°$.

2°. В общем случае обозначим через α величину угла OAS. Подсчитать в функции тригонометрических функций угла α значения $\sin\frac{\theta}{2}$ и $\cos\theta$. Выразить $y = \cos\theta$ через $x = \cos 2\alpha$.

3°. Какой график выражает найденная в 2° зависимость y от x.

30. В треугольнике OAB:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad \angle AOB = \alpha.$$

Проведем прямую $Z'Z$ через точку O, перпендикулярную плоскости треугольника AOB.

1) Доказать, что для всякой точки C прямой $Z'Z$ можно найти такую другую точку D той же прямой, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ окажутся взаимно-перпендикулярными; определить зависимость между OC и OD. Найти геометрические места оснований высот этого тетраэдра и геометрическое место центра сферы, описанной вокруг этого тетраэдра.

2) Считая угол α острым, найти положение точек C и D, при котором объем тетраэдра достигает минимума. Вычислить этот объем и радиус сферы, описанной около тетраэдра.

П. 5. Многоугольные пирамиды

1. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а плоский угол при вершине равен α.
2. Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат; две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны плоскости ее основания; две другие ее боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, каждый из которых равен α. Высота пирамиды равна h. Определить боковую поверхность этой пирамиды.
3. Определить объем правильной пятиугольной пирамиды, если боковое ребро равно a, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен α.
4. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания, равную a, проведена секущая плоскость, делящая пополам двугранный угол при основании пирамиды, равный α. Определить площадь получившегося сечения.
5. Основание правильной четырехугольной пирамиды с плоским углом α при вершине вписано в основание полушара радиуса R, причем вершина S пирамиды находится вне полушара. Вычислить длину линии, по которой пересекаются поверхности этих тел.
6. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a; две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро ее наклонено к основанию под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что четыре вершины его находятся на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Определить объем параллелепипеда, зная, что диагональ его образует с плоскостью основания угол α.
7. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания относится к боковому ребру, как $m : n$. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Определить наклон этой плоскости к основанию.

8. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Определить двугранный угол при основании этой пирамиды.
9. В правильной четырехугольной пирамиде высота относится к стороне основания, как $m:n$. Через диагональ основания проведена наклонная плоскость так, что полученное сечение равновелико диагональному сечению. Определить угол между проведенной плоскостью и основанием пирамиды.
10. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведено сечение, перпендикулярное противоположной грани. Определить площадь сечения, если сторона основания равна a и боковая грань составляет с плоскостью основания угол α.
11. В правильную четырехугольную пирамиду, двугранный угол между смежными боковыми гранями которой равен α, вписан шар. Плоскость, проходящая через диагональ основания пирамиды и параллельная боковому ребру, рассекает шар на две части. Найти отношение объемов этих частей.
12. Правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой l наклонено к основанию под углом α, пересекается плоскостью, проходящей через центр описанного шара, вершину основания и параллельной диагонали основания. Определить площадь получившегося сечения.
13. В пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC; ребро $BC=a$; грань BSC наклонена к основанию под углом α, и площадь ее равна P. Определить объем этой пирамиды.
14. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между двумя смежными гранями равен β.
15. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой грани равна Q. Эта боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды.
16. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а плоский угол при вершине равен углу наклона бокового ребра к плоскости основания.
17. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Вершина пирамиды проектируется в одну из вершин этого квадрата. Две боковые грани пирамиды, таким образом, перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под одним и тем же углом α. Определить боковую поверхность пирамиды.
18. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна Q. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а две другие образуют с ним углы α и β. Определить объем пирамиды.
19. Основанием пирамиды служит трапеция $ABCD$, у которой $AB=BC=CD=a$ ($BC\parallel AD$); острые углы трапеции равны α. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объем пирамиды.
20. В правильной шестиугольной пирамиде отношение высоты к стороне основания равно k. Определить плоский угол α при вершине пирамиды и двугранный угол β между смежными боковыми гранями пирамиды.
21. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; двугранные углы при основании равны φ. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.
22. Пирамида имеет основанием ромб. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Определить угол между одной из двух других боковых граней и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды в m раз больше площади основания.
23. Найти объем пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом α, если известно, что ее диагональное сечение, проходящее через вершины тупых углов основания, представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна s, а вершина совпадает с вершиной

пирамиды. Угол между плоскостью этого сечения и плоскостью основания также равен α.

24. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α; из боковых граней две перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

25. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб, сторона которого равна a и острый угол равен α. Плоскости, проходящие через вершину пирамиды, и диагонали основания наклонены к плоскости основания под углами φ и ψ. Определить объем пирамиды, если ее высота пересекает сторону основания.

26. В правильной шестиугольной пирамиде с углом между боковыми ребрами, равным α, проведено сечение через наибольшую диагональ основания под углом β к нему. Найти отношение площадей сечения и основания.

27. В правильной четырехугольной пирамиде даны: апофема c и площадь P диагонального сечения. Определить угол между боковой гранью и основанием, а также сторону основания.

28. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, в которой a и $b\,(a > b)$ — параллельные стороны, а неравные отрезки диагоналей образуют угол φ. Найти объем пирамиды, зная, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся, как 2 : 1.

29. Определить плоский угол θ при вершине правильной n-угольной пирамиды, если боковые ребра ее наклонены к плоскости основания под углом α.

30. В правильной n-угольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Под каким углом к плоскости основания наклонены боковые ребра пирамиды?

31. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол θ между двумя смежными боковыми гранями.

32. В правильную n-угольную пирамиду вписан конус. Определить отношение полной поверхности пирамиды к полной поверхности конуса.

33. Основание пирамиды — правильный n-угольник, описанный вокруг большого круга шара радиуса R. Определить объем этой пирамиды, если боковые ребра ее касаются поверхности шара.

34. В правильную n-угольную пирамиду с ребром основания q и боковым ребром b вписан шар. Найти его радиус.

35. Вычислить объем правильной пирамиды высоты h, зная, что в основании ее лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна nd, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

36. Через вершину правильной n-угольной пирамиды и через две вершины многоугольника, лежащего в основании, под углом α к основанию проведена плоскость, рассекающая основание на два многоугольника, имеющие соответственно $r+2$ вершин и $n-r$ вершин $\left(r < \frac{n-2}{2}\right)$. Найти объем пирамиды, если общая сторона этих двух многоугольников равна b.

37. Основание пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$ — правильный n-угольник, сторона которого равна a. Высота пирамиды проектируется внутрь этого многоугольника вблизи вершины A_1. Плоские углы $\angle SA_1A_2$ и $\angle SA_2A_n$ при основании двух смежных боковых граней равны соответственно α и β, а их общее ребро равно b. Вычислить объем пирамиды.

П. 6. Цилиндр

1. К цилиндру проведена касательная прямая под углом α к плоскости его основания. Определить расстояние от центра нижнего основания до этой прямой, если его расстояние от точки касания равно d, а радиус цилиндра равен r.

2. В цилиндре высота h равна диаметру окружности основания. Точка верх-

ней окружности соединена с точкой нижней окружности; соединяющая прямая образует угол α с плоскостью основания цилиндра. Определить кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра.

3. Стороны равнобочной трапеции касаются круглого цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найти угол, который образует ось цилиндра с плоскостью трапеции, если длины оснований трапеции равны a и b, а высота трапеции равна h.
4. Все вершины квадрата, сторона которого равна 1, лежат на поверхности круглого цилиндра, ось которого перпендикулярна стороне квадрата и образует с его плоскостью угол α. Найти радиус цилиндрической поверхности.
5. Рассмотрим цилиндр радиуса R с высотой H. Плоскости, перпендикулярные его образующим и равноотстоящие друг от друга, делят цилиндр на m равных цилиндров. В каждую окружность оснований каждого цилиндра вписываем правильный n-угольник так, чтобы образующая цилиндра, проходящая через вершину любого многоугольника, делила бы пополам дугу, стягивающую сторону многоугольника, лежащего выше и ниже рассматриваемого. Вершины многоугольников соединяем с ближайшими к ним вершинами многоугольников, лежащих в ближайших параллельных сечениях. Получаем многогранник, все грани которого равны между собой и являются равнобедренными треугольниками, а вершины лежат на поверхности цилиндра. Требуется вычислить поверхность этого многогранника и найти ее предел при условии, что m и n стремятся к ∞ (цилиндр Шварца).

П. 7. Конус

1. Полукруг свернут в конус. Найти угол в осевом сечении этого конуса.
2. Определить объем конуса, если известно, что его боковая поверхность, будучи развернута на плоскость, дает круговой сектор с радиусом l и центральным углом α.
3. Угол, величина которого равна α, свернут в конус. Определить угол в осевом сечении этого конуса.
4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. Определить центральный угол в развертке его боковой поверхности.
5. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен 2α, а его высота равна h. Определить радиус шара, вписанного в конус.
6. Образующая прямого кругового конуса составляет угол α с плоскостью основания. Объем конуса равен v. Определить радиус основания и высоту этого конуса.
7. Определить полную поверхность конуса, если угол между его образующей и плоскостью основания равен α, а площадь осевого сечения равна s.
8. Полная поверхность конуса, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом α, равна P. Определить объем конуса.
9. Осевое сечение конуса представляет собой треугольник, площадь которого равна Q. Зная, что образующие конуса наклонены к плоскости основания под углом α, определить боковую поверхность и объем конуса.
10. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно-перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Определить объем этого конуса.
11. Полная поверхность прямого кругового конуса в n раз больше поверхности вписанного в него шара. Под каким углом образующие этого конуса наклонены к плоскости его основания?
12. Вокруг шара описан усеченный конус, боковая поверхность которого относится к поверхности шара, как $m:n$. Определить угол между образующей и большим основанием.

13. Поперечное сечение конуса, делящее его объем так, что часть этого объема, расположенная между сечением и вершиной конуса, составляет $\frac{1}{n}$ всего объема этого конуса, проходит через центр описанного шара. Найти наклон образующей к основанию.
14. Образующая усеченного конуса наклонена к его основанию, имеющему радиус R, под углом α; радиус другого основания равен r. Определить боковую поверхность усеченного конуса.
15. Конус и цилиндр имеют общие основания, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса, как 7 : 4?
16. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно-перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Определить полную поверхность этого усеченного конуса.
17. Сектор круга радиуса r с углом в n° свернут в виде конуса. Определить угол между образующей и основанием.
18. Площадь большего и меньшего оснований усеченного конуса и его боковая поверхность относятся, как $m : n : p$. Определить угол между образующей и большим основанием.
19. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса, как 3 : 1.
20. На общем основании построены два прямых конуса (один внутри другого) так, что их вершины находятся друг от друга на расстоянии a. Определить объем, ограниченный поверхностями конусов, если угол при вершине осевого сечения большего конуса равен α, а меньшего конуса равен β.
21. Площадь осевого сечения конуса относится к площади полной поверхности этого конуса, как $m : n$. Определить угол между образующей и основанием конуса.
22. В усеченном конусе высота равна h; образующая составляет с площадью нижнего основания угол α и перпендикулярна диагонали осевого сечения, проходящей через верхний конец этой образующей. Определить боковую поверхность усеченного конуса.
23. Внутри конуса, у которого угол при вершине осевого сечения равен α, находится другой конус, имеющий с первым общее основание; боковая поверхность внутреннего конуса есть среднее арифметическое площади основания и боковой поверхности внешнего конуса. Определить угол между высотой и образующей внутреннего конуса.
24. Перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую, вращается вокруг оси конуса. Часть конуса, от вершины до поверхности вращения перпендикуляра, составляет $\frac{1}{n}$ часть объема конуса. Определить угол между образующей конуса и его основанием.
25. В конус, радиус основания которого 2, вписана треугольная пирамида так, что вершина ее совпадает с вершиной конуса, а плоскость основания — с плоскостью основания конуса. Определить объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольный треугольник с углом α и все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равным α.
26. Прямая линия, касательная к боковой поверхности конуса, составляет с образующей, проходящей через точку касания, угол θ. Какой угол φ составляет эта прямая с плоскостью основания P конуса, если образующие его наклонены к плоскости P под углом α?
27. Через вершину конуса проведены две плоскости. Одна из них наклонена к плоскости основания конуса под углом α и пересекает это основание по

хорде, длина которой равна a, а другая наклонена к плоскости основания под углом β и пересекает основание по хорде, длина которой равна b. Определить объем конуса.

28. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении прямого кругового конуса, зная, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

29. Высота конуса равна H. Угол между осью конуса и его образующей равен α. Через середину высоты под углом β к оси проведена прямая, пересекающая боковую поверхность конуса в двух точках. Определить ее отрезок, заключенный внутри конуса.

30. Определить в конусе угол между образующей и плоскостью основания, если площадь основания, поверхность вписанного шара и площадь боковой поверхности конуса составляют арифметическую прогрессию.

31. Через вершину O конуса проводится плоскость p, параллельная его основанию. Угол между осью конуса и его образующей равен α. Через середину высоты конуса проводится прямая, образующая острый угол β с этой высотой; отрезок этой прямой между плоскостью p и плоскостью основания конуса равен a. Определить отрезок проведенной прямой, заключенный внутри конуса.

32. В конус с радиусом основания r и углом α между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма с равными ребрами так, что ее основание лежит в плоскости основания конуса. Определить объем призмы.

33. В конус, высота которого H, вписана правильная треугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность и объем пирамиды и конуса.

34. В конус, радиус основания которого r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α, вписана прямая треугольная призма, все ребра которой равны между собой, а основание лежит в плоскости основания конуса. Найти длину ребра призмы.

35. В прямой конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом σ, вписана правильная n-угольная пирамида. Определить отношение полной поверхности пирамиды к полной поверхности конуса.

36. В прямой круговой конус вписана треугольная пирамида, у которой плоские углы при вершине равны α, β и γ. Определить объем этой пирамиды, если объем конуса равен v.

37. В конус, образующая которого l наклонена к плоскости основания под углом σ, вписана правильная n-угольная призма, все ребра которой равны между собой. Найти полную поверхность призмы.

38. Два равных конуса расположены в пространстве так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны α. Найти угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

39. В пространстве даны две точки: A и B ($AB = 2a$).

1°. Доказать, что плоскости, проходящие на равных расстояниях d ($d < a$) от точек A и B, либо параллельны AB, либо проходят через середину отрезка AB. Обозначим через S_1 семейство всех плоскостей, каждая из которых параллельна отрезку AB и проходит от точек A и B на расстоянии d, а через S_2 — семейство всех плоскостей, которые проходят через середину J отрезка AB и находятся на расстоянии d от точек A и B. Каждая плоскость первого семейства касается некоторого кругового цилиндра C_1, каждая плоскость второго семейства касается некоторого прямого кругового конуса C_2.

2°. Пусть P — произвольная плоскость из семейства S_1. Доказать, что существуют две плоскости Π и Π' из семейства S_2, перпендикулярные плоскости P. Существует ли другая плоскость P' из семейства S_1, также перпендикулярная плоскостям Π и Π'?

3°. Пусть P — какая-нибудь плоскость из семейства S_1. Обозначим через M какую-нибудь точку, в которой пересекается эта плоскость P, конус C_2 и какая-нибудь плоскость из семейства S_2. Обозначим через A', B' и J' проекции точек A, B, и J на плоскость P, а через K и L — проекции точки M на AB и $A'B'$; пусть α — угол прямой JM с плоскостью P и β — половина угла осевого сечения конуса C_2. Доказать, что

$$KL = d,\quad J'L = \frac{d\cos\beta}{\sin\alpha},\quad MK = \frac{d\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Доказать, что существует соотношение между $J'L^2$ и LM^2.

40. Сосуд состоит из боковой поверхности усеченного конуса, меньшее основание которого закрыто касающимся образующих сферическим сегментом. При этом, если продолжить этот сферический сегмент, то сфера коснется большего основания (черт. 78).

1°. Зная радиус R сферы и угол 2α между двумя противоположными образующими конуса, вычислить радиус AH меньшего основания усеченного конуса, его высоту HK и образующую AB.

2°. Показать, что, исходя из тождества

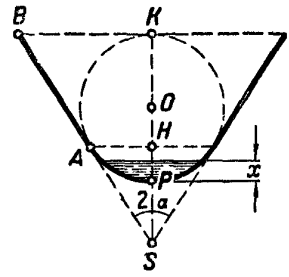
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

можно легко вычислить AB.

3°. В дальнейшем полагаем, что $\alpha = 30°$. Сосуд наливают водой; уровень воды x (считая от дна). Вычислить поверхность s воды:

а) в случае $x < PH$;

б) в случае $x > PH$.



Черт. 78.

4°. Начертить график функции $s = s(x)$ при условии, что x изменяется от 0 до PK. Показать, что график состоит из двух различных кривых, имеющих, однако, в общей точке общую касательную.

П. 8. Сфера в комбинации с многогранниками, цилиндром и конусом

1. В конус вписан шар. Высота конуса h; угол образующей с плоскостью основания α. Определить поверхность шара.

2. Определить отношение объема конуса к объему описанного вокруг него шара, если образующая наклонена к основанию под углом α.

3. Поверхность шара, вписанного в конус, равна площади основания конуса. Найти угол при вершине конуса.

4. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, ребро которой наклонено к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды.

5. Полная поверхность конуса в два раза больше поверхности вписанного в него шара. Определить отношение объема конуса к объему шара.

6. Плоскость, проведенная через центр шара, вписанного в конус, параллельно плоскости основания конуса, делит объем конуса пополам. Найти угол в осевом сечении конуса.

7. Вокруг шара радиуса R описан прямой круговой конус, в котором угол между образующей и плоскостью основания равен α. Определить боковую поверхность этого конуса.

8. В конус с образующей l, наклоненной к плоскости основания под углом α, вписан шар, а в него — куб. Определить поверхность куба.

9. В конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом α, вписан шар. Определить отношение объема шара к объему конуса.

10. В конус вписан полушар так, что плоская сторона лежит на основании конуса, а выпуклая сторона касается всех образующих. По длине образующей l и углу α между образующей и основанием найти объем полушара.

11. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α, а радиус основания конуса равен R. Найти радиус такой сферы с центром в вершине конуса, которая делила бы объем конуса пополам.

12. Определить двугранный угол при основании правильной пирамиды, если центр вписанного шара делит ее высоту в среднем и крайнем отношении.

13. Определить двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если радиус шара, описанного вокруг нее, в n раз больше радиуса вписанного шара.

14. Вокруг сферы описана правильная $2n$-угольная пирамида, у которой угол между плоскостью основания и боковой гранью равен α. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности сферы.

15. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

16. Радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен r. Двугранный угол, образованный двумя соседними боковыми гранями этой пирамиды, равен α. Определить объем пирамиды, имеющей вершину в центре шара, а вершины основания — в четырех точках касания шара с боковыми гранями данной пирамиды.

17. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар радиуса r. Определить полную поверхность конуса и его объем.

18. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой образует с плоскостью основания угол α. Определить объем пирамиды.

19. В прямой круговой усеченный конус вписан шар. Объем этого шара составляет половину объема конуса. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

20. В конус вписан шар. Линия касания шара и боковой поверхности конуса делит последнюю в отношении $\frac{m}{n}$. Определить угол между образующей и основанием конуса.

21. В усеченный конус вписан шар. Радиусы оснований конуса r_1 и r_2. Определить угол наклона образующей конуса к основанию.

22. Вокруг шара описан прямой параллелепипед, объем которого в m раз больше объема шара. Определить углы в основании параллелепипеда.

23. Из вершины конуса, как из центра, описана сферическая поверхность, касающаяся основания конуса. Часть конуса, заключенная между вершиной и этой поверхностью, составляет по объему $\frac{1}{n}$ часть объема конуса. Определить угол при вершине осевого сечения конуса.

24. Вокруг шара описана правильная четырехугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить отношение объемов частей пирамиды, на которые ее рассекает касательная к шару плоскость, проведенная параллельно основанию.

25. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен r. Радиус шара, проведенный в произвольную точку этой окружности, наклонен к ее плоскости под углом α. Найти объем конуса.

26. Вокруг шара, радиус которого равен r, описан конус (прямой, круговой) наименьшего объема. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

27. В конус, образующая которого составляет угол α с плоскостью основания, вписан полушар так, что бо́льший круг полушара лежит на плоскости основания. Определить, в каком отношении объем конуса делится сферической поверхностью.

28. Определить угол в осевом сечении прямого кругового конуса, если объем вписанного в него шара равен объему, содержащемуся между сферической поверхностью и вершиной конуса.

29. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, если полная поверхность конуса относится к боковой поверхности полусферы как $18:5$.

30. Вокруг шара радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет угол α с плоскостью большего основания. Определить объем и боковую поверхность усеченного конуса.

31. Вокруг шара радиуса R описана правильная шестиугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность и объем пирамиды.

32. Три шара имеют радиусы, каждый из которых равен $6a$, а четвертый шар — радиус a. Найти радиус пятого шара, если известно, что каждый из пяти шаров (внешним образом) касается четырех остальных.

33. Вокруг шара описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.

34. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Вычислить объем пирамиды, если ее ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

35. Определить двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанного шара в $2^1/_2$ раза более радиуса вписанного шара.

36. Правильный многоугольник, имеющий четное число сторон, вращается вокруг прямой, параллельной его стороне и не пересекающей многоугольник. Вычислить предельным переходом поверхность и объем тела вращения, полученного вращением окружности вокруг прямой, не пересекающей окружность.

37. Внутри конуса лежит шарик, касающийся основания в его центре. Через вершину конуса проведена плоскость, касательная к шарику. Эта плоскость наклонена к плоскости основания конуса под углом β и отсекает на окружности основания дугу α (в угловой мере). Определить поверхность шарика и объем конуса, если высота конуса равна H.

38. Площадь поверхности шара, вписанного в конус, равна площади основания конуса. Определить угол при вершине осевого сечения конуса. Решить задачу, предполагая, что отношение поверхности шара к площади основания конуса равно m.

39. Определить угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса, если шаровая поверхность с центром в его вершине, касающаяся основания, делит объем конуса в отношении $1:2$ (считая от вершины).

40. Отношение поверхности шарового сегмента к боковой поверхности конуса, имеющего вершину на поверхности шара, а основание общее с основанием сегмента, равно m. Определить угол между образующей конуса и осью. Разобрать два случая:

а) конус расположен вне сегмента;

б) конус вписан в сегмент.

41. Центры шаров, описанного вокруг правильной четырехугольной пирамиды и вписанного в нее, совпадают. Определить плоский угол при вершине этой пирамиды.

42. Площадь поверхности шарового пояса, основания которого равны между собой, равна сумме площадей оснований. Определить величину дуги в осевом сечении шарового пояса.

43. Определить центральный угол осевого сечения сферического сектора 1-го рода (т. е. не имеющего полости), если объемы его сферической и конической части равны между собой.

44. Из точки шара радиуса R проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить длину этих хорд.

45. На поверхности полусферы радиуса r расположены три окружности, радиусы которых равны a, причем каждая окружность внешним образом касается двух других. Найти радиус окружности, также расположенной на данной полусфере и касающейся трех данных окружностей внутренним образом.

46. Определить поверхность тела, получаемого при вращении правильного пятиугольника со стороной a вокруг одной из его сторон.

47. Дуга, стягиваемая хордой длины a, вращается вокруг диаметра, проведенного из ее конца и образующего с хордой угол φ. Определить площадь полученной поверхности.

48. Ромб с большей диагональю d и острым углом γ вращается вокруг оси, проходящей через вершину ромба и перпендикулярной большей диагонали его. Определить объем тела вращения.

49. Определить отношение объемов двух тел, образованных вращением равнобедренного треугольника вокруг основания и одной из боковых сторон, зная, что угол при вершине этого треугольника равен 2α.

50. Сегмент круга вращается вокруг диаметра, проходящего вне сегмента и составляющего с хордой его, равной a, угол α. Определить объем полученного тела вращения.

51. Через точку A окружности проведены хорда AC и диаметр AB. Отношение объема, образованного вращением фигуры $ACmB$ вокруг диаметра AB, к объему, полученному при вращении сегмента AnC вокруг той же оси, равно k. Определить угол между AC и AB.

52. Рассмотрим семейство сфер, касательных к данной плоскости P в данной точке A. Дана прямая OX, перпендикулярная плоскости P. Доказать, что точки касания рассматриваемых сфер с касательными плоскостями к ним, проходящими через OX, расположены на конусе вращения, сфере и цилиндре вращения. Найти эти поверхности.

53. ABC — прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c; $BC = a$ — гипотенуза. Вращая этот треугольник вокруг $CA = b$, получим конус.

1°. Определить центр I и радиус r сферы, вписанной в этот конус.

2°. Окружность, по которой касается сфера (I) с конусом, делит (I) на два сферических сегмента. Найти отношение их поверхностей в функции a и c, затем в функции $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$.

3°. Проводится плоскость (P) через прямую CB. Конус пересекается по треугольнику BCB'; BB' — сторона этого треугольника, лежащая в основании конуса; положим $BB' = 2x\ (0 \leqslant x \leqslant c)$; рассмотрим также угол $2u$ при вершине C треугольника BCB' (угол u с x связан простым соотношением). Сфера (I) пересекается этой плоскостью по окружности (I') радиуса r'.

Стороны a, b, c считаются заданными. Вычислить r' и отношение площади круга (I') к площади треугольника BCB' в функции x.

54. Рассмотрим две сферы (A) и (B) радиусов a и b такие, что одна лежит вне другой. Расстояние между их центрами обозначим через $2d$ (так что $2d > a + b$).

I. Предположим, что $a \geqslant b$.

1°. Пусть P — какая-нибудь точка, лежащая на сфере (A). Доказать, что существует две, одна или нет ни одной общей касательной к сферам (A) и (B), таких, что сферы (A) эти касательные касаются в точке P в зависимости от того, пересекает, касается или не пересекает сферу (B) плоскость, касательная к сфере (A) в точке P.

Как в первом случае можно построить эти две общие касательные?

2°. Рассмотрим плоскость (v), проходящую через линию центров AB, которая пересекает (A) и (B) соответственно по окружностям (α) и (β); точка P берется на одной из полуокружностей, отсеченной от (α) прямой AB; положение точки P на этой полуокружности определяется углом λ от луча AB до луча AP $(0 \leqslant \lambda \leqslant \pi)$; касательная в точке P к окружности (α) есть след на плоскости (v), плоскости касающейся сферы (A) в точке P. Определить дугу полуокружности, на которой должна находиться точка P для того, чтобы через нее проходила по крайней мере одна касательная, общая к сферам (A) и (B); в каких пределах должен быть в таком случае заключен $\cos\lambda$? Плоскость поворотом вокруг касательной к окружности (α) в точке P совмещается с плоскостью (v); при этом общие касательные к сферам (A) и (B) также попадут в плоскость (v). Построить в плоскости (v) совмещение этих касательных.

3°. Рассмотрим все касательные, общие к заданным сферам. Найти на этих сферах геометрическое место точек прикосновения и охарактеризовать размеры соответствующих зон и их площади.

II. Случай равных сфер.

Предположим $a = b$. Обозначим через O середину отрезка AB, через P и Q — точки прикосновения общей касательной к сферам (A) и (B) с этими сферами и через F — ортогональную проекцию точки O на прямую PQ.

1°. Доказать, что F — середина отрезка PQ и что прямая OF — общий перпендикуляр прямых AB и PQ в случае, если эти прямые не лежат в одной плоскости. Начертить ортогональные проекции фигуры, образованной отрезками AB, PQ, AP, OF и BQ, принимая последовательно в качестве плоскости проекции: плоскость, параллельную AB и PQ; плоскость, перпендикулярную PQ, и, наконец, плоскость, перпендикулярную AB.

2°. Принимая предположения и обозначения, введенные в I, 2° относительно расположения плоскости (v) и выбора точки P на полуокружности (α), при котором существует, по крайней мере, одна общая касательная к сферам (A) и (B), вычислить в функции a, d и $\cos\lambda$ длины отрезков PQ и OF и косинусы углов:

$$y = \cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}), \quad z = \cos(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}), \quad u = \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}).$$

3°. Полагая $\cos\lambda = x$ и $\frac{a}{d} = m$, выразить y, z и u через m и x. Изучить изменение этих функций при условии, что $x = \cos\lambda$ принимает всевозможные значения.

III. Случай неравных сфер.

Предположим $a > b$.

1°. Пусть M — какая-нибудь точка, лежащая вне сферы (A) и вне сферы (B). Рассмотрим два конуса вращения: (M, A) и (M, B), с вершиной M, описанных соответственно вокруг двух сфер: (A) и (B) (слово «конус» означает здесь ничем не ограниченную коническую поверхность, продолженную в обе стороны от вершины). Доказать, что геометрическое место точек M таких, что конусы (M, A) и (M, B) равны, есть сфера (S); определить точки I и J встречи этой сферы с линией центров AB (через I обозначим ту из точек, которая лежит внутри отрезка AB) (для решения этого вопроса можно вычислить сначала синусы половин углов в осевых сечениях конусов (M, A) и (M, B) в функции радиусов a, b и расстояний MA и MB).

2°. Доказать, что ортогональные проекции H и K точек I и J на общую касательную к сферам (A) и (B) лежат на сфере (S). Что предста-

вляет собою прямая HI для треугольника HAB (а также прямая KJ для треугольника KAB), если точка H (соответственно K) не расположена на AB? Показать, что если общая касательная к двум сферам (A) и (B) не пересекает их линии центров AB, то точка H есть один из центров гомотетии двух окружностей, полученных в сечении сфер (A) и (B) плоскостью, перпендикулярной IH и проходящей через H; где находится второй центр гомотетии этих двух окружностей? Изложить окончательные результаты для точки K.

3°. Доказать, что геометрическое место ортогональных проекций точек I и J на все общие касательные к сферам (A) и (B) есть два сферических сегмента сферы (S). Вычислить высоту и площадь каждого из них в функции a, b, d. Какому условию должны удовлетворять a, b, d для того, чтобы эти два сферических сегмента имели бы общую часть. Пусть, наконец, M — точка сферы (S). Как можно определить общие образующие конусов (M, A) и (M, B)? Исследовать, в зависимости от различных положений точки M на сфере (S), число этих общих образующих.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. АЛГЕБРА

Глава I. Тождественные преобразования

§ 1. Тождественные преобразования многочленов

13. Воспользоваться тождеством $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ и положить $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$. **14.** См. указание к предыдущей задаче. **15.** См. указание к задаче № 13. **17.** См. указание к задаче № 13. **18.** См. указание к задаче № 13. **19.** См. указание к задаче № 13. **20.** Положить $b+c-a=2x$, $c+a-b=2y$, $a+b-c=2z$; тогда $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ и т. д. **22.** Рассмотрим выражение $(x+y+z)^3-(-x+y+z)^3-(x-y+z)^3-(x+y-z)^3$. При $x=0$, при $y=0$ и при $z=0$ оно обращается в 0 и значит делится на xyz. Но это выражение 3-й степени относительно x, y, z, следовательно, в частном получится число C и, таким образом, данное выражение равно $Cxyz$. Но при $x=y=z=1$ данное выражение обращается в 24, значит $C=24$. **24.** См. указание к задаче № 22. **25.** $4[(x-a)^2+3ax]^3-27a^2x^2(x+a)^2=4(x-a)^6+36(x-a)^4ax+108(x-a)^2a^2x^2+108a^3x^3-27a^2x^2(x+a)^2=4(x-a)^6+36(x-a)^4ax+108(x-a)^2a^2x^2-27a^2x^2(x-a)^2=(x-a)^2(2x^2+5ax+2a^2)^2=(x-a)^2(2x+a)^2(x+2a)^2$. **28.** Левая часть при $a=0$, при $b=0$, при $c=0$ и при $a=-(b+c)$ обращается в нуль и, следовательно, имеет вид $Cabc(a+b+c)$. При $a=b=c=1$ получаем $81-48+3=3C$, $C=12$. **33.** Положить $y+z=u$, $y-z=v$. **34.** Положить $a-c=x$, $b-a=y$; тогда $b-c=x+y$ и далее см. № 31 и 32. **35.** Данное выражение обращается в нуль при $a=b=c=d=0$ и $a+b+c+d=0$ (отсюда, например, $a+b=-(c+d)$ и $(a+b)^5+(c+d)^5=0$ и т. д.). Значит левая часть равна $Cabcd(a+b+c+d)$. При $a=b=c=d=1$ имеем $4C=4^5-4\cdot3^5+6\cdot2^5-4=240$, $C=60$. **39.** Левая часть есть целая рациональная функция от a третьей степени. При четырех значениях a ($a=0$, $a=b$, $a=c$, $a=d$) она обращается в нуль; следовательно, данное выражение тождественно равно нулю. **41.** $x^3+y^3+z^3-3xyz$. **42.** x^6-1. **43.** $a^3+b^3+c^3+d^3-3(abc+abd+acd+bcd)$. **44.** $4abc$. **45.** $b^2(a+3b)^2$. **46.** $(bc+ca+ab)^2$. **47.** $abcd(a+b+c+d)^2$.

§ 2. Условные тождества между многочленами

4. Указание к в), г) и д): см. гл. I, § 1, № 30, 31, 32. **6.** Указание. $4x^3-27y^2=4(b^2+bc+c^2)^3-27b^2c^2(b+c)^2=4[(b-c)^2+3bc]^3-27b^2c^2[(b-c)+2c]^2$. **13.** Указание. $u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)\cdot\frac{1}{2}[(v-w)^2+(w-u)^2+(u-v)^2]$. **14.** Указание. $X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY=\frac{1}{2}[(Y-Z)^2+(Z-X)^2+(X-Y)^2]$. **16.** Решение: возьмем три данных соотношения:

$$\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=1,\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0,\\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3&=0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Умножая первое из них на $b_2c_3-b_3c_2$, второе на $c_1b_3-c_3b_1$ и третье на $b_1c_2-b_2c_1$ и складывая, получим $a_1(a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+a_2c_1b_3-a_2c_3b_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)=b_2c_3-b_3c_2$, или $a_1\cdot\Delta=b_2c_3-b_3c_2$ (2), где $\Delta=a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+a_2c_1b_3-a_2c_3b_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$. Умножая первое из соотношений (1) на $c_2a_3-c_3a_2$, второе — на $a_1c_3-a_3c_1$ и третье — на $a_2c_1-a_1c_2$, а затем, складывая, получим $b_1\cdot\Delta=a_3c_2-a_2c_3$ (3). Умножая первое из соотношений (1) на $a_2b_3-a_3b_2$, второе — на $b_1a_3-b_3a_1$ и третье — на $a_1b_2-a_2b_1$ и складывая, получим: $c_1\cdot\Delta=a_2b_3-a_3b_2$. (4). Из соотношений (2), (3), (4) следует, что $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\Delta^2=(b_2c_3-b_3c_2)^2+(a_3c_2-a_2c_3)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)-(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)^2=1$. Но $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$, значит $\Delta^2=1$, откуда $\Delta=1$ или

$\Delta = -1$. Аналогично могут быть выведены соотношения: $a_2 \cdot \Delta = b_3c_1 - b_1c_3$, $b_2 \cdot \Delta = a_1c_3 - a_3c_1$, $c_2 \cdot \Delta = a_1b_3 - a_3b_1$ и $a_3 \cdot \Delta = b_1c_2 - b_2c_1$, $b_3 \cdot \Delta = a_2c_1 - a_1c_2$, $c_3 \cdot \Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Теперь находим $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3 = a_1 \dfrac{b_2c_3 - b_3c_2}{\Delta} + a_2 \dfrac{b_3c_1 - b_1c_3}{\Delta} + a_3 \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{\Delta} = \dfrac{\Delta}{\Delta} = 1$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1 \cdot b_1 + b_2 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_3 = b_1 \cdot \dfrac{a_3c_2 - a_2c_3}{\Delta} + b_2 \dfrac{a_1c_3 - a_3c_1}{\Delta} + b_3 \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{\Delta} = \dfrac{\Delta}{\Delta} = 1$ и аналогично $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$. Далее, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1 \dfrac{a_3c_2 - a_2c_3}{\Delta} + a_2 \dfrac{a_1c_3 - a_3c_1}{\Delta} + a_3 \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{\Delta} = 0$ (после приведения подобных членов) и аналогично $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$, $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$.

§ 3. Симметрические многочлены

1. Указания: имеется несколько методов представления симметрической функции в виде целой рациональной функции от основных симметрических функций. Эти методы основаны на формулах Ньютона и Варинга. Существуют также методы Жирара и Гаусса. *

Первый способ. Пусть

$$p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n$$

основные симметрические функции от n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — данная симметрическая функция. Рассмотрим то слагаемое $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ в выражении для φ, в котором $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ (в силу симметрии φ такое слагаемое всегда существует). Разность $\varphi - Ap_1^{\alpha_1-\alpha_2}p_2^{\alpha_2-\alpha_3} \ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}p_n^{\alpha_n}$ будет также симметрической функцией, и в ней это слагаемое $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ сократится. Продолжая вычитание, мы решим задачу. Можно также воспользоваться методом неопределенных коэффициентов (см. ниже). Решим теперь первый пример: $\varphi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; здесь слагаемое $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, о котором говорилось выше, есть $x^3y^0z^0$. При этом $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Находим $\varphi - p_1^3p_2^0p_3^0 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - (x + y + z)^3 = -3(y + z)x^2 - 3(3yz + z^2 + y^2)x - 3yz(y + z)$. Теперь в члене $-3x^2y$ мы имеем: $A = -3$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Составляем разность $-3(y + z)x^2 - 3(3yz + z^2 + y^2)x - 3yz(y + z) + 3(x + y + z)(yz + zx + xy) \equiv 0$. Итак, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p_1^3 - 3p_1p_2 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(yz + zx + xy)$.

Второй способ (метод неопределенных коэффициентов). Возьмем член x^3; для него $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. После составления соответствующей разности надо будет рассматривать слагаемое вида x^2y, для которого $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$, затем слагаемое вида xyz, для которого $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Соответствующие слагаемые, которые надо будет вычитать, будут: Ap_1^3, Bp_1p_2, Cp_3. Итак, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = A(x + y + z)^3 + B(x + y + z)(yz + zx + xy) + Cxyz$. Пусть $x = y = 0$, $z = 1$, тогда $1 = A$; пусть $z = 0$, $x = y = 1$, тогда $2 = 8A + 2B$, $B = -3$; пусть $x = y = z = 1$, тогда $0 = 27A + 9B + C = 0$, $C = 0$. Итак, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p_1^3 - 3p_1p_2 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(yz + zx + xy)$. Наконец, задача допускает и элементарное решение: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3yz - 3zx - 3xy] = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(yz + zx + xy)$. 2. $p_1p_2 - 3p_3$. 3. $p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 8p_1p_3$. 4. Указание. Составляем таблицу значений α_1, α_2, α_3 ($\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7$):

α_1	α_2	α_3
5	2	0
5	1	1
4	3	0
4	2	1
3	3	1
3	2	2

* См., например, А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры.

Значит, $x^5y^2+x^2y^5+x^5z^2+z^5x^2+y^5z^2+z^5y^2=Ap_1^3p_2^2+Bp_1^4p_3+Cp_1p_2^3+Dp_1^2p_2p_3+Ep_2^2p_3+Fp_1p_3^2=A(x+y+z)^3(yz+zx+xy)^2+B(x+y+z)^4xyz+C(x+y+z)(yz+zx+xy)^3+D(x+y+z)^2(yz+zx+xy)xyz+E(yz+zx+xy)^2xyz+F(x+y+z)x^2y^2z^2$.

Следует придавать x, y и z такие значения, чтобы в полученных уравнениях A, B, C, D, E, F определялись постепенно; так, полагая $z=2$, $x=y=-1$, находим: $-1-1-4+32-4+32=9\cdot 2E$, откуда $E=3$. Полагая $z=0$, $x=y=1$ и $z=0$, $x=1$, $y=2$, получим $8A+2C=2$, $108A+24C=36$, откуда $A=1$, $C=-3$. Полагая $x=2$, $y=-1$, $z=2$ и $x=3$, $y=-2$, $z=6$ (для того, чтобы обратился в нуль член $yz+zx+xy$), получим: $3^4(-4)B+3F\cdot 4\cdot 4=32-4+128+128-4+32$ и $7^4\cdot 3\cdot(-2)\cdot 6B+7\cdot 6^2\cdot 3^2\cdot 2F=3^5(-2)^2+(-2)^5\cdot 3^2+3^5\cdot 6^2+6^5\cdot 3^2+(-2)^5\cdot 6^2+6^5(-2)^2$, откуда $B=-2$, $F=-7$. Наконец, полагая $x=y=z=1$, найдем $6=243A+81B+81C+27D+9E+3F$, откуда $D=6$. Итак, $x^5y^2+x^2y^5+x^5z^2+z^5x^2+y^5z^2+z^5x^2=(x+y+z)^3(yz+zx+xy)^2-2(x+y+z)^4xyz-3(x+y+z)(yz+zx+xy)^2+6(x+y+z)^2(yz+zx+xy)xyz+3(yz+zx+xy)^2xyz-7(x+y+z)(xyz)^2$. 5. $p_1p_2-p_3$. 6. $p_1^2p_2^2-2p_1^3p_3-2p_2^3+4p_1p_2p_3-p_3^2$. 7. $p_1p_2p_3-p_1^2p_4-p_3^2$. 8. $p_1^2p_2^2-4p_1^3p_3-4p_2^3+18p_1p_2p_3-27p_3^2$. 9. $p_1^2p_4+p_3^2-4p_2p_4$. 10. Ответ: $p_1^3-3p_1p_2+3p_3$. Задача может быть решена элементарно или указанным общим методом, или еще при помощи формул Ньютона. Рассмотрим целую рациональную функцию от x

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n), \tag{1}$$

или

$$f(x)=x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}-p_3x^{n-3}+\dots+(-1)^n p_n, \tag{2}$$

где p_1, p_2, p_3, ..., p_n — основные симметрические функции. Найдем $f(x+h)$, исходя из (1) и исходя из (2):

$$\begin{aligned}f(x+h)&=(x+h-x_1)(x+h-x_2)(x+h-x_3)\dots(x+h-x_n)=\\&=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)+\\&\quad+h[(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)+\\&\quad+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)+\\&\quad+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)+\dots+\\&\quad+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})]+\dots;\end{aligned}$$

с другой стороны $f(x+h)=(x+h)^n-p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}-\dots+(-1)^n p_n=x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}-\dots+(-1)^n p_n+h[nx^{n-1}-p_1(n-1)x^{n-2}+p_2(n-2)x^{n-3}-\dots+(-1)^{n-1}p_{n-1}]+\dots$ Приравнивая полученные выражения и учитывая равенства (1) и (2), мы получим равенство двух многочленов относительно h, начинающихся с h в первой степени. Так как эти многочлены тождественно равны, то должны быть равны коэффициенты при h в первой степени, т. е.

$$\begin{aligned}&(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)+\\&+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)+\\&+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)+\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\\&+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})=\\&=nx^{n-1}-p_1(n-1)x^{n-2}+p_2(n-2)x^{n-3}+\dots+(-1)^{n-1}p_{n-1},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\dots+\frac{f(x)}{x-x_n}=\\&=nx^{n-1}-p_1(n-1)x^{n-2}+p_2(n-2)x^{n-3}+\dots+(-1)^{n-1}p_{n-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Если выполнить деление $f(x)$ на $x-x_1$, исходя из выражения (2) для $f(x)$, то мы получим $\frac{f(x)}{x-x_1}=x^{n-1}+(x_1-p_1)x^{n-2}+(x_1^2-x_1p_1+p_2)x^{n-3}+\dots+x_1^{n-1}-x_1^{n-2}p_1+x_1^{n-3}p_2-\dots+(-1)^{n-1}p_{n-1}$, и аналогично

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x-x_2}&=x^{n-1}+(x_2-p_1)x^{n-2}+(x_2^2-x_2p_1+p_2)x^{n-3}+\dots+\\&\quad+x_2^{n-1}-x_2^{n-2}p_1+x_2^{n-3}p_2-\dots+(-1)^{n-1}p_{n-1},\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\\frac{f(x)}{x-x_n}&=x^{n-1}+(x_n-p_1)x^{n-2}+(x_n^2-x_np_1+p_2)x^{n-3}+\dots+\\&\quad+x_n^{n-1}-x_n^{n-2}p_1+x_n^{n-3}p_2-\dots+(-1)^{n-1}p_{n-1}.\end{aligned}$$

Складывая и учитывая (3), получим

$$nx^{n-1}-p_1(n-1)x^{n-2}+p_2(n-2)x^{n-3}-\ldots+(-1)^{n-1}p_{n-1}\equiv$$
$$\equiv nx^{n-1}+(s_1-np_1)x^{n-2}+(s_2-s_1p_1+np_2)x^{n-3}+\ldots+$$
$$+s_{n-1}-s_{n-2}p_1+s_{n-3}p_2-\ldots+n(-1)^{n-1}p_{n-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (например, при x^{n-k-1}), получим $(-1)^k p_k(n-k)=s_k-s_{k-1}p_1+s_{k-2}p_2-\ldots+(-1)^k np_k$, или

$$s_k-s_{k-1}p_1+s_{k-2}p_2-\ldots+k(-1)^k p_k=0,\quad k=1,2,3,\ldots,n-1 \qquad (4)$$

Соотношение (4) есть первая формула Ньютона. По ней находим ($k=2$): $s_2-s_1p_1+2p_2=0$, откуда $s_2=p_1^2-2p_2$, т. е. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n)^2$. Далее, при $k=3$ находим $s_3-s_2p_1+s_1p_2-3p_3=0$, $s_3=p_1(p_1^2-2p_2)-p_1p_2+3p_3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3$. 11. $p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2+4p_1p_3-4p_4$. См. указание к предыдущей задаче (воспользоваться формулой Ньютона). 12. См. указание к предыдущей задаче (воспользоваться формулой Ньютона). Ответ: $p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2+5p_1^2p_3-5p_2p_3-5p_1p_4+5p_5$.

§ 4. Делимость многочленов

1. $-(bc+ca+ab)$. 2. 1. 3. $x^{n-k}+x^{n-2k}a^k+\ldots+a^{n-k}$. 4. $x^{n-k}-x^{n-2k}a^k+\ldots+(-1)^{\frac{n}{k}+1}a^{n-k}$. 5. $x^{n-k}-x^{n-2k}a^k+\ldots+(-1)^{\frac{n}{k}}a^{n-k}$. 6. $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1=[(x+1)^2]^n-(x^2)^n-(2x+1)=[(x+1)^2-x^2][(x+1)^{2n-2}+(x+1)^{2n-4}x^2+\ldots+(x+1)^2x^{2n-4}+x^{2n-2}]-(2x+1)=(2x+1)[(x+1)^{2n-2}+(x+1)^{2n-4}x^2+\ldots+(x+1)^2x^{2n-4}+x^{2n-2}-1]$; после деления на $2x+1$ получим $(x+1)^{2n-2}+(x+1)^{2n-4}x^2+\ldots+(x+1)^2x^{2n-4}+x^{2n-2}-1$. Сумма $(x+1)^{2n-4}x^2+\ldots+(x+1)^2x^{2n-4}$ делится на $x(x+1)$ и в частном получается $(x+1)^{2n-5}x+\ldots+(x+1)x^{2n-5}$. Остается разделить $(x+1)^{2n-2}+x^{2n-2}-1$ на $x(x+1)$. Имеем:

$$(x+1)^{2n-2}+x^{2n-2}-1=(x+1)^{2n-2}+(x^2-1)(x^{2n-4}+x^{2n-6}+\ldots+x^2+1)=$$
$$=(x+1)[(x+1)^{2n-3}+(x-1)(x^{2n-4}+x^{2n-6}+\ldots+x^2+1)]=$$
$$=(x+1)\left[x^{2n-3}+C_{2n-3}^1x^{2n-4}+\ldots+C_{2n-3}^1x+1+\right.$$
$$\left.+(x-1)(x^{2n-4}+x^{2n-6}+\ldots+x^2)+x-1\right]=$$
$$=x(x+1)\left[x^{2n-4}+C_{2n-3}^1x^{2n-5}+\ldots+C_{2n-3}^1+\right.$$
$$\left.+(x-1)(x^{2n-5}+x^{2n-7}+\ldots+x)+1\right].$$

Ответ: $(x+1)^{2n-5}x+\ldots+(x+1)x^{2n-5}+x^{2n-4}+C_{2n-3}^1x^{2n-5}+\ldots+C_{2n-3}^1+(x-1)(x^{2n-5}+x^{2n-7}+\ldots+x)+1$. 7. $nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\ldots+2x+1$. 8. $n^2x^{n-1}+(n-1)^2x^{n-2}+(n-2)^2x^{n-3}+\ldots+9x^2+4x+1$. 9. $yz(y^{n-1}+y^{n-2}z+y^{n-3}z^2+\ldots+yz^{n-2}+z^{n-1})+zx(z^{n-1}+z^{n-2}x+z^{n-3}x^2+\ldots+zx^{n-2}+x^{n-1})+xy(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$. 10. $-\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$ — сумма распространена на все неотрицательные целые значения α, β, γ, в сумме дающие $n-2$. 11. а) $x+y+z$; б) $(y+z)(z+x)(x+y)$. 12. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(2n+1)x^{2n}-2nx^{2n+1}+\ldots+x^{4n}$, $(-1)^m(2n-m+1)x^{2n-m}$, $(-1)^m(2n-m+1)x^{2n+m}$. 19. Указание. Положить $x=1+z$ и расположить выражение $(1+z)^{2n}-n(1+z)^{n+1}+n(1+z)^{n-1}-1$ по возрастающим степеням z. 21. Указание. Положить $x=1+z$, расположить $f(1+z)$ по возрастающим степеням z и приравнять нулю свободный член и коэффициенты при $z, z^2, \ldots, z^k$. 22. Пусть $x=\alpha$ — кратный корень данного многочлена. Полагая $x=\alpha+z$, будем иметь $f(x)=f(\alpha+z)=1+\frac{\alpha+z}{1!}+\frac{(\alpha+z)^2}{2!}+\frac{(\alpha+z)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\alpha+z)^n}{n!}=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}+\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\right)z+\ldots$ Так как α — кратный корень, то

$$1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}=0,$$

$$1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}=0,$$

откуда $\frac{a^n}{n!}=0$, т. е. $a=0$; но тогда из предыдущих соотношений следует $1=0$.

24. Если n не кратно 3. **25.** Если n при делении на 6 дает в остатке 1 или 5. **26.** Если n при делении на 6 дает в остатке 2 или 4. **27.** Если n при делении на 6 дает в остатке 1. **28.** Если n при делении на 6 дает в остатке 4.

§ 5. Разложение на множители

1. $(x+2)(x-1)\left(x+\frac{1+i\sqrt{33}}{2}\right)\left(x+\frac{1-i\sqrt{33}}{2}\right)$. **2.** $(x+2)(x-1)\left(x+\frac{1+i\sqrt{19}}{3}\right)\left(x+\frac{1-i\sqrt{19}}{3}\right)$. **3.** $(x+2)(x+4)\left(x+\frac{5-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x+\frac{5+i\sqrt{7}}{2}\right)$. **4.** $(x+2)^2(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})$. **5.** $9(x+1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$. **6.** $x(x+5)\left(x+\frac{5+i\sqrt{15}}{2}\right)\left(x+\frac{5-i\sqrt{15}}{2}\right)$. **7.** $(x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6})$. **8.** Указание: $4(x^2+60+17x)(x^2+60+16x)-3x^2=4(x^2+60)^2+132x(x^2+60)+1085x^2$.

Ответ:

$2(x+8)(2x+15)\left(x+\frac{35+\sqrt{265}}{4}\right)\left(x+\frac{35-\sqrt{265}}{4}\right)$. **9.** $(x-1)(x+3)(x+7)$. **10.** $(x+2)(x-3)(x-5)$. **11.** $(2x-3)^3$. **12.** $(x-1)(x+1)(x-3)(x+5)$. **13.** $(x-1)^3(2x+5)$. **14.** $(x-5)^4$. **15.** $(x+1)(x+3)(x+5)$. **16.** $(x-3)^2(x+5)$. **17.** $(3x+2)^2(x-3)$. **18.** $(x-1)(x+2)(x+3)(2x-1)$. **19.** $(x+2)^2(x-3)^2$.

20. Ответ: при условии

$$\Delta=ACF+2BDE-CD^2-AE^2-FB^2=0. \tag{1}$$

Решение: доказательство необходимости: пусть

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F\equiv(px+qy+r)(ax+by+c);$$

тогда *

$$A=ap,\quad B=\frac{1}{2}(aq+bp),\quad C=qb,\quad D=\frac{1}{2}(ar+cp),\quad E=\frac{1}{2}(aq+rb),\quad F=rc.$$

Подставляя в (1) эти значения для A, B, C, D, E и F и раскрывая скобки, получим, что левая часть соотношения (1) обращается в нуль.

Доказательство достаточности: пусть соотношение (1) выполнено. Так как в условии задачи сказано, что данное выражение *второй* степени относительно x и y, то, по крайней мере, одно из чисел A, B или C не равно 0. Пусть, например, $A\neq 0$. Тогда данное выражение можно преобразовать так:

$$Ax^2+2(By+D)x+Cy^2+2Ey+F=$$

$$=A\left[x+2\,\frac{By+D}{A}\,x+\frac{(By+D)^2}{A^2}\right]-\frac{(By+D)^2}{A}+$$

$$+Cy^2+2Ey+F=A\left(x+\frac{By+D}{A}\right)^2+\frac{(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2}{A}; \tag{2}$$

заметим, что

$$(AC-B^2)(AF-D^2)-(AE-BD)^2=A\cdot\Delta=0; \tag{3}$$

значит, если $\delta=AC-B^2\neq 0$, то числитель второго слагаемого правой части равенства (2) принимает вид $(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+\frac{(AE-BD)^2}{AC-B^2}=$ $=\delta=[(AC-B^2)y+(AE-BD)]^2$; следовательно, данное выражение принимает вид

$$A\left(x+\frac{By+D}{A}\right)^2-\frac{1}{-A(AC-B^2)}[(AC-B^2)y+(AE-BD)]^2=u\cdot v,$$

где

$$u=\sqrt{A}\left(x+\frac{By+D}{A}\right)+\sqrt{\frac{-1}{A(AC-B^2)}}\,[(AC-B^2)y+(AE-BD)],$$

$$v=\sqrt{A}\left(x+\frac{By+D}{A}\right)-\sqrt{\frac{-1}{A(AC-B^2)}}\,[(AC-B^2)y+(AE-BD)];$$

* Строго говоря, надо доказать еще теорему: если равны тождественно две целые рациональные функции от двух аргументов, то равны их соответствующие коэффициенты.

v и u — линейные относительно x и y множители (быть может, и с комплексными коэффициентами). Если же $AC - B^2 = 0$, то из (3) следует, что $AE - BD = 0$, и данное выражение [см. (2)] принимает вид

$$A\left(x + \frac{By + D}{A}\right)^2 - \frac{AF - D^2}{-A} =$$

$$= \left[\sqrt{A}\left(x + \frac{By + D}{A}\right) + \sqrt{\frac{AF - D^2}{-A}}\right]\left[\sqrt{A}\left(x + \frac{By + D}{A}\right) - \sqrt{\frac{AF - D^2}{-A}}\right].$$

Если $A = 0$, но $C \neq 0$, то при выполнении соотношения (1) приходим к аналогичному результату (надо рассматривать данное выражение как квадратный трехчлен относительно y). Если, наконец, $A = C = 0$, то данное выражение будет $2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$, а условие (1) принимает вид $2BDE - FB^2 = 0$. Здесь $B \neq 0$ (ибо при $B = 0$ мы не имели бы выражения второй степени относительно x и y); значит, $2DE = FB$, $F = \frac{2DE}{B}$ и, следовательно, $2Bxy + 2Dx + 2Ey + \frac{2DE}{B} = 2Bx\left(y + \frac{D}{B}\right) + 2E\left(y + \frac{D}{B}\right) = (2Bx + 2E)\left(y + \frac{D}{B}\right)$ — произведение двух линейных множителей. **21.** $ACF + 2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 = 0$. **22.** $(xy + 2x - y + 1)(xy - y + 1)$. Дальнейшее разложение на множители первой степени относительно x и y невозможно, ибо для первого множителя (см. задачу 20) $\Delta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$, для второго $\Delta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$. **23.** $[1 - a - b(1 + \sqrt{2})]^2 [1 - a - b(1 - \sqrt{2})]^2$. **24.** $3(b + c)(c + a)(a + b)$. **25.** $(a + b + c)(a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c)(a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c)$, где $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

26. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$. **27.** $(y - z)(z - x)(x - y)$. **28.** $(x + y + z)(yz + zx + xy)$. **29.** $(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$. **30.** $(a^2 + b^2 + c^2)(bc + ca + ab)$. **31.** $(b + c)(c + a)(a + b)(a + b + c)$. **32.** $-(y + z)(z + x)(x + y)(y - z)(z - x)(x - y)$. **33.** $(y - z)^3 + (z - x)^3 + (x - y)^3 = (y - z)^3 + (z - x)^3 + (x - y)^3 - 3(y - z)(z - x)(x - y) + 3(y - z)(z - x)(x - y) = 3(y - z)(z - x)(x - y)$, ибо $y - z + z - x + x - y = 0$ (см. задачу 25 этого параграфа). **34.** $-4(b - c)(c - a)(a - b)$. **35.** $-(b - c)(c - a)(a - b)$. **36.** $-3(b - c)(c - a)(a - b)$. **37.** $4abc$. **38.** $4abc$. **39.** $(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)$. **40.** $(y - z)(z - x)(x - y)(x + y + z)$. **41.** $-2(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)$. **42.** $12xyz(x + y + z)$. **43.** $24abc$. **44.** $5(y - z)(z - x)(x - y)(x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z)$, где $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. **45.** $5(y + z)(z + x)(x + y)(x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy)$. **46.** Указание. Положим $b + c - a = x$, $c + a - b = y$, $a + b - c = z$; тогда $a + b + c = x + y + z$ и далее см. предыдущий пример; учесть также, что $x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = \frac{1}{2}[(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2]$. Ответ: $80abc(a^2 + b^2 + c^2)$. Другой метод. Положим: $b + c = u$, $b - c = v$; тогда данное выражение примет вид $(a + u)^5 + (a - u)^5 + (v - a)^5 - (v + a)^5 = 10a(u^4 - v^4) + 20a^3(u^2 - v^2)$ и далее $u^2 - v^2 = 4bc$, $u^2 + v^2 = 2(b^2 + c^2)$ и т. д. Если решать этот пример указанным методом, то предыдущий пример указанной заменой приводится к этому. **47.** $-(b - c)(c - a)(a - b)(3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 5bc + 5ca + 5ab)$. **48.** $-(b - c)(c - a)(a - b)(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)$. **49.** $-(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)^2$. **50.** $-(y - z)(z - x)(x - y)(x + y + z)$. **51.** $-(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)^2$. **52.** $(b - c)(c - a)(a - b)(a - d)(b - d)(c - d)$. **53.** $-16(b - c)(c - a)(a - b)(a - d)(b - d)(c - d)$. **54.** $(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - bc - ca - ab)$. **55.** Будем обозначать произведение $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ так: $\prod_{k=1}^{n} a_k$. Тогда требуемые разложения можно записать в виде

$$\prod_{k=0}^{2n-1}\left[x - \left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= (x - 1)(x + 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[x - \left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\right]\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left[x - \left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\right];$$

если нужно произвести разложение на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами (причем квадратные множители имеют мнимые

корни), то следует заметить, что $(x-x_k)(x-x_{2n-k})=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1$. Ответ:

а) $x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$; б) $x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{2n-1}\Big[x-$

$-\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)\Big]=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1\right)$; в) $x^{2n+1}-1=$

$=(x-1)\prod_{k=1}^{2n}\left[x-\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right]=(x-1)\prod_{k=1}^{n}\Big(x^2-$

$-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\Big)$; г) $x^{2n+1}+1=\prod_{k=0}^{2n}\left[x-\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}\right)\right]=$

$=(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left[x-\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}\right)\right]\prod_{k=n+1}^{2n}\left[x-\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}+\right.\right.$

$\left.\left.+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}\right)\right]=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$. **56.** $\prod_{k=0}^{4}\Big[x-$

$-\left(\cos\frac{2\pi(1+3k)}{15}+i\sin\frac{2\pi(1+3k)}{15}\right)\Big]\prod_{k=0}^{4}\left[x-\left(\cos\frac{2\pi(2+3k)}{15}+i\sin\frac{2\pi(2+3k)}{15}\right)\right]$.

§ 6. Разные задачи на многочлены

1. $(b+c)(a-d)(a+d+b-c)(a+d-b+c)$. **4.** $\frac{1}{5}$. **5.** Указание. $f(x)=f(-x)$. Целая рациональная функция от x, обладающая этим свойством, не содержит x в нечетных степенях. **6.** Положим $m-p=q(\geqslant 0)$. Тогда данное выражение можно переписать так:

$$\frac{x^{1+q}-1}{x-1}\cdot\frac{x^{2+q}-1}{x^2-1}\cdots\frac{x^{p+q}-1}{x^p-1}.$$

Очевидно, $x=1$ есть корень кратности p как целой рациональной функции $f(x)=(x^{1+q}-1)(x^{2+q}-1)\ldots(x^{p+q}-1)$, так и целой рациональной функции $\varphi(x)=(x-1)(x^2-1)\ldots(x^p-1)$. Рассматривая любой корень $\sqrt[s]{1}$ $(s\leqslant p)$ и группы чисел $1\ 2\ 3\ \ldots\ s;\ s+1\ \ s+2\ \ldots\ 2s;\ \ldots\ (p);\ 1+q\ \ 2+q\ \ldots\ s+q;\ s+1+q\ \ s+2+q\ \ldots\ 2s+q;\ \ldots\ (p+q)$, установим, что в каждой из групп ряда чисел $(p+q)$ найдется число, делящееся на s, а потому кратность корня $\sqrt[s]{1}$ для функции $f(x)$ не ниже кратности того же корня функции $\varphi(x)$ [в последней группе (p) чисел число чисел может быть меньше s, и тогда возможно, в зависимости от значения q, что в последней группе чисел ряда $(p+q)$ найдется число, делящееся на s; тогда кратность рассматриваемого корня $\sqrt[s]{1}$ для функции $f(x)$ будет выше, чем кратность того же корня для функции $\varphi(x)$]. **7.** Указание. Если $f(x)$ — целая рациональная функция $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, то разность $\Delta f=f(x+1)-f(x)$ есть также целая рациональная функция степени $n-1$, причем коэффициент при x^{n-1} равен n. Далее $\Delta^2 f=f(x+2)-f(x+1)-[f(x+1)-f(x)]=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$ — также целая рациональная функция степени $n-2$, и коэффициент при x^{n-2} равен $n(n-1)$ и т. д., значит, $\Delta^n f=f(x+n)-C_n^1 f(x+n-1)+C_n^2 f(x+n-2)-\ldots+(-1)^n C_n^n f(x)=n!$ Для доказательства предложенного в задаче соотношения а) достаточно положить в этом тождестве $f(x)=(x-n)^n$. Для доказательства же соотношения б) достаточно заметить, что для целой рациональной функции $f(x)$ степени n имеем $\Delta^{n+1}f=0$ (надо взять $f(x)=(x-n)^p$ и записать, что $\Delta^n f\equiv 0$). **8.** $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{23}{12}$. **9.** Указание. $(3xy+2y)(5xy+2x)$. Затем положить $u+v=3xy+2y$, $u-v=5xy+2x$. Ответ: $(4xy+x+y)^2-(-xy+y-x)^2$. **10.** $f(1)=0$. **11.** Воспользоваться свойствами сочетаний. **12.** Применить теорему Безу. **13.** Необходимое условие: $bc=f^2$,

$ca = g^2$, $ab = h^2$, $abc + 2fgh - bg^2 - af^2 - ch^2 = 0$. Доказательство достаточности: $f = \sqrt{b}\sqrt{c}\,\varepsilon_1$, $g = \sqrt{c}\sqrt{a}\,\varepsilon_2$, $h = \sqrt{a}\sqrt{b}\,\varepsilon_3$, где $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1$. Подставляя это в условие $abc + 2fgh - bg^2 - af^2 - ch^2 = 0$, получим $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ (если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$), тогда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ или среди них есть два отрицательных. В обоих случаях данное выражение есть полный квадрат линейной однородной функции относительно x, y, z. Пусть теперь, например, $a = 0$, тогда $g = h = 0$, и данное выражение принимает вид $by^2 + cz^2 + 2fyz = by^2 + cz^2 \pm 2\sqrt{b}\sqrt{c}\,yz = (y\sqrt{b} \pm z\sqrt{c})^2$. Аналогичный результат получим при $b = 0$ и при $c = 0$. 14. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, находим $f = \varepsilon_1\sqrt{b-\lambda}\sqrt{c-\lambda}$, $g = \varepsilon_2\sqrt{c-\lambda}\sqrt{a-\lambda}$, $h = \varepsilon_3\sqrt{a-\lambda}\sqrt{b-\lambda}$, где $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1$; считая $a - \lambda \neq 0$, $b - \lambda \neq 0$, $c - \lambda \neq 0$, находим, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$; значит, $fg = \varepsilon_1\varepsilon_2(c-\lambda)\sqrt{a-\lambda}\sqrt{b-\lambda} = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_3}h(c-\lambda) = h(c-\lambda)$ и т. д. Если же $a - \lambda = 0$, то $h = g = 0$ и данное выражение принимает вид $(b-\lambda)y^2 + 2fyz + (c-\lambda)z^2$; предлагаемые соотношения также выполнены. 15. $1 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2$; $c_2 + c_1c_3 + c_2c_4 + \ldots c_{n-2}c_n$.

Глава II. Алгебраические дроби

§ 1. Тождественные преобразования алгебраических дробей

1. $x + 1$. 2. 1. 3. $\dfrac{1}{x^3}$. 4. x. 5. 1. 6. $\dfrac{b-a}{1+ab}$. 7. $x^3 + y^3$. 8. $\dfrac{1}{x^2y^2}$. 9. 0. 10. 0. 11. 0. 12. 1. 13. $a + b + c - x - y - z$. 14. x^2. 15. $a + b + c$. 16. $a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab$. 17. $a + b + c$. 18. x^2. 19. $(a + b + c)^2$. 20. 1. 21. $\dfrac{1}{xy}$. 22. $\dfrac{a+b+c}{2}$. 23. $\dfrac{1}{a+b+c}$. 24. a. 25. $-a + b + c$. 26. $\dfrac{m(m-b)(m-c)}{a(a-b)(a-c)}$. 27. $\dfrac{a-b}{(c-a+b)(c+a-b)}$. 28. $\dfrac{7}{5}(x^2 + xy + y^2)$. 29. $\dfrac{yz+zx+xy}{x+y+z}$. 30. $(b+c)(c+a)(a+b)$. 31. $-\dfrac{1}{2}(y-z)(z-x)(x-y)$. 32. $\dfrac{1}{1-x^2}$. 33. $\dfrac{x^3 - x^4 + 1}{x^3 + x^4 + 1}$. 34. $\dfrac{5}{1+x^2}$. 35. $3(x^2 + y^2 + z^2)$. 36. $2a^2$. 37. 1. 38. $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$. 39. $x^n + 5$. 40. $\dfrac{(x^2+1)(2x+1)}{(x^3-1)(2x-1)}$.

41. $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$, где сумма распространена на всевозможные неотрицательные целые значения α, β и γ, в сумме дающие $n - 2$. 42. $\dfrac{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{a_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}$.

43. $\dfrac{2^{n+1}x^{2^{n+1}-1} + 2^n a^{2^n} x^{2^n-1}}{x^{2^{n+1}} + a^{2^n}x^{2^n} + a^{2^{n+1}}} - \dfrac{2x-a}{x^2+ax+a^2}$. 44. $\dfrac{1 - x^{2^{n+1}}}{(1-x^2)x^{2^n-1}}$.

45. $\dfrac{x^{2^{n+1}} + a^{2^n}x^{2^n} + a^{2^n}}{x^2 + ax + a^2}$.

§ 2. Условные тождества

1. 9. 9. Верно. 12. ab. 13. $a + b$. 18. $a_1b_2 - a_2b_1$. 19. $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$.

Глава III. Радикалы и иррациональные выражения

§ 1. Тождественные преобразования иррациональных выражений

15. $\dfrac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. 16. $\dfrac{-3 + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{23}$. 17. $1 + 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt[4]{8}$. 18. $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. 19. $\dfrac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})}{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab}$.

20. $\dfrac{P}{Q}$, где

$$P = A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}) \times$$
$$\times [(a + b - c - d)^2 + 4ab - 4cd - 4(a + b - c - d)\sqrt{ab}],$$
$$Q = [(a + b - c - d)^2 + 4ab - 4cd]^2 - 16(a + b - c - d)^2 ab.$$

21. $\frac{P\cdot Q}{R}$, где,

$$P=A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}-\sqrt[3]{ab}\right),$$
$$Q=(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$
$$R=(a+b+c)^3-27abc.$$

22.
$$\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}=\begin{cases}-2a, & \text{если } a\leqslant -3;\\ 6, & \text{если } -3\leqslant a\leqslant 3;\\ 2a, & \text{если } a\geqslant 3.\end{cases}$$

23. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$. 24. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$. 25. $\frac{a}{b}$, если $a>b$; $\frac{b}{a}$, если $a<b$; при $a=b$ данное выражение не определено. 26. 2, если $a>0$; -2, если $a<0$. 27. $2[ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}]$. 28. $\frac{x+\sqrt{4x^2+3}}{3\sqrt{x^2+1}}$. 29. $\frac{n+1}{n-1}\sqrt{\frac{n-2}{n+2}}$.

30. $\frac{1-a+\sqrt{1+a^2}}{1-b+\sqrt{1+b^2}}$. 31. 0. 32. $a+b$. 33. $a-b$, если $a\geqslant b$; $-\frac{b}{a}(a-b)$, если $a\leqslant b$. 34. $\frac{a}{b}$. 35. b, если $-1\leqslant b\leqslant 1$; $\frac{1}{b}$, если $|b|\geqslant 1$. 36. 0. Указание: $\left(\frac{1}{x^m}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2\left(\frac{1}{x^m}+x^{\frac{1}{n}}\right)=x^{\frac{2}{m}}\left[\left(1+x^{\frac{m-n}{mn}}\right)^2-4a^2x^{\frac{m-n}{mn}}\right]$. 37. 0. 38. $\frac{m^2}{n^2}$.

39. $(ab)^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. 40. $\frac{1}{n}$. 41. а) $\frac{2}{2-a}$; б) $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$. 42. $\frac{\sqrt{mn}}{m-n}$.

43. $\frac{b}{a}$. 44. $n(n-1)$. 45. $\frac{z^2}{a-b}$. 46. 1. 47. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{n^2}\left(n^2-\sqrt{n^4-1}\right)$.

48. $\sqrt{k-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. 49. 1. 50. $\sqrt{\frac{a}{b}}$. 51. Так как $|x|\geqslant 2$, то данное выражение есть действительное число (для всех радикалов берем действительные значения). Обозначая данное выражение через α и воспользовавшись формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, получим $\alpha^3=x^3-3x+3\alpha$ или $(x-\alpha)(\alpha^2+\alpha x+x^2-3)=0$, или $(x-\alpha)\left[\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(x^2-4)\right]=0$. По условию $|x|\geqslant 2$. Если $|x|>2$, то $\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(x^2-4)>0$; следовательно, $x-\alpha=0$, откуда $\alpha=x$. Итак, если $|x|>2$, то данное выражение равно x; если $x=2$, то данное выражение равно 2, а если $x=-2$, то оно равно -2. Итак, $\alpha=x$ при всех x таких, что $|x|\geqslant 2$. 52. $|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2|$.

53. $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, где

$$P=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2,$$
$$Q=y_1z_2+y_2z_3+y_3z_1-y_2z_1-y_1z_3-y_3z_2,$$
$$R=z_1x_2+z_2x_3+z_3x_1-z_1x_3-z_2x_1-z_3x_2.$$

При $z_1=z_2=z_3=0$ получаем $\sqrt{P^2}=|P|$.

§ 2. Условные тождества. Преобразование равенств, содержащих иррациональные выражения

2. $(a+3bc+c^3)^2=b(b+3c^2)^2$. 3. $a=\left(\frac{a-b}{1-b}\right)^3$ 4. Решение: $p\sqrt[3]{a^2}=-q\sqrt[3]{a}-r$, $p^2a\sqrt[3]{a}=q^2\sqrt[3]{a^2}+2qr\sqrt[3]{a}+r^2$; полагая $\sqrt[3]{a}=x$, получим: $px^2+qx+r=0$, $q^2x^2+(2qr-p^2a)x+r^2=0$. Умножая первое соотношение на $-q^2$, второе на p и складывая, получим $(2qrp-p^3a-q^3)x=rq^2-pr^2$; возводя обе части этого равенства в куб, будем иметь $(2qrp-p^3a-q^3)^3a=r^3(q^2-pr)^3$. 5. Решение:

$$-\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e},$$
$$a=b+2\sqrt{b}(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})+(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})^2,$$
$$4b(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})^2=(a-b)^2-2(a-b)(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})^2+(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})^4,$$
$$(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})^4-2(a+b)(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e})^2+(a-b)^2=0,$$

$$c^2+4c\sqrt{c}(\sqrt{d}+\sqrt{e})+6c(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2+4\sqrt{c}(\sqrt{d}+\sqrt{e})^3+(\sqrt{d}+\sqrt{e})^4-$$
$$-2(a+b)c-4(a+b)\sqrt{c}(\sqrt{d}+\sqrt{e})-2(a+b)(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2+(a-b)^2=0,$$
$$4\sqrt{c}(\sqrt{d}+\sqrt{e})[c+(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2-a-b]=2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+$$
$$+(2a+2b-6c)(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2-(\sqrt{d}+\sqrt{e})^4,$$
$$16c(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2[c-a-b+(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2]^2=$$
$$=[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+(2a+2b-6c)(\sqrt{d}+\sqrt{e})^2-(\sqrt{d}+\sqrt{e})^4]^2,$$
$$16c(d+e+2\sqrt{de})(c-a-b+d+e+2\sqrt{de})^2=$$
$$=[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+(2a+2b-6c)(d+e+2\sqrt{de})-$$
$$-d^2-4d\sqrt{de}-6de-4e\sqrt{de}-e^2]^2,$$
$$[16c(d+e)+32c\sqrt{de}][(c-a-b+d+e)^2+4ed+$$
$$+4(c-a-b+d+e)\sqrt{ed}]=[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+$$
$$+(2a+2b-6c)(d+e)-d^2-6de-e^2+(4a+4b-12c-4d-4e)\sqrt{ed}]^2,$$
$$16c(d+e)[(c-a-b+d+e)^2+4ed]+128ced(c-a-b+d+e)+$$
$$+\{32c[(c-a-b+d+e)^2+4ed]+64c(d+e)(c-a-b+d+e)\}\sqrt{ed}=$$
$$=[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+(2a+2b-6c)(d+e)-$$
$$-d^2-6de-e^2]^2+16ed(a+b-3c-d-e)^2+$$
$$+8[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+(2a+2b-6c)(d+e)-$$
$$-d^2-6de-e^2](a+b-3c-d-e)\sqrt{ed},$$
$$\{16c(d+e)(c-a-b+d+e)^2+64ced(d+e)+$$
$$+128ced(c-a-b+d+e)-[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+$$
$$+(2a+2b-6c)(d+e)-d^2-6de-e^2]^2-16ed(a+b-3c-d-e)^2\}=$$
$$=\{8[2(a+b)c-(a-b)^2-c^2+(2a+2b-6c)(d+e)-$$
$$-d^2-6de-e^2](a+b-3c-d-e)-[32c[(c-a-b+d+e)^2+$$
$$+4cd)+64c(d+e)(c-a-b+d+e)]\}^2ed.$$

6. $(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x^2y^2=0$. **7.** $[xy(x^2+y^2)^2+9a^2x^2y^2-a^6]^2=36a^2x^3y^3(x^2+y^2)^2$. **8.** $x^2y^2(x^2+y^2+3a^2)=a^6$. **9.** $[(x^2+y^2)^6-ax+by]^3+27abxy(x^2+y^2)^6=0$.

Глава IV. Общие свойства уравнений и неравенств

§ 1. Эквивалентность уравнений

1. Нет. а) $f(x)=x^2-2x-3$, $\varphi(x)=x+1$; уравнения $f(x)=0$ и $f(x)\varphi(x)=0$ имеют одни и те же корни, т. е. эквивалентны; б) $f(x)=x^2-2x-3$, $\varphi(x)=x-5$; все корни уравнения $f(x)=0$ (т. е. $x=-1$ и $x=3$) являются корнями уравнения $f(x)\varphi(x)=0$, но не все корни уравнения $f(x)\varphi(x)=0$ (именно корень $x=5$) являются корнями $f(x)=0$; в) $f(x)=x^2-2x-3$, $\varphi(x)=\arcsin x$; все корни уравнения $f(x)\varphi(x)=0$ являются корнями уравнения $f(x)=0$, но не все корни уравнения $f(x)=0$ являются корнями уравнения $f(x)\varphi(x)=0$ (уравнение $f(x)\varphi(x)=0$ имеет лишь один корень $x=-1$; значение $x=3$ не является корнем этого уравнения, ибо выражение $\arcsin 3$ не имеет смысла). **2.** Да. Пример: $x^2-2x-3=0$ и $(x^2-2x-3)\arcsin(1-x)=0$ не имеют общих корней (первое уравнение имеет корни $x=-1$ и $x=3$, второе уравнение имеет корень $x=1$). **3.** Да. Пример: $x-1=0$ и $x-1+\arcsin(1+x)=\arcsin(1+x)$ неэквивалентные уравнения (первое уравнение имеет корень $x=1$, второе не имеет). **4.** Первое уравнение есть следствие второго, но второе (вообще говоря) не есть следствие первого. **5.** Второе уравнение есть следствие первого. Уравнения будут эквивалентны, если корни второго уравнения не являются корнями уравнений $f_2(x)=0$ и $f_4(x)=0$. **6.** а) При условии, что ни одни из корней первого уравнения не является корнем уравнения $f_2(x)+f_4(x)=0$; б) при условии, что ни один из корней второго уравнения не является корнем первого уравнения; в) при выполнении условий а) и б). **8.** Да. **9.** Да. **10.** Да. **11.** Нет. **12.** Нет. **13.** а) Эквивалентны; б) уравнения эквивалентны, если среди корней уравнения $f(x)=\varphi(x)$ нет таких, для которых $f(x)<0$ ($u\varphi(x)<0$); в) эквивалентны; г) эквивалентны; д) эквивалентны, если $a\neq 0$; если же $a=0$, то уравнения будут эквивалентны при условии, что уравнение $\varphi(x)=0$ не имеет корней; е) эквивалентны; ж) эквивалентны; з) эквивалентны; и) эквивалентны, если

корни уравнения $f(x)=0$ входят в область определения функции $\varphi(x)$; к) эквивалентны; л) эквивалентны; м) не эквивалентны; н) эквивалентны; о) эквивалентны; п) эквивалентны: р) эквивалентны; с) эквивалентны, если уравнение $f(x)\varphi(x)=-1$ не имеет корней; т) эквивалентны; у) эквивалентны, если система уравнений $f(x)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\varphi(x)=(2s+1)\frac{\pi}{2}$, где k и s — целые числа, — несовместна; ф) не эквивалентны; х) эквивалентны, если уравнение $f(x)=s\pi+\operatorname{arc\,tg} k\pi$ (k и s — целые числа) имеет корни лишь при $k=s=0$; **14.** а) Первое уравнение — следствие второго; б) второе уравнение — следствие первого; в) второе уравнение — следствие первого; г) второе уравнение — следствие первого. **15.** При условии, что корни уравнения $\varphi(x)=0$ входят в область определения функции $f(x)$. **16.** а) Нет; б) нет, так как из второго уравнения следует первое. **17.** а) могут; б) могут; в) $x=1$ — корень уравнения $\arcsin x=2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$, но не корень уравнения $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$; далее, $x=\pi$ — корень уравнения $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}2x$, но не корень уравнения $x=2x$. **18.** Первое — следствие второго. Уравнения эквивалентны, если все корни уравнения $f(x)=\varphi(x)$ по абсолютной величине меньше или равны 1. **19.** Будут. **20.** Будут, если уравнение $f(x)=-\varphi(x)$ не имеет корней, при которых $f(x)\neq 0$ (и $-\varphi(x)\neq 0$). **21.** Будут, если уравнение $f^2(x)=\varphi^2(x)$ имеет только такие корни, при которых $f(x)=\varphi(x)=0$. **22.** Эквивалентны. **23.** Нет. **24.** При условии, что система уравнений $f_1=f_2=f_3$ имеет лишь такие решения, при которых $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$. **25.** Да. **26.** При условии $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Доказательство: любое решение системы $f=0$, $\varphi=0$ является и решением системы $a_1f+b_1\varphi=0$, $a_2f+b_2\varphi=0$. Обратное положение верно, если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. В самом деле: пусть x_0, y_0 — какое-нибудь решение последней системы, т. е. $a_1f(x_0,y_0)+b_1\varphi(x_0,y_0)=0$, $a_2f(x_0,y_0)+b_2\varphi(x_0,y_0)=0$. Умножая первое из равенств на b_2, второе — на $-b_1$ и складывая, получим $(a_1b_2-a_2b_1)f(x_0,y_0)=0$; аналогично находим $(a_1b_2-a_2b_1)\varphi(x_0,y_0)=0$. Отсюда и следует, что если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то $f(x_0,y_0)=0$, $\varphi(x_0,y_0)=0$, т. е. решение системы $a_1f+b_1\varphi=0$, $a_2f+b_2\varphi=0$ является вместе с тем и решением системы $f=0$, $\varphi=0$. **27.** При условии $\Delta=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3\neq 0$. И здесь без всякого дополнительного ограничения любое решение системы (1) является решением системы (2), при доказательстве же обратного положения придется воспользоваться условием $\Delta\neq 0$. Именно: пусть x_0, y_0, z_0 — какое-нибудь решение системы (2), т. е.

$$a_1f(x_0,y_0,z_0)+b_1\varphi(x_0,y_0,z_0)+c_1\psi(x_0,y_0,z_0)=0,$$
$$a_2f(x_0,y_0,z_0)+b_2\varphi(x_0,y_0,z_0)+c_2\psi(x_0,y_0,z_0)=0,$$
$$a_3f(x_0,y_0,z_0)+b_3\varphi(x_0,y_0,z_0)+c_3\psi(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Умножая первое уравнение на $b_2c_3-b_3c_2$, второе — на $b_3c_1-b_1c_3$, третье — на $b_1c_2-b_2c_1$ и складывая, получим $(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3)f(x_0,y_0,z_0)=0$, откуда, в случае, если выражение, заключенное в скобки, не равно нулю, находим $f(x_0,y_0,z_0)=0$. Аналогично в случае $\Delta\neq 0$ находим $\varphi(x_0,y_0,z_0)=0$, $\psi(x_0,y_0,z_0)=0$. **28.**

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,\ (x-c)^2+y^2+$$
$$+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2=4a^2,$$
$$\sqrt{(x^2+y^2+c^2+2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx)}=2a^2-(x^2+y^2+c^2),$$
$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2);\ \text{но } a^2-c^2=b^2,$$

значит $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, откуда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Мы доказали, что любое решение первого уравнения есть решение и второго уравнения. Докажем, что и обратно — любое решение второго уравнения есть и решение первого. Итак, пусть x, y — какое-нибудь решение уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, тогда $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$; значит,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$
$$=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2-2cx+c^2+b^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2cx+c^2+b^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}=\sqrt{\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{cx}{a}\right|.$$

По условию $a > c > 0$. Так как, кроме того, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то абсолютная величина x меньше или равна a, т. е. $|x| \leqslant a$ (мы ограничиваемся лишь действительными решениями). Отсюда и из неравенства $a > c > 0$ следует, что $a-\frac{cx}{a} > 0$; значит $\left|a-\frac{cx}{a}\right| = a-\frac{cx}{a}$, и мы окончательно находим $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a-\frac{cx}{a}$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a+\frac{cx}{a}$; значит $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$, и мы находим, что если выполнено равенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то будет выполнено и равенство $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$. Эквивалентность заданных уравнений доказана. **29.** Решение аналогично предыдущей задаче. Здесь при доказательстве того, что любое решение второго уравнения является решением первого, мы придем к равенствам $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left|\frac{cx}{a}-a\right|$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \left|\frac{cx}{a}+a\right|$. Из соотношения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ следует, что $|x| \geqslant a$. Рассмотрим два случая: 1) $x \geqslant a$ и 2) $x \leqslant -a$. В первом случае в силу неравенств $c > a > 0$ имеем $\frac{cx}{a}-a > 0$, $\frac{cx}{a}+a > 0$, так что приведенные выше радикалы соответственно равны $\frac{cx}{a}-a$ и $\frac{cx}{a}+a$, их разность равна $-2a$, абсолютная величина этой разности равна $2a$. Во втором случае ($x \leqslant -a$) в силу неравенств $c > a > 0$ имеем $\frac{cx}{a}-a < 0$, $\frac{cx}{a}+a < 0$, так что приведенные выше радикалы соответственно равны $a-\frac{cx}{a}$, $-a-\frac{cx}{a}$, а их разность равна $2a$. **31.** $x=1$, $y=0$ и $x=0$, $y=1$ — решения второго уравнения. По условию эти решения будут и решениями первого уравнения, значит $a+d=0$, $c+d=0$, откуда $d=-a$, $c=-d$. Теперь первое уравнение принимает вид $-dx^2+bxy-dy^2+d=0$. Рассмотрим решение $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ второго уравнения. По условию это и решение первого уравнения, т. е. $-d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+b\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}-d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+d=0$, откуда $b=0$. Первое уравнение принимает вид $-dx^2-dy^2+d=0$. Здесь $d \neq 0$, ибо в противном случае это уравнение было бы тождеством, в то время как второе уравнение не является тождеством. **33.** При $x=0$ уравнение $xy=1$ не имеет решений, значит при $x=0$ и первое уравнение не имеет решений. Но при $x=0$ первое уравнение принимает вид $cy^2+ey+f=0$, и оно не имеет решений тогда и только тогда, когда $c=e=0$, $f \neq 0$. Аналогично доказывается, что $a=d=0$. Первое уравнение, следовательно, имеет вид $bxy+f=0$. Но $x=y=1$ есть решение уравнения $xy=1$, значит и уравнения $bxy+f=0$; следовательно, $b+f=0$. При этом $b \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы также $f=0$ и первое уравнение было бы тождеством, в то время как второе уравнение не является тождеством *). Читателю предлагается решить задачу в случае, если эквивалентность задана над полем действительных чисел. **34.** Если $a=b=c=0$, то вопрос сводится к эквивалентности уравнений $dx+ey+f=0$ и $kx-y+l=0$, что будет иметь место тогда и только тогда, когда $d=-ek$, $f=-el$. Если, по крайней мере, одно из чисел a, b или c отлично от нуля, например $c \neq 0$, то будем рассуждать так: любое решение уравнения (2) является по условию и решением уравнения (1). Значит, уравнение (1) обратится в тождество (относительно x), если в лезую часть подставить $kx+l$ вместо y; отсюда следует, что квадратный трехчлен $cy^2+(bx+e)y+ax^2+dx+f$ относительно y должен делиться без остатка на $y-(kx+l)$. Выполняя это деление, получим в частном $cy+(b+ck)x+e+cl$, а в остатке $ax^2+dx+f+(kx+l)(b+ck)x+(kx+l)(e+cl)$. Так как этот остаток должен быть равен нулю при всех x, а он представляет собою квадратный трехчлен относительно x, то должны быть равны нулю все коэффициенты — при x^2, при x и свободный член остатка:

$$ck^2+bk+a=0,\quad bl+2ckl+ke+d=0,\quad cl^2+el+f=0. \qquad (A)$$

*) Изложенное решение сообщено автору научным редактором книги С. И. Новоселовым.

Теперь левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя: $y-(kx+l)$ и $cy+(b+ck)x+e+cl$. Так как любое решение уравнения (1) должно быть решением уравнения (2), то любое решение уравнения $cy+(b+ck)x+e+cl$ должно быть решением уравнения $y-kx-l=0$, что будет иметь место тогда и только тогда, когда $b+ck=-ck$, $e+cl=-cl$ или

$$b+2ck=0,\quad e+2cl=0. \tag{B}$$

Итак, при $c\neq 0$ уравнения (1) и (2) будут эквивалентны только тогда, когда выполнены условия (A) и (B). Пусть теперь $c=0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$(bx+e)y+ax^2+dx+f, \tag{D}$$

и оно должно быть эквивалентно уравнению

$$y-(kx+l)=0. \tag{C}$$

Если b и e одновременно равны нулю, то уравнения (D) и (C) неэквивалентны Если b и e одновременно не равны нулю, то при делении левой части уравнения (D) на левую часть уравнения (C) получим в частном $bx+e$, а в остатке $(kx+l)(bx+l)+ax^2+dx+f$. Этот остаток будет равен нулю тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} kb+a=0,\\ lb+ek+d=0,\\ le+f=0. \end{gathered} \tag{E}$$

При выполнении этих условий уравнение (D) примет вид $(bx+e)\cdot[y-(kx+l)=0$. Если $b\neq 0$, то это уравнение удовлетворяется при условии $x=-\frac{e}{b}$ и любом y, т. е. оно неэквивалентно уравнению (2). Если же $b=0$, $e\neq 0$, то уравнения (1) и (2) эквивалентны; при $b=0$ условия (E) принимают вид $a=0$, $ek+d=0$, $le+f=0$; значит, вопрос сводится к уже рассмотренному случаю ($a=b=c=0$). Итак, при $c=0$ уравнения (1) и (2) эквивалентны, если

$$\frac{d}{-k}=\frac{e}{1}=\frac{f}{-l}.$$

35. При доказательстве того, что из уравнения (1) следует одно из уравнений (2), нужно предварительно доказать, что из уравнения (1) следует, что все функции f_1, f_2, f_3 — одного знака, так что при условии выполнимости уравнения (1) f_1, f_2 и f_3 можно заменить на $|f_1|$, $|f_2|$ и $|f_3|$. **36.** Если $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$, то возводя в куб обе части этого равенства и учитывая, что $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$, получим $x+y+3\sqrt[3]{xyz}=z$, откуда $(z-x-y)^3=27xyz$. Обратно: если $(z-x-y)^3=27xyz$, то $z-x-y=3\sqrt[3]{xyz}$ (1). Соотношение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$ будет выполнено, если будет выполнено соотношение $x+y+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=z$ или $z-x-y=3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)$ (2). Но так как соотношение (1) выполнено, то соотношение (2) будет выполнено тогда и только тогда, когда $3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)$; предполагая, что $xy\neq 0$, получим $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$. Если же $xy=0$, то или $x=0$ или $y=0$. В этом случае (1) имеет вид (в случае, например, $y=0$) $z-x=0$, и оно, конечно, эквивалентно соотношению $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$ при $y=0$.

§ 2. Доказательство неравенств

1. У к а з а н и е. Данное неравенство можно переписать в виде $(2n-1)!!>\frac{n^n}{n!}$. Далее можно установить, что $(2n-1)!!>(2n-1)^{\frac{n}{2}}$, $\frac{n^n}{n!}<n^{\frac{n}{2}}$ (см. пример 3 этого параграфа).

7. Решение этого и ряда других примеров (см. ниже) опирается на следующее неравенство: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, где $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 0$, ..., $a_n\geqslant 0$ (среднее арифметическое из неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического из тех же чисел). Эта теорема может быть доказана самыми разнообразными

способами. Дадим ее доказательство методом полной индукции. При $n=2$, $\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geqslant 0$. Пусть $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$; тогда $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}n+a_{n+1}}{n+1}\geqslant \frac{n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+a_{n+1}}{n+1}$. Положим $a_1a_2\ldots a_n=x^{(n+1)n}$, $a_{n+1}=y^{n+1}$, тогда

$$\frac{n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}=$$
$$=\frac{nx^{n+1}+y^{n+1}}{n+1}-x^ny=\frac{nx^{n+1}+y^{n+1}-nx^ny-x^ny}{n+1}=$$
$$=\frac{nx^n(x-y)-y(x^n-y^n)}{n+1}=\frac{(x-y)(nx^n-yx^{n-1}-y^2x^{n-2}-\ldots-y^n)}{n+1}=$$
$$=\frac{(x-y)(x^n-yx^{n-1}+x^n-y^2x^{n-2}+\ldots+x^n-y^n)}{n+1}=$$
$$=\frac{(x-y)^2[x^{n-1}+x^{n-2}(x+y)+x^{n-3}(x^2+xy+y^2)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}y^2+\ldots+y^{n-1})]}{n+1}\geqslant 0,$$

значит, $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$. В самом деле, из предыдущего следует, что равенство $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}=\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}$ возможно тогда и только тогда, когда $a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n=a_{n+1}^n$; аналогично можно получить $a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_{n+1}=x_n^n$; отсюда $a_n=a_{n+1}$. Таким же образом доказываются равенства $a_1=a_2=\ldots=a_n$. Теперь соотношение задачи 7 доказывается из тождества $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}$. Применим теорему, что среднее арифметическое больше среднего геометрического (в случае наличия неравных чисел):

$$\frac{2^n}{n+1}>\sqrt[n+1]{n\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}},$$

или

$$2^{n(n+1)}>(n+1)^{n+1}n^n\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\ldots\left(\frac{2}{n-1}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

8. Применить неравенство $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ для чисел 1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2. 9. Применить неравенство $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ для чисел 1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3. 15. Указание: $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. 25. Полагая $a_n=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, находим $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=\frac{(3n+1)(2n+2)^2}{(3n+4)(2n+1)^2}=\frac{12n^3+28n^2+20n+4}{12n^3+28n^2+19n+4}>1$. Но при $n=1$ получаем в левой и правой части $\frac{1}{2}$; следовательно при $n\geqslant1$ и $a_{n+1}>1$.

26. См. задачу 25 данного параграфа. 27. Доказать, что $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$ при $n\geqslant3$; кроме того, следует заметить, что $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$; итак, $\sqrt[n]{n}$ принимает наибольшее значение при $n=3$, и оно равно $\sqrt[3]{3}$. 28. $\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}>6$. 29. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$

и последняя сумма при достаточно большом числе слагаемых может быть сделана больше любого наперед заданного положительного числа. **30.** а) $300! > 100^{300}$; б) $200! < 100^{200}$ (см. задачи 11 и 19 этого параграфа). **31.**

$$s = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n} =$$

$$= \frac{a_3 - a_2}{2} + \frac{a_4 - a_3}{2^2} + \frac{a_5 - a_4}{2^3} + \ldots + \frac{a_{n+1} - a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2^n} =$$

$$= -\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{2^n} - \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_{n+2}}{2^n} =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \ldots + \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{2^n} - \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_{n+2}}{2^n} - a_1 - a_2 =$$

$$= 2s - 2 + \frac{2a_{n+1} - a_n}{2^n} = 2s - 2 + \frac{2a_n + 2a_{n-1} - a_n}{2^n} = 2s - 2 + \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}};$$

отсюда $s = 2 - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{a_n}{2^n} < 2$. **34.** Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b = c$. **35.** Знак равенства имеет место только в следующих пяти случаях: $a = b = c = 0$, $a = b = c = 1$, $-a = -b = c = 1$, $a = -b = -c = 1$, $-a = b = c = 1$. **39.** Указание. Среднее геометрическое чисел a^2cd, b^2ad, c^2ab и d^2bc равно $abcd$. **40.** Указание. Рассмотреть средние геометрические чисел a, b, c и a^2, b^2, c^2. **41.** Указание. Среднее геометрическое слагаемых левой части равно 1. **43.** а) Знак равенства имеет место лишь при условии $a = b = c$; б) знак равенства имеет место только при $a = b$. **46.** Рассмотреть средние арифметические чисел a, b, c, и чисел $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. **51.** $c(a^2 + b^2) > 2abc$ и т. д. Первое неравенство следует из неравенства $a^3 + b^3 > ab(a + b)$ и неравенств, полученных из него круговой перестановкой букв. **52.** $\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 - 3 =$ $= (a + b + c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = \frac{1}{2}[(b + c) + (c + a) + (a + b)] \times$ $\times\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$; далее см. задачу 46 этого параграфа. **53.** $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} > abc$; далее см. задачу 46 этого параграфа. **55.** $(b + c)(c + a)(a + b) - 8abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2$. **56.** $3(b + c)(c + a)(a + b) < 3(a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b + 2abc) < 3\left[a^3 + b^3 + a^3 + c^3 + b^3 + c^3 + \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3)\right] = 8(a^3 + b^3 + c^3)$. **57.** Указание: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)(c + a)(a + b)$. **59.** Рассмотреть a чисел, равных $\frac{1}{a}$, b чисел, равных $\frac{1}{b}$ и c чисел, равных $\frac{1}{c}$. **61.** Заметить, что $2bc + 2ca + 2ab < \frac{2}{3}(a + b + c)^2$. **62.** Знак равенства имеет место при условии $ad = bc$. **63.** Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b = c$. **66.** Знак равенства имеет место только при $a = b = c$. **67.** Знак равенства имеет место при условии $\frac{b-c}{a} = \frac{c-a}{b} = \frac{a-b}{c}$. **70.** Знак равенства имеет место только при условии $a = b = c = 1$. **72.** Применить метод полной индукции: знак равенства имеет место только при $a = b$. **76.** Знак равенства имеет место только при $a = b$. **82.** Если предположить, что $a \leqslant b$, то приходим к противоречию. **85.** Вопрос сводится к тому, что среднее арифметическое из нескольких неотрицательных чисел не меньше среднего их геометрического. **88.** $-1 < a < 2$. **89.** Указание: $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geqslant 0$ и т. д. **90.** Перемножить выражения, стоящие в левой части, и заметить, что $\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_1} \geqslant 2$ и т. д. **92.** Если $a > 0$, то $(1 + a)^n = 1 + na + \ldots > 1 + an$; если $a = 0$, то $(1 + a)^n = 1 + an$; если, наконец, $-1 < a < 0$, то, полагая $a = -b$, получим $0 < b < 1$. Рассмотрим разность $(1 + a)^n - (1 + an) = (1 - b)^n - (1 - bn)$ и докажем, что при возрастании n она возрастает: $(1 - b)^{n+1} - [1 - b(n + 1)] -$

$-(1-b)^n+(1-bn)=(1-b)^{n+1}-(1-b)^n+b=-(1-b)^n b+b=b[1-(1-b)^n]>0$, так как $0<b<1$. Но при $n=0$ будем иметь $(1+a)^n-(1+an)=0$, значит при $n\geqslant 1$ эта разность будет положительна. 95. Сводится к задаче 94 этого параграфа. 105. Следует из тождества $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2+(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\ldots+(a_1-a_n)^2+\ldots+(a_2-a_n)^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2=n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$. 107. Выражение $(a_1-b_1x)^2+(a_2-b_2x)^2+\ldots+(a_n-b_nx)^2$, являющееся квадратным трехчленом относительно x, при всех x сохраняет знак, а именно: это выражение положительно при всех x и, быть может, при одном только значении x обращается в нуль. Значит, дискриминант этого трехчлена отрицателен или равен нулю. В условии задачи числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ предполагаются действительными *. 108. Умножить обе части неравенства Буняковского (см. предыдущий пример) на 2, затем заменить $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно на $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$ и прибавить к обеим частям полученного неравенства $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2$. 111. Рассмотреть m_1 чисел, равных $\frac{x_1}{m_1}$, m_2 чисел, равных $\frac{x_2}{m_2}$ и т. д. Наибольшее значение

$$m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ldots m_n^{m_n}\left(\frac{s}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

112. $n\sqrt[n]{P}$. 113. Так как $Ax+By+Cz+D=0$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)$. Неравенство $[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\times(A^2+B^2+C^2)\geqslant[A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)]^2$ есть неравенство Буняковского. Знак равенства имеет место, если $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ пропорциональны A, B, C, т. е. $x-x_0=\lambda A$, $y-y_0=\lambda B$, $z-z_0=\lambda C$, откуда $x=x_0+\lambda A$, $y=y_0+\lambda B$, $z=z_0+\lambda C$. Подставляя в $Ax+By+Cz+D=0$, находим λ:

$$\lambda=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2};$$

отсюда

$$x=x_0-A\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y=y_0-B\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z=z_0-C\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}.$$

114. $\lambda=\frac{P}{Q}$, $\mu=\frac{R}{Q}$, где

$$P=(m_1n_2-m_2n_1)[m_2(c_1-c_2)-n_2(b_1-b_2)]+(l_2n_1-l_1n_2)[n_2(a_1-a_2)-l_2(c_1-c_2)]+(l_1m_2-l_2m_1)[l_2(b_1-b_2)-m_2(a_1-a_2)],$$

$$Q=(m_1n_2-m_2n_1)^2+(l_2n_1-l_1n_2)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2,$$

$$R=(m_1n_2-m_2n_1)[m_1(c_1-c_2)-n_1(b_1-b_2)]+(l_2n_1-l_1n_2)[n_1(a_1-a_2)-l_1(c_1-c_2)]+(l_1m_2-l_2m_1)[l_1(b_1-b_2)-m_1(a_1-a_2)].$$

115. При $t=\frac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2+m^2+n^2}$.

§ 3. Эквивалентность неравенств и смешанных систем

5. Пусть $0<x'<1$, $0<y'<1$, $0<z'<1$. Тогда $0<x+y+z<1$, $x=x'-x'y'=x'(1-y')>0$, $y=x'y'(1-z')>0$, $z=x'y'z'>0$; обратно, если $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y+z<1$, то $0<x'<1$, $y'=\frac{y+z}{x+y+z}$, значит $0<y'<1$; $z'=\frac{z}{y+z}$, значит $0<z'<1$. 6. Каждая из предложенных систем неравенств эквивалентна одному неравенству $x^2+y^2+z^2<1$. 7. а) Да. б) Нет (вообще говоря). 8. Пусть выполнена система (1). Возможны два допущения $z<x$ и $z>x$; если $z<x$,

* Предложенное неравенство было получено русским ученым Буняковским; оно применяется в математике в различных вопросах.

то из (1) следует также, что $0 < z < x$, значит выполнена система (2); если же $z > x$, то из (1) также следует $z < x + y$, $x + y < 1$, т. е. $z < 1$ и далее; из $z < x + y$ следует, что $z - x < y$. Итак, в этом случае выполнены соотношения (3). Обратно: пусть выполнены соотношения (2). Тогда, так как $z < x$, а $y > 0$, то $z < x + y$; следовательно соотношения (1) выполнены. Пусть, наконец, выполнены соотношения (3). Тогда, очевидно, $z > 0$ и $z < x + y$. Далее: $y > z - x$, $z - x > 0$, т. е. $y > 0$, т. е. все неравенства (1) выполнены. Наконец, ясно, что системы (2) и (3) несовместны [в системе (2) $z < x$, в системе (3) $z > x$]. 9. Указание к б). Если $z \neq y^2$ и $z \neq 1$, то из (1) следует, что $0 < z < 1$ или $1 < z < 2$; в то же время из $z \neq y^2$ следует при этом: или $y > \sqrt{z}$, или $y < \sqrt{z}$. Таким образом, имеем 4 возможности: а) $0 < z < 1$, $y > \sqrt{z}$; б) $0 < z < 1$, $y < \sqrt{z}$; в) $1 < z < 2$, $y < \sqrt{z}$; д) $1 < z < 2$, $y > \sqrt{z}$. Однако при $\sqrt{z} < y$ имеем $z < y^2 < 1$, что противоречит условию $1 < z < 2$. Значит, остается: а) $0 < z < 1$, $y < \sqrt{z}$; б) $0 < z < 1$, $y > \sqrt{z}$; в) $1 < z < 2$, $y < \sqrt{z}$. Из (1) и а) приходим к (4); из (1) и б) — к (5); из (1) и в) — к (6). 11. Эквивалентны (предположение $x < 0$ приводит к противоречию; аналогично приходим к противоречию в предположении $y < 0$ или $z < 0$).

Глава V. Линейные уравнения и линейные неравенства

§ 1. Линейные уравнения

1. $x_1 = -x_4$, $x_2 = 3x_4$, $x_3 = -3x_4$. 2. Система несовместна. 3. Система несовместна. 4. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$. 5. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. 6. $x_1 = x_5 + x_6 - 1$, $x_2 = x_5 - x_6 + 1$, $x_3 = x_6 - x_5 - 2$, $x_4 = 2 - x_5 - x_6$. 7. $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 1$, $x_2 = 2 - n$. 8. Рассмотрим многочлен $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)$. Производя перемножение, представим его в виде $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Полагая здесь поочередно $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ..., $x = n$, получим:

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0,$$
$$2^n + 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}a_2 + \ldots + a_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^n + n^{n-1}a_1 + n^{n-2}a_2 + \ldots + a_n = 0$$

или

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-2}}{a_n} + \ldots + \frac{a_2}{a_n} + \frac{a_1}{a_n} + \frac{1}{a_n} = 0,$$
$$1 + 2\frac{a_{n-1}}{a_n} + 2^2\frac{a_{n-2}}{a_n} + \ldots + 2^{n-2}\frac{a_2}{a_n} + 2^{n-1}\frac{a_1}{a_n} + 2^n\frac{1}{a_n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 + n\frac{a_{n-1}}{a_n} + n^2\frac{a_{n-2}}{a_n} + \ldots + n^{n-2}\frac{a_2}{a_n} + n^{n-1}\frac{a_1}{a_n} + n^n\frac{1}{a_n} = 0.$$

Отсюда видно, что решение данной системы будет

$$x_1 = \frac{a_{n-1}}{a_n},\ x_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n},\ \ldots,\ x_{n-1} = \frac{a_1}{a_n},\ x_n = \frac{1}{a_n}. \qquad (1)$$

Таким образом, для решения заданной системы надо выполнить умножение $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)$; тогда мы будем знать $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а затем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определятся формулами (1). Отметим, что, например: $a_n = (-1)^n n!$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} s_{n-1}$, где s_{n-1} — сумма всевозможных произведений из чисел 1, 2, 3, ..., n таких, что в каждое произведение входит $n-1$ множителей и т. д. Заметим, что приведенным рассуждением не установлена единственность решения. 9. Вычитая почленно из второго уравнения первое, из третьего — второе и т. д., а из последнего — предпоследнее, мы получим систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ той же структуры. Повторяя это по отношению к полученной системе из $n-1$ уравнений, мы опять получим линейную систему той же структуры, но уже с $n-2$ неизвестными и так далее. В конце концов мы придем к системе $x_2 + x_1 = 2$, $x_2 + 2x_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, откуда $x_1 = x_2 = 1$.

Так как первые уравнения предшествующих систем имеют вид *

$$x_1+x_2+x_3=3,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=n,$$

то $x_3=x_4=\dots=x_n=1$. Отметим еще формулы, которые получаются при подстановке $x_1=x_2=\dots=x_n=1$ в уравнения данной системы (начиная со второго):

$$C_1^1+C_2^1+\dots+C_n^1=C_{n+1}^2,$$
$$C_2^2+C_3^2+\dots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3,$$
$$C_3^3+C_4^3+\dots+C_{n+2}^3=C_{n+3}^4$$

и вообще

$$C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}+\dots+C_{2n-2}^{n-1}=C_{2n-1}^n.$$

10. $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=1$, ..., $x_{99}=-1$, $x_{100}=1$.

§ 2. Линейные уравнения, содержащие параметры

1. а) Если $a\neq 0$ и $a\neq -\frac{7}{3}$, то $x=\frac{12(a+1)}{3a+7}$, $y=\frac{4}{3a+7}$, $z=\frac{12}{3a+7}$. б) Если $a=-\frac{7}{3}$, система несовместна. в) Если $a=0$, то z — любое число, $x=z$, $y=-2z+4$. 2. а) Если $a\neq 4$ и $a\neq -3$, то $x=\frac{1}{4-a}$, $y=\frac{1}{a-4}$, $z=6$. б) Если $a=4$, система несовместна. в) Если $a=-3$, то x — любое число, а $y=\frac{4x-1}{3}$, $z=\frac{19-7x}{3}$. 3. а) Если $a\neq 0$ и $a\neq -3$, то $x=\frac{a+1}{a}$, $y=\frac{a+3}{a}$, $z=-\frac{2(a+2)}{a}$. б) Если $a=0$, то система несовместна. в) Если $a=-3$, то y — любое число, $x=y+\frac{2}{3}$, $z=y-\frac{2}{3}$. 4. а) Если $a\neq 0$, $a\neq 1$, $a\neq -1$, то $x=y=z=\frac{1}{a}$, б) Если $a=0$, то система несовместна. в) Если $a=1$, то система неопределенная: z — любое число, $x=z$, $y=1$. г) Если $a=-1$, то система неопределенная; y — любое число, $x=y$, $z=-1$. 5. а) Если $a\neq 0$, $a\neq 1$, $b\neq 0$, то система имеет единственное решение: $x=\frac{b}{a-1}$, $y=\frac{a}{a-1}$. б) Если $a=0$, $b\neq 0$, то x — любое число, $y=0$. в) Если $a=0$, $b=0$, то x и y — любые числа. г) Если $a\neq 0$, $b=0$, то $x=0$, y — любое число. д) Если $b=1$, $b\neq 0$, то система несовместна. 6. Решение. Из первого уравнения системы находим $y=\frac{5-2x+4z}{3}$. Подставляя это значение y в два остальных уравнения, после упрощений будем иметь

$$\begin{aligned}2(a-b)x-5(a-b)z&=2(a-b),\\(b-2a)x+(5a-b)z&=4(b-a).\end{aligned}\qquad (A)$$

а) $a=b$. В этом случае первое из уравнений (A) является тождеством, а второе принимает вид $-ax+4az=0$. Если $a=b=0$, то и это уравнение выполняется при любых x и z. Следовательно, если $a=b=0$, уравнения (A) будут тождествами и, значит, все решения данной системы x, $y=\frac{5-2x+4z}{3}$, z, где x и z — произвольные числа. б) Если $a=b\neq 0$, то уравнение $-ax+4az=0$ может быть переписано так: $x=4z$, $y=\frac{1}{3}(5-2x+4z)=\frac{1}{3}(5-4z)$. Все решения: $x=4z$, $y=\frac{5-4z}{3}$, где z — произвольное число. Если $a-b\neq 0$, то уравнение $2(a-b)x-5(a-b)z=2(a-b)$ можно переписать так: $2x-5z=2$, откуда $x=1+\frac{5}{2}z$,

* Эта система уравнений вместе с первым уравнением данной системы эквивалентна данной системе.

а следовательно, уравнение $(b-2a)x+(5a-b)z=4(b-a)$ принимает вид $(b-2a)\left(1+\frac{5}{2}z\right)+(5a-b)z=4(b-a)$ или $3bz=2(3b-2a)$. в) Если $a-b\neq 0$, $b=0$, $3b-2a\neq 0$, то система несовместна. г) Если $a-b\neq 0$, $b=0$, $3b-2a=0$, то $x=1+\frac{5}{2}z$, $y=\frac{1}{3}(5+4z-2-5z)=\frac{3-z}{3}$, где z — любое число. д) Если $a-b\neq 0$, $b\neq 0$, то $z=\frac{2(3b-2a)}{3b}$, $x=1+\frac{5(3b-2a)}{3b}=\frac{2(9b-5a)}{3b}$, $y=\frac{1}{3}\left[5+\frac{8(3b-2a)}{3b}-\frac{4(9b-5a)}{3b}\right]=\frac{3b+4a}{9b}$. **7.** Если $a\neq 1$, $a\neq -2$, то $x=-\frac{a+1}{a+2}$, $y=\frac{1}{a+2}$, $z=\frac{(a+1)^2}{a+2}$. Если $a=1$, то $z=1-x-y$, а x и y — любые числа. При $a=-2$ система несовместна. **8.** Если $a\neq 1$ и $a\neq -3$, то $x=-\frac{a^2+2a+2}{a+3}$, $y=-\frac{a^2+a-1}{a+3}$, $z=\frac{2a+1}{a+3}$, $t=\frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3}$. Если $a=1$, то $t=1-x-y-z$, а x, y, z — любые числа. При $a=-3$ система несовместна. **9.** Если $b\neq 0$ и $a\neq 1$, то $x=\frac{2b-1}{b(a-1)}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{-2ab-4b+1}{b(a-1)}$. Если $b=0$, то система несовместна. Если $b\neq 0$, $a=1$, $b\neq\frac{1}{2}$, система несовместна. Если $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, то x — любое число, $y=2$, $z=2-x$. **10.** Если $a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$, то система имеет единственное решение: $x=y=z=t=0$ (см. задачу 9, гл. 1, § 1). **11.** Если $k\neq 1$ и $k\neq -2$, то система имеет единственное решение: $x=\frac{a(k+1)-b-c}{(k-1)(k+2)}$, $y=\frac{b(k+1)-a-c}{(k-1)(k+2)}$, $z=\frac{c(k+1)-a-b}{(k-1)(k+2)}$. Если $k=-2$ и $a+b+c=0$, то система эквивалентна следующей: $-2x+y+z=a$, $x-2y+z=b$. Все решения этой системы: x, $y=x-\frac{b-a}{3}$, $z=x+\frac{b+2a}{3}$; x — любое число. Если $k=1$ и $a=b=c$, то все решения: x, y, $z=a-x-y$, где x и y — любые числа. Во всех остальных случаях ($k=-2$, $a+b+c\neq 0$ и $k=1$, причем среди чисел a, b, c есть хотя бы два различных) система несовместна. **12.** Если $b\neq c$, $c\neq a$, $a\neq b$, то $x=abc$, $y=-(bc+ca+ab)$, $z=a+b+c$. Если среди чисел a, b, c есть только два равных, например, $b=c\neq a$, то данная система эквивалентна следующей: $x+ay+a^2z=a^3$, $x+by+b^2z=b^3$, откуда $x=abz-ab(a+b)$, $y=-(a+b)z+a^2+ab+b^2$, где z — любое число. Если $a=b=c$, то данная система эквивалентна одному уравнению $x+ay+a^2z=a^3$; все решения этого уравнения: $x=a^3-ay-a^2z$, y, z, где y и z — любые числа. **13.** Указание: переписать данную систему в виде $(a+1)x=(b+1)y=(c+1)z=(d+1)u=ax+by+cz+du$ и ввести вспомогательное неизвестное $ax+by+cz+du=s$. Ответ: а) если $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\neq 0$ и $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}-1\neq 0$, то $x=y=z=u=0$; б) если $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\neq 0$, но $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}-1=0$, то $x=\frac{t}{a+1}$, $y=\frac{t}{b+1}$, $z=\frac{t}{c+1}$, $u=\frac{t}{d+1}$, где t — любое число; в) * если $a+1=0$, $(b+1)(c+1)(d+1)\neq 0$, то $x=y=z=u=0$; г) если $a+1=0$, $b+1=0$, $c+1\neq 0$, $d+1\neq 0$, то y — произвольное число, $x=-y$, $z=0$, $u=0$; д) если $a+1=0$, $b+1=0$, $c+1=0$, $d+1\neq 0$, то y и z — любые числа, $x=-y-z$, $u=0$; е) если $a+1=0$, $b+1=0$, $c+1=0$, $d+1=0$, то x, y, z — любые числа, $u=-x-y-z$. **14.** а) Если $a\neq b$, $a\neq c$, $a\neq d$, $b\neq c$, $b\neq d$, $c\neq d$, то $x=abcd$, $y=-(abc+abd+acd+bcd)$, $z=ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $t=-(a+b+c+d)$; б) если $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$, $c=d$, то t — любое число, $x=-abct-abc(a+b+c)$, $y=(ac+ab+bc)t+(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$, $z=-(a+b+c)t-(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$; в) если $a\neq b=c=d$, то t и z — любые числа, а $x=abz+ab(a+b)t+ab(a^2+ab+b^2)$, $y=-(a+b)z-(a^2+ab+b^2)t-(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$; г) если

* Аналогичные выводы будем иметь в случаях: $b+1=0$, $(a+1)(c+1)(d+1)\neq 0$ или $c+1=0$, $(a+1)(b+1)(d+1)\neq 0$, или $d+1=0$, $(a+1)(b+1)(c+1)\neq 0$. В подобных случаях [см. ниже случаи г), д), а также задачи 14, 15 и др.] мы не будем в ответах давать полный анализ результатов.

$a=b=c=d$, то y, z и t — любые числа, а $x=-ay-a^2z-a^3t-a^4$. 15. Указание: ввести новые неизвестные; $x+y+z=p$, $y+z=q$, $z=r$. Ответ: а) если $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, то $x=-abc-bc-ca-ab$, $y=bc+ca+ab+a+b+c$, $z=-a-b-c$; б) если $a\neq b=c$, то z произвольно, $x=(ab+a+b)z+ab(a+b)+a^2+ab+b^2)$ $y=-z-(a+b)z-a^2-ab-b^2$; в) если $a=b=c$, то y и z произвольны, $x=-(y+z)(a+1)-a^2z-a^3$. 16. а) если $a\neq b$, $b\neq c$ и $c\neq a$, то $x=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $y=\frac{1}{(b-c)(b-a)}$, $z=\frac{1}{(c-a)(c-b)}$; б) если $a\neq b=c$, то система несовместна; в) если $a=b=c$, то система несовместна. 17. Указание. Ввести новые неизвестные: $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$. Ответ (предполагаем, что $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$): а) если $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}\neq 0$, то система имеет единственное решение $x=y=z=1$; б) если $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}=0$, но хотя бы одно из чисел $\frac{1}{ab}-\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{bc}-\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{ac}-\frac{1}{b^2}$ не равно нулю, то $x=1+t\left(\frac{1}{bc}-\frac{1}{a^2}\right)$, $y=1+t\left(\frac{1}{ca}-\frac{1}{b^2}\right)$, $z=1+t\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{c^2}\right)$, где t — любое число; в) если $\frac{1}{bc}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{ca}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ab}-\frac{1}{c^2}=0$, то y и z — любые числа, а $x=a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)$. 18. а) Если $d\neq 0$, $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ (разумеется, $a\neq d$, $b\neq d$, $c\neq d$), то система имеет единственное решение:

$$x=(b-c)(a-d)[d(b+c)-bc],$$
$$y=(c-a)(b-d)[d(c+a)-ca],$$
$$z=(a-b)(c-d)[d(a+b)-ab].$$

б) Если $d=0$ и выполнено хотя бы одно из неравенств $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, то $x=t(b-c)$, $y=t(c-a)$, $z=t(a-b)$, где t — любое число; б) если среди чисел a, b, c есть только два равных между собой, например, $a=b\neq c$, то x любое число, $y=-x$, $z=0$; г) если $a=b=c\,(\neq d)$, то y и z — любые числа, а $x=-y-z$. 19. Переписывая данную систему в виде

$$\frac{c+\lambda}{a+\lambda}x+\frac{c+\lambda}{b+\lambda}y+z=c+\lambda,$$
$$\frac{c+\mu}{a+\mu}x+\frac{c+\mu}{b+\mu}y+z=c+\mu,$$
$$\frac{c+\nu}{a+\nu}x+\frac{c+\nu}{b+\nu}y+z=c+\nu$$

и вычитая почленно из первого уравнения второе и из первого третье, получим (после сокращения на $\lambda-\mu\neq 0$ и $\lambda-\nu\neq 0$)

$$\frac{(a-c)x}{(a+\lambda)(a+\mu)}+\frac{(b-c)y}{(b+\lambda)(b+\mu)}=1,$$
$$\frac{(a-c)x}{(a+\lambda)(a+\nu)}+\frac{(b-c)y}{(b+\lambda)(b+\mu)}=1.$$

Полагая $\frac{(a-c)x}{a+\lambda}=x_1$, $\frac{(b-c)y}{b+\lambda}=y_1$, получим систему той же структуры, но уже с двумя неизвестными: $\frac{x_1}{a+\mu}+\frac{y_1}{b+\mu}=1$, $\frac{x_1}{a+\nu}+\frac{y_1}{b+\nu}=1$ или $\frac{b+\mu}{a+\mu}x_1+y_1=b+\mu$, $\frac{b+\nu}{a+\nu}x_1+y_1=b+\nu$. Вычитая и сокращая на $\mu-\nu\neq 0$, получим $x_1=\frac{(a+\mu)(a+\nu)}{a-b}$; следовательно, $x=\frac{(a+\lambda)(a+\mu)(a+\nu)}{(a-b)(a-c)}$; аналогично $y=\frac{(b+\lambda)(b+\mu)(b+\nu)}{(b-a)(b-c)}$, $z=\frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{(c-a)(c-b)}$. Этим приемом можно решить систему из n уравнений с n неизвестными, имеющую ту же структуру, что и заданная система. Правильность формул, которые в случае системы из n уравнений с n неизвестными аналогичны указанным выше, может быть установлена и методом полной индукции. 20. Система несовместна. 21. Система в случае $u+v\neq 0$ имеет единственное решение: $x=a\frac{v-u}{v+u}$, $y=b\frac{uv+1}{v+u}$, $z=c\frac{uv-1}{v+u}$.

В случае $u+v=0$ система несовместна. **22.** Система несовместна. **23.** Система имеет единственное решение $x=\sqrt{p}(u+v)$, $y=\sqrt{q}(u-v)$, $z=2uv$. **24.** $a=5$. **25.** При всех значениях λ, кроме $\lambda=1$ и $\lambda=-\frac{1}{2}$. Решение: $x_4=1-x_1-x_2-x_3-x_5$,

$$\left.\begin{array}{c}\lambda x_1-3x_2+5x_3-1+x_1+x_2+x_3+x_5+3x_5=1,\\ \lambda^2x_1-x_2+3x_3+2x_5=2;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda+1)x_1-2x_2+6x_3+4x_5=2,\\ \lambda^2x_1-x_2+3x_3+2x_5=2;\end{array}\right\}$$

$$x_2=\lambda^2x_1+3x_3+2x_5-2,$$

$$(\lambda+1)x_1-2\lambda^2x_1-6x_3-4x_5+4+6x_3+4x_5=2,$$

$$(1+\lambda-2\lambda^2)x_1=-2.$$

Это уравнение не имеет решения, если $1+\lambda-2\lambda^2=0$, откуда $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. **26.** Система совместна при всех значениях λ. **27.** $c=a+b$. а) Если $b\neq 0$, то $x=0$, $y=2b$, $z=2a$; б) если $b=0$, $a\neq 0$, то $x=0$, $y=0$, $z=2a$; в) если $a=b=0$, то y и z — любые числа, а $x=-y-z$. **28.**

$$x_1=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}-a_1,$$

$$x_2=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}-a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}-a_n.$$

29. $x_1=a_1-a_0$, $x_2=a_2-2a_1+a_0$, $x_3=a_3-3a_2+3a_1-a_0,\ldots, x_n=a_n-C_n^1a_{n-1}+C_n^2a_{n-2}+\ldots+(-1)^na_0$. **30.** Умножим обе части первого уравнения на b_1, обе части второго уравнения — на b_2, обе части предпоследнего уравнения — на b_{n-1} и сложим почленно полученные уравнения. Выберем $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ такими, чтобы

$$\begin{array}{l}b_1+b_2a_2+b_3a_2^2+b_4a_2^3+\ldots+b_{n-1}a_2^{n-2}+a_2^{n-1}=0,\\ b_1+b_2a_3+b_3a_3^2+b_4a_3^3+\ldots+b_{n-1}a_3^{n-2}+a_3^{n-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_1+b_2a_n+b_3a_n^2+b_4a_n^3+\ldots+b_{n-1}a_n^{n-2}+a_n^{n-1}=0;\end{array}\qquad (A)$$

тогда после сложения получим уравнение $\left(b_1+b_2a_1+b_3a_1^2+\ldots+b_{n-1}a_1^{n-2}+a_1^{n-1}\right)x_1=b_1$. Из соотношений (A) следует, что $a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть корни уравнения $z^{n-1}+b_{n-1}z^{n-2}+\ldots+b_3z^2+b_2z+b_1=0$, так что $z^{n-1}+b_{n-1}z^{n-2}+\ldots+b_3z^2+b_2z+b_1=(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n)$; отсюда $b_1+b_2a_1+b_3a_1^2+\ldots+b_{n-1}a^{n-2}+a_1^{n-1}=(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)$, так что

$$x_1=\frac{(-1)^{n-1}a_2a_3\ldots a_n}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)};$$

аналогично

$$x_2=\frac{(-1)^{n-1}a_1a_3\ldots a_n}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)},\ \ldots,\ x_n=\frac{(-1)^{n-1}a_1a_2\ldots a_{n-1}}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

31. $x_1=a(1+n\cdot 2^{n-1})$, $x_2=a(1+n\cdot 2^{n-2}),\ldots, x_n=a(1+n)$. При $n=4$ система имеет вид

$$\begin{array}{c}x_1-x_2-x_3-x_4=2a,\\ -x_1+3x_2-x_3-x_4=4a,\\ -x_1-x_2+7x_3-x_4=8a,\\ -x_1-x_2-x_3+15x_4=16a;\end{array}$$

ее решение: $x_1 = 33a$, $x_2 = 17a$, $x_3 = 9a$, $x_4 = 5a$. **32.** Решение. Определим одно из неизвестных, например, x_n. Для этого умножим первое из уравнений данной системы:

$$\begin{aligned}
-x_n + 3x_1 - x_2 &= a_1,\\
-x_1 + 3x_2 - x_3 &= a_2,\\
-x_2 + 3x_3 - x_4 &= a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
-x_{n-3} + 3x_{n-2} - x_{n-1} &= a_{n-2},\\
-x_{n-2} + 3x_{n-1} - x_n &= a_{n-1},\\
-x_{n-1} + 3x_n - x_1 &= a_n
\end{aligned}$$

на b_1, второе — на b_2, третье — на b_3, ..., предпоследнее — на b_{n-1} и сложим почленно полученные после этого уравнения с последним из уравнений (1). Выберем числа b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1} так, чтобы коэффициенты при x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} обратились в нуль:

$$\begin{aligned}
-b_2 + 3b_1 - 1 &= 0,\\
-b_3 + 3b_2 - b_1 &= 0,\\
-b_4 + 3b_3 - b_2 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
-b_{n-3} + 3b_{n-4} - b_{n-5} &= 0,\\
-b_{n-2} + 3b_{n-3} - b_{n-4} &= 0,\\
-b_{n-1} + 3b_{n-2} - b_{n-3} &= 0,\\
-1 + 3b_{n-1} - b_{n-2} &= 0;
\end{aligned} \tag{2}$$

тогда x_n определится из уравнения

$$(-b_1 - b_{n-1} + 3)\,x_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_n. \tag{3}$$

Перепишем систему (2) в виде

$$\begin{aligned}
b_2 &= 3b_1 - b_0,\\
b_3 &= 3b_2 - b_1,\\
b_4 &= 3b_3 - b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
b_k &= 3b_{k-1} - b_{k-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
b_{n-1} &= 3b_{n-2} - b_{n-3},\\
b_n &= 3b_{n-1} - b_{n-2},
\end{aligned}$$

где для симметрии положено $b_0 = b_n = 1$. Будем искать решения рекуррентного соотношения

$$b_k = 3b_{k-1} - b_{k-2} \tag{5}$$

в виде $b_k = x^k$ (более подробно этот метод изложен в главе IX — «Последовательности»): $x^k = 3x^{k-1} - x^{k-2}$, или $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Итак, рекуррентному соотношению удовлетворяют последовательности $b_k = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ и $b_k = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k$, а в силу однородности этого соотношения и линейная комбинация этих решений

$$b_k = p\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k + q\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k. \tag{6}$$

Определим p и q так, чтобы выполнялись условия $b_0 = b_n = 1$, т. е. $p + q = 1$, $p\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 1$; отсюда находим p и q; подставляя в (6), получим

$$b_k = \frac{\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left[1-\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left[\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\right]}{\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

Теперь из уравнения (3) находим x_n:

$$x_n = \frac{a_n\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left[1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \right.}{\sqrt{5}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]}$$

$$\left. + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\right]\right\},$$

или

$$x_n = \frac{a_n}{\sqrt{5}} \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-2k} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-2k}\right]}{\sqrt{5}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]^2}.$$

Замечание. Знаменатель $3 - b_1 - b_{n-1}$ преобразуется так:

$$3 - \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left[1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left[\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\right]}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\right]}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} +$$

$$+ \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - 2\sqrt{5}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(3\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(3\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 2\right) - 2\sqrt{5}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{5+3\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{3\sqrt{5}-5}{2} - 2\sqrt{5}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \sqrt{5}\,\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n} - 2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} =$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]^2}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

Значения для x_i можно записать в виде

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{5}}\,\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n} +$$

$$+ \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-2k} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-2k}\right]}{\sqrt{5}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]^2} -$$

$$- \frac{a_i\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2i} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2i} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n-2i} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-2i}\right]}{\sqrt{5}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]},$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n.$

33.

$$x_1 = \frac{a(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) - c_1[(n-1)a + b]}{(a-b)[(n-1)a + b]},$$

$$x_2 = \frac{a(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) - c_2[(n-1)a + b]}{(a-b)[(n-1)a + b]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{a(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) - c_n[(n-1)a + b]}{(a-b)[(n-1)a + b]}.$$

34. Решение. Перепишем данную систему в виде:

$$3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + 2(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = 3 + 2b,$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 3(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) +$$

$$+ 2(a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n) = 1 + 3b + 2b^2,$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + 3(a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n) +$$

$$+ 2(a_1^3x_1 + a_2^3x_2 + \ldots + a_n^3x_n) = b(1 + 3b + 2b^2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1^{n-3}x_1 + a_2^{n-3}x_2 + \ldots + a_n^{n-3}x_n + 3(a_1^{n-2}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \ldots + a_n^{n-2}x_n) +$$

$$+ 2(a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n) = b^{n-3}(1 + 3b + 2b^2),$$

$$a_1^{n-2}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \ldots + a_n^{n-2}x_n + 3(a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n) = b^{n-2}(1 + 3b)$$

и положим

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = X_1,$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = X_2,$$

$$a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = X_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = X_n.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{gathered}3X_1+2X_2=3+2b,\\ X_1+3X_2+2X_3=1+3b+2b^2,\\ X_2+3X_3+2X_4=b+3b^2+2b^3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_{n-2}+3X_{n-1}+2X_n=b^{n-3}+3b^{n-2}+2b^{n-1},\\ X_{n-1}+3X_n=b^{n-2}+3b^{n-1};\end{gathered}$$

полагая,

$$X_1-1=z_1,\quad X_2-b=z_2,\quad X_3-b^2=z_3,\ \ldots,\ X_n-b^{n-1}=z_n,$$

получим:

$$\begin{gathered}3z_1+2z_2=0,\\ z_1+3z_2+2z_3=0,\\ z_2+3z_3+2z_4=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ z_{n-2}+3z_{n-1}+2z_n=0,\\ z_{n-1}+3z_n=0.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}z_{n-1}=-3z_n=-(2^2-1)\,z_n,\\ z_{n-2}=-3z_{n-1}-2z_n=9z_n-2z_n=7z_n=(2^3-1)\,z_n,\\ z_{n-3}=-3z_{n-2}-2z_{n-1}=-21z_n+6z_n=-15z_n=-(2^4-1)\,z_n,\\ z_{n-4}=-3z_{n-3}-2z_{n-2}=45z_n-14z_n=31z_n=(2^5-1)\,z_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z_2=-3z_3-2z_4=(-1)^{n-2}(2^{n-1}-1)\,z_n,\\ z_1=-3z_2-2z_3=(-1)^{n-1}(2^n-1)\,z_n.\end{gathered}$$

Теперь из первого уравнения $3z_1+2z_2=0$ находим $3(-1)^{n-2}(2^{n-1}-1)\,z_n+2(-1)^{n-1}(2^n-1)\,z_n=0$, или $[3(2^{n-1}-1)-2(2^n-1)]\,z_n=0$, или $(-2^{n-1}-1)\,z_n=0$, откуда $z_n=0$, а значит и $z_1=z_2=z_3=\ldots=z_{n-1}=0$. Таким образом,

$$\begin{gathered}x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=1,\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=b,\\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+\ldots+a_n^2x_n=b^2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+a_3^{n-1}x_3+\ldots+a_n^{n-1}x_n=b^{n-1}.\end{gathered}$$

Умножим первое из уравнений на p_1, второе — на p_2, третье — на p_3, ... и предпоследнее — на p_{n-1}; последнее оставим без изменения. Сложим все полученные уравнения и выберем $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}$ так, чтобы коэффициенты при $x_2, x_3, \ldots, x_n$ обратились в нуль:

$$\left.\begin{gathered}p_1+a_2p_2+a_2^2p_3+\ldots+a_2^{n-2}p_{n-1}+a_2^{n-1}=0,\\ p_1+a_3p_2+a_3^2p_3+\ldots+a_3^{n-2}p_{n-1}+a_3^{n-1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_1+a_np_2+a_n^2p_3+\ldots+a_n^{n-2}p_{n-1}+a_n^{n-1}=0.\end{gathered}\right\}\qquad(1)$$

Тогда

$$\begin{gathered}\left(p_1+a_1p_2+a_1^2p_3+\ldots+a_1^{n-2}p_{n-1}+a_1^{n-1}\right)x_1=\\ =p_1+bp_2+b^2p_3+\ldots+b^{n-2}p_{n-1}+b^{n-1}.\end{gathered}\qquad(2)$$

Из соотношений (1) следует, что $a_2, a_3, \ldots, a_n$ — корни уравнения $s^{n-1}+p_{n-1}s^{n-2}+p_{n-2}s^{n-3}+\ldots+p_3s^2+p_2s+p_1=0$, так что левая часть этого уравнения тождественно равна $(s-a_2)(s-a_3)\ldots(s-a_n)$ и уравнение (2) примет вид $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)\,x_1=(b-a_2)(b-a_3)\ldots(b-a_n)$, откуда

$$x_1=\frac{(b-a_2)(b-a_3)\ldots(b-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}.$$

Аналогично:

$$x_2 = \frac{(b-a_1)(b-a_3)\dots(b-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)},$$

. . . . . .

$$x_n = \frac{(b-a_1)(b-a_2)\dots(b-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}.$$

35. Необходимое и достаточное условие совместности системы: $a_1a_2 + a_3a_4 = a_1a_3 + a_2a_4 = a_2a_3 + a_1a_4$. При этом условии:

$$x_1 = \frac{1}{2}[a_1(a_2+a_4) - a_2a_4],$$

$$x_2 = \frac{1}{2}[a_2(a_3+a_4) - a_3a_4],$$

$$x_3 = \frac{1}{2}[a_3(a_2+a_4) - a_2a_4],$$

$$x_4 = \frac{1}{2}[a_4(a_2+a_3) - a_2a_3].$$

36. Положение очевидно, если все коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$; $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ равны нулю. Предположим, что $a_1 \neq 0$, тогда и $b_1 \neq 0$. В самом деле, если бы было $b_1 = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ являлось бы решением второго уравнения, но (в силу $a_1 \neq 0$) эта совокупность чисел не будет решением первого уравнения. Рассмотрим решение $x_1 = -\frac{b_2}{a_1}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0, \dots, x_n = 0$ первого уравнения. По условию это решение и второго уравнения, т. е. $-b_1\frac{a_2}{a_1} + b_2 = 0$, откуда $b_2 = \frac{b_1}{a_1}a_2$. Полагая $\frac{b_1}{a_1} = k$, получим $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$. Рассматривая решение $x_1 = -\frac{a_3}{a_1}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0, \dots, x_n = 0$ первого уравнения в силу эквивалентности, находим: $-b_1\frac{a_3}{a_1} + b_3 = 0$, откуда $b_3 = ka_3$ и т. д. Число k, по доказанному, отлично от нуля. Обратное положение. Если $k \neq 0$, $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2, \dots, b_n = ka_n$, то уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0$ эквивалентны. 38. Если $Al + Bm + Cn \neq 0$, то система имеет единственное решение; если $Al + Bm + Cn = 0$, $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$, то система несовместна; если $Al + Bm + Cn = 0$, $Aa + Bb + Cc + D = 0$, то система неопределенная; ее решения $x = a + lt$, $y = b + mt$, $z = c + nt$, где t — любое число. 39. Если хотя бы одно из трех чисел: $b_1c_2 - b_2c_1$, $c_1a_2 - c_2a_1$, $a_1b_2 - a_2b_1$, не равно нулю, то все решения данной системы даются соотношениями: $x = (b_1c_2 - b_2c_1)t$, $y = (c_1a_2 - c_2a_1)t$, $z = (a_1b_2 - c_2b_1)t$, где t принимает все значения. Если все указанные числа равны нулю, то данная система эквивалентна тому из двух уравнений, в котором не все коэффициенты равны нулю. Если, например, $b_1c_2 - b_2c_1 = c_1a_2 - c_2a_1 = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$, то все решения данной системы $x = -\frac{b_1y + c_1z}{a_1}$, y, z, где y и z — любые числа.

§ 3. Линейные неравенства

1. $x > -\frac{5}{2}$. 2. $x > 4$ 3. $x < -\frac{3}{2}$. 4. $-5 < x < 3$. 5. $-3 < x < -\frac{1}{2}$. 6. Система несовместна. 7. Если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$; если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$. Если $a = 0$, $b > 0$, то неравенство удовлетворяется при всех значениях x. Если $a = 0$, $b \leqslant 0$, неравенство не имеет решений. 8. Если $-1 < a < 3$, то $x < -\frac{a^2}{a^2 - 2a - 3}$. Если $a < -1$ или $a > 3$, то $x > -\frac{a^2}{a^2 - 2a - 3}$. Если $a = 3$ или $a = -1$, то x — любое действительное число. 13. $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = 0$.

§ 4. Составление линейных уравнений

П. 1. Составление линейных уравнений с одним неизвестным

1. $\frac{vt}{v_1 - v}$. 2. Через 4 года. 3. 1120 *км*. 4. 50 *км/час*. 5. 20 *км/час*. 6. В 11 час. 45 мин. вечера. 7. 30 *км*. 8. В результате второго деления первый получил больше, второй столько же, третий меньше. Полученные суммы: 72 руб., 60 руб., 48 руб. или 36 руб., 30 руб., 24 руб. 9. $s\frac{m+n}{p+q}\frac{aq-bp}{mb-na}$. 10. $\frac{(r-q)(1+p)}{(p-r)(1+q)}$. 11. 60 *кг*. 12. 20. 13. $\frac{mn}{m+n}$. 14. Девять частей первого на 35 частей второго. 15. 187, 5 *кг*. 16. Самолеты сойдутся в момент времени $\frac{d+vt-Tw}{v-w}$, считая от начального отсчета времени. 17. 40 час. 18. 10 *л*. 19. 3 час. 20. 27 дней. 21. 17°, 25. 22. 57 *км/час*. 23. 1736 *мм*, с точностью до 1 *мм* (с недостатком). 24. Расстояние от A до завода равно $\frac{1000(b-a)+d(1000p+na)}{2000p+n(a+b)}$. 25. $\frac{(3u+v)s}{u(3v+u)}$. 26. 1°. 12 *л*. 18 *л*, 30 *л*. 2°. 118,8 *л*. 27. $\frac{r-\frac{ap}{100}-\frac{bq}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)}{\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)}$ %. 28. $\frac{3r-p-q-\frac{pq}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)}$. 29. 20%. 30. 10 час. 31. 7 час. 50 мин. 32. 44 раза. 33. 10 час. 34. 3 *км/час*.

П. 2. Составление систем линейных уравнений с несколькими неизвестными

1. $v=\frac{a}{t_2-t_1}$, $l=\frac{at_1}{t_2-t_1}$. 2. 4 *км/час*, 3,5 *км/час*. 3. 80 *кг*, 60 *кг*. 4. 4 *км*. 5. 89 *кг* меди и 35 *кг* цинка. 6. $\frac{bd}{c-a(d+e)}$ час. 7. В 1 час дня. 8. 4 *км*. 9. 600 *км*. 10. В гору 3 *км/час*, по ровному месту 4 *км/час*, под гору 5 *км/час*. 11. $P\frac{A-C}{B-C}$, $P\frac{B-A}{B-C}$, $C<A<B$ или $C>A>B$. 12. Объем $\frac{Q-q}{D-d}$, вес $\frac{Dq-dQ}{D-d}$. Это верно, если обе дроби положительны. Задача неразрешима, если хотя бы одна из дробей отрицательна. Если $D=d$, $q\neq Q$, задача неразрешима. Если $D=d$, $Q=q$, то вес p и объем v связаны лишь одним соотношением $p+dv=q$. 13. $\frac{100(10000-mn)}{100(m+n)+2mn}$. 14. $\frac{100c-bqs}{ap-bq}$ *м* по a руб. и $\frac{100c-aps}{bq-ap}$ *м* по b руб. 15. 240. 16. $CE=\frac{v_1}{v_1+v_2}\left(\frac{nv_2}{60}+2d\right)$, $CT=\frac{2v_1v_2}{(v_1+v_2)^2}\left(\frac{nv_2}{60}+2d\right)$. 17. Точка A проходит в первый час 112 *м*, в последний —152 *м*. Точка B проходит в первый час 115 *м*, в последний —127 *м*. 18. 108 *г* свинца. 19. 12 *кг* руды, содержащей 72% железа, и 30 *кг* руды, содержащей 58% железа. 20. 438 и 102. 21. 50 и 75. 22. 32 человека, 500 руб 23. Через 3 часа 20 мин. 24. 60 *км*, 5 *км/час* и 4 *км/час*. 25. Длина спусков 10 *км*, подъемов 16 *км*. 26. $\frac{475}{12}$ *км*. 27. 1°. $\frac{35}{12}$; 2°. 17,5 *кг* и 6 *кг*. 28. $\frac{a(m+n)+b(p+q)}{mp-nq}$. 29. Вес сосуда 50 *г*. Вес воды в A равен 150 *г*; вес воды в B равен 200 *г*. 30. $AB=3a-b$, $v_1=\frac{4a-2b}{n}$, $v_2=\frac{2a}{n}$. 31. Количество свежих грибов первого вида

$$\frac{cq\dfrac{1-\frac{b}{100}}{1-\frac{a}{100}}}{1+q\dfrac{1-\frac{b}{100}}{1-\frac{a}{100}}};$$

количество сушеных грибов первого вида

$$\frac{cq\dfrac{1-\dfrac{b}{100}}{1-\dfrac{p}{100}}}{1+q\dfrac{1-\dfrac{b}{100}}{1-\dfrac{a}{100}}};$$

количество свежих грибов второго вида

$$\frac{c}{1+q\dfrac{1-\dfrac{b}{100}}{1-\dfrac{a}{100}}};$$

количество сушеных грибов второго вида

$$\frac{c\dfrac{1-\dfrac{b}{100}}{1-\dfrac{p}{100}}}{1+q\dfrac{1-\dfrac{b}{100}}{1-\dfrac{a}{100}}}.$$

32. 50 лет отцу, сыновьям 10 лет, 15 лет, 20 лет. 33. В гору:

$$\frac{t\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)+\frac{a}{u}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)+T\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)};$$

по ровному месту:

$$\frac{t+T-a\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)}{\frac{2}{u}-\frac{1}{v}-\frac{1}{w}};$$

под гору:

$$\frac{t\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{u}\right)+T\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)+\frac{a}{u}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)}{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)}.$$

34. A — в 30 дней, B — в 45 дней, C — в 18 дней. 35. $\dfrac{3}{-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$ час, $\dfrac{3}{\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$ час, $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}+\frac{1}{d}}$ час, $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{d}}$ час.

36. 1 час 45 мин., 7 час, 3 час. 30 мин. 37. 480 *л*, 560 *л*. 38. $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$ дней, $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$ дней, $\dfrac{2abc}{ca+cb-ab}$ дней. 39. 99. 40. 16 час. 48 мин., 60 час., 40 час. 41. 1 час. 24 мин. 42. $AB=14$ *км*, $BC=16$ *км*. 43. $\dfrac{kt}{k^2-k-2}$, $k>2$. 44. $2ak$. 45. A плыл мимо B в 3 час. 20 мин. Скорость течения реки 2 *км/час*. 46. $AB=72$ *км*, $BC=120$ *км*, $v_1=30$ *км/час*, $v_2=60$ *км/час*. 47. $AB=63$ *км*, $BC=126$ *км*. Скорости: 42 *км/час* и 84 *км/час*. 48. 8. 49. $CD=2160$ *м*; A проходит это расстояние

за 8 мин. 15 сек., B — за 9 мин. 45 сек. **50.** 40 *км/час* и 60 *км/час*, $AC = 120$ *км*. **51.** $x = 45$, $y = 30$, $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$. **52.** $x = 5$, $y = 4$, $\frac{u}{v} = \frac{4}{5}$. **53.** $x = 60$, $y = 45$, $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$. **54.** $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{5}$, $t_1 = 10$, $t_2 = 11$ (считая и стоянку в B). **55.** $x_1 = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} A$, $x_2 = \frac{n^2 - 2n + 2}{(n-1)^2} A$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = A$. **56.** $(n-1)^2 a$; число лиц $n - 1$. **57.** Первый покупатель должен был получить сдачи 25—47,5x, а второй 100—83x. Пусть 25—47,5x содержит a руб. и b коп., а 100—83x содержит c руб. и d коп. Тогда $25 - 47{,}5x = a + 0{,}01b$, $c + 0{,}01d = 100 - 83x$. (1). Кассир дал первому покупателю $b + 0{,}01a$, второму $d + 0{,}01c$. По условию $a + c + 0{,}01b + 0{,}01d = b + d + 0{,}01a + 0{,}01c$ или $a + c = b + d$. Кроме того, $b - a = 65$ или $b - a = 64$. Считая $b - a = 65$, находим $b = a + 65$, $d = c - 65$. Подставляя это в (1) и исключая x после упрощения, получаем $95c - 166a = 5465$. Надо решить это уравнение в целых числах, учитывая, что a и c — целые положительные числа. Имеем:

$$a = \frac{95c - 5465}{166} = -33 + \frac{13 + 95c}{166}, \quad \frac{13 + 95c}{166} = p,$$

$$c = \frac{166p - 13}{95} = 2p + \frac{-24p - 13}{95}, \quad \frac{-24p - 13}{95} = q,$$

$$p = \frac{-95q - 13}{24} = -4q + \frac{q - 13}{24}, \quad \frac{q - 13}{24} = s,$$

$$q = 24s + 13, \quad p = -96s - 52 + s = -95s - 52,$$

$$c = -190s - 104 + 24s + 13 = -166s - 91,$$

$$a = -33 - 95s - 52 = -95s - 85.$$

Отсюда $s = -1, -2, -3, \ldots$ Полагая $s = -1$, иаходим $c = 75$, $a = 10$; значит, $b = 75$, $d = 10$. Из $100 - 83x = 75 + 0{,}1$ иаходим $x = 0{,}3$ руб $= 30$ коп. Предположеиия $s = -2, -3, \ldots$ ие дают решеиия задачи. Не дает решеиия задачи и предположеиие $b - a = 64$. **58.** 1809 *г.* **59.** 1810 *г.*

Глава VI. Уравнения и неравенства высших степеней

§ 1. Квадратный трехчлен

1. $2a$ и 2. **2.** Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то корни $\frac{1}{a-b}$ и $\frac{1}{a+b}$. Если $|a| = |b| \neq 0$, то уравнение имеет один корень $\frac{1}{2a}$. Если $|a| = |b| = 0$, то уравнение не имеет корней. **3.** Если $a \neq b$, то уравнение имеет корень $\frac{a+b}{2}$. Если $a = b$, то уравнение не имеет корней. **4.** Если $a \neq 0$, то уравнение имеет два корня: $-2a$ и $3a$. Если $a = 0$, то уравнение не имеет корней. **5.** Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, то уравнение имеет два корня: $\frac{a^2 + b^2}{2a}$, $\frac{a^2 + b^2}{2b}$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение имеет один корень $\frac{b}{2}$. Если $b = 0$, $a \neq 0$, уравнение имеет один корень $\frac{a}{2}$. Если $a = b$, то уравнение не имеет корней. **6.** a и b. **7.** Если $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, то корни

$$\frac{-(a + b + c) \pm i\sqrt{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Если $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, но $a + b + c \neq 0$ (это возможно при комплексных значениях a, b, c), то уравнение имеет лишь один корень $x = -\frac{3}{2}(a + b + c)$. Если $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 0$, то уравнение не имеет корней. **8.** Если $a + b = 0$, $ab \neq 0$, то уравнению удовлетворяет любое значение x, кроме $x = 0$. Если $a + b \neq 0$, $ab \neq 0$, то уравнение имеет два корня: $-a$ и $-b$. Если $ab = 0$, то уравнение ие имеет корней. **9.** Если $c + a - 2b \neq 0$, то уравнение имеет два корня: 1 и $\frac{b + c - 2a}{c + b - 2b}$. Если $c + a - 2b = 0$, но $b \neq c$, то уравнение имеет один корень: $x = -\frac{b + c - 2a}{a + b - 2c}$.

Если $c+a-2b=0$, $a+b-2c=0$, т. е. $a=b=c$, то уравнение становится тождеством. **10.** Если $a^2\neq b^2$, то уравнение имеет два корня: $-\frac{ab}{a+b}$ и $-\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Если $a=b$, то уравнение имеет один корень $-\frac{a}{2}$. Если $a=-b$, то уравнение не имеет корней. **11.** Если $a\neq 0$ и $a\neq -1$, то уравнение имеет два корня: $\frac{a-1}{a}$ и $-\frac{a}{a+1}$. Если $a=0$, то уравнение имеет один корень 0. Если $a=-1$, то уравнение имеет один корень 2. **12.** Если $a\neq 0$ и $a\neq -2$, то уравнение имеет два корня: $\frac{a-1}{a}$ и $-\frac{a+1}{a+2}$. Если $a=0$, то уравнение имеет один корень $-\frac{1}{2}$. Если $a=-2$, то уравнение имеет один корень $\frac{3}{2}$. **13.** Если $a\neq 1$ и $a\neq -2$, то уравнение имеет два корня: $\frac{1-a}{a+2}$ и $\frac{a+1}{1-a}$. Если $a=1$, то $x=0$. Если $a=-2$, то $x=-\frac{1}{3}$. **14.** Если $a^2\neq b^2$, то корни $a+b$ и $\frac{2ab}{a+b}$. Если $a=-b$, то $x=0$. Если $a=b$, то $x=2a$. **15.** Перенося все в левую часть и приводя к общему знаменателю, получим $\frac{(x-a)[(b+c)x+b^2+c^2]}{(x+b)(x+c)(x+b+c)}=0$. Корни числителя будут корнями данного уравнения, если они не будут корнями знаменателя. Один из корней числителя $x=a$; это число будет корнем данного уравнения, если $(a+b)(a+c)(a+b+c)\neq 0$, и не будет корнем данного уравнения, если $(a+b)(a+c)(a+b+c)=0$. Если $b+c\neq 0$, то корнем числителя будет число $x=-\frac{b^2+c^2}{b+c}$. Подставляя это значение x в знаменатель, приходим к выводу: если $b+c\neq 0$ и $bc(b-c)\neq 0$, то $x=-\frac{b^2+c^2}{b+c}$ — корень данного уравнения, а если $b+c\neq 0$, $bc(b-c)=0$, то — не корень. Пусть $b+c=0$, $b^2+c^2\neq 0$. Тогда, кроме $x=a$, числитель не имеет корней. Если же $b+c=b^2+c^2=0$, т. е. $b=c=0$, то данное уравнение удовлетворяется при всех значениях x, не равных нулю. **16.** Указание. При решении этой и многих других задач полезно знать следующие необходимые и достаточные признаки расположения числа λ относительно действительных и различных корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac>0$, a, b и c — действительные числа):

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \lambda<x_1<x_2 \ldots a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0,\ a(2a\lambda+b)<0; \\ x_1<\lambda<x_2 \ldots a(a\lambda^2+b\lambda+c)<0; \\ x_1<x_2<\lambda \ldots a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0,\ a(2a\lambda+b)>0. \end{cases}$$

Доказательство необходимости. а) Пусть $\lambda<x_1<x_2$; тогда $0<a^2(\lambda-x_1)\times(\lambda-x_2)=a\cdot a(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)=a(a\lambda^2+b\lambda+c)$ и далее из $\lambda<x_1<x_2$ следует $x_1+x_2>2\lambda$, т. е. $-\frac{b}{a}>2\lambda$, откуда (умножая обе части на a^2) $a(2a\lambda+b)<0$; б) пусть $x_1<\lambda<x_2$; тогда $0>a^2(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)=a(a\lambda^2+b\lambda+c)$, в) пусть $x_1<x_2<\lambda$; тогда $0<a^2(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)=a(a\lambda^2+b\lambda+c)$, $x_1+x_2<2\lambda$, $-\frac{b}{a}<2\lambda$, $a(2a\lambda+b)>0$. Достаточность этих признаков доказывается методом от противного. В частности, если $\lambda=0$, получаем:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} 0<x_1<x_2 \ldots ac>0,\ ab<0; \\ x_1<0<x_2 \ldots ac<0 \\ x_1<x_2<0 \ldots ac>0,\ ab>0 \end{cases}$$

(конечно, сюда еще должно быть присоединено условие $a\neq 0$, $b^2-4ac>0$). Полезно для себя записать условия (I) и (II) в случае $a=1$ (т. е. в случае, если квадратное уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$). Если $-\infty<a<-\frac{1}{2}$, то $x_1<0<x_2$. Если $a=-\frac{1}{2}$, то $x_1=-3$, $x_2=0$; если $-\frac{1}{2}<a<0$, то $x_1<x_2<0$; если $a=0$, то $x_1=x_2=-1$; если $a=4$, то $x_1=x_2=3$; если $a>4$, то $0<x_1<x_2$ (при $0<a<4$ — корни мнимые). **17.** Корни действительны, если или $a\leqslant -2$ или $a\geqslant\frac{1}{2}$. Если $a<-2$ или $\frac{1}{2}<a<\frac{6}{7}$ или $a>3$, то $0<x_1<x_2$; если $\frac{6}{7}<a<3$,

то $x_1 < 0 < x_2$. 18. Если $a < 0$, то $0 < x_1 < x_2$; если $a = 0$, то один корень $x = \frac{3}{4}$; если $0 < a < 1$, то $x_1 < 0 < x_2$; если $a = 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$; если $1 < a < \frac{4}{3}$, то $0 < x_1 < x_2$; если $a = \frac{4}{3}$, то $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ $\left(\text{при } a > \frac{4}{3} \text{ — корни мнимые}\right)$. 19. Если $a = 1$, то $x_1 = x_2 = -1$; если $1 < a < \frac{3}{2}$, то $x_1 < x_2 < 0$; если $a = \frac{3}{2}$, то $x_1 = -6$, $x_2 = 0$; если $\frac{3}{2} < a < 2$, то $x_1 < 0 < x_2$; если $a = 2$, то только один корень $x = \frac{1}{4}$; если $2 < a < 6$, то $0 < x_1 < x_2$; если $a = 6$, то $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$. Если $a < 1$ или $a > 6$, то корни мнимые. 21. $k = \frac{2}{3}$. 22. $a_1 = 1$, $a_2 = -2$. 23. $a_{1,2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $a_{3,4} = \pm \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,i$. 24. $a \geqslant 1$ или $a < -3$. 25. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. 26. $k > \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ или $k < -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, или $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < k < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. 28. $a = 1$. 30. $-\frac{16}{7} \leqslant a < -1$. 32. $1 < a < 3$. 33. 1°. $b^2 - 4ac > 0$, $a(ap^2 + bp + c) > 0$, $a(aq^2 + bq + c) > 0$, $a(2ap + b) < 0$, $a(2aq + b) < 0$; 2°. $(ap^2 + bp + c)(aq^2 + bq + c) < 0$. 34. 1°. Если $-\infty < t < 2$, то $x' < 0 < x''$. При $t = -2$ имеем лишь один корень $-\frac{1}{2}$. Если $-2 < t < -1$, то $x' < x'' < 0$; при $t = -1$ — двойной корень $x' = x'' = -1$. Если $-1 < t < 0$, то корни мнимые; при $t = 0$ — двойной корень $x' = x'' = 0$. Если $0 < t < +\infty$, то $0 < x' < x''$ 2°. Такого значения t не существует. 3°. При $t = -1$, $x' = x'' = -1$ и при $t = 0$, $x' = x'' = 0$. 4°. Точки $M'(x')$ и $M''(x'')$, если x' и x'' действительны, гармонически сопряжены с точками $O(0)$ $A(1)$; $x' + x'' + 2x'x'' = 0$, $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{-1}$ или $\frac{1}{\overline{OM'}} + \frac{1}{\overline{OM''}} = \frac{2}{\overline{OA}}$. 36. Решим следующую более общую задачу. Пусть даны два уравнения: $f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$, $\varphi(x) \equiv a'x^2 + b'x + c' = 0$. Требуется составить в форме неравенств (содержащих лишь рациональные функции от коэффициентов a, b, c, a', b', c') необходимые и достаточные условия, выражающие условие действительности корней этих уравнений и все возможные взаимные расположения корней первого уравнения относительно корней второго уравнения. Решение. Обозначим корни первого уравнения через x_1 и x_2, а корни второго — через ξ_1 и ξ_2 (мы сейчас не будем предполагать, что они действительны; в случае действительности корней первого уравнения будем считать $x_1 \leqslant x_2$, а в случае действительности корней второго $\xi_1 \leqslant \xi_2$). Подставим корни ξ_1 и ξ_2 второго уравнения в левую часть первого; получим $f(\xi_1)$ и $f(\xi_2)$. Вычислим $f(\xi_1)f(\xi_2)$ и $f(\xi_1) + f(\xi_2)$: $f(\xi_1)f(\xi_2) = (a\xi_1^2 + b\xi_1 + c) \times (a\xi_2^2 + b\xi_2 + c) = a^2(\xi_1\xi_2)^2 + ab\xi_1\xi_2 + ac(\xi_1^2 + \xi_2^2) + b^2\xi_1\xi_2 + bc(\xi_1 + \xi_2) + c^2$; но $\xi_1\xi_2 = \frac{c'}{a'}$ и $\xi_1 + \xi_2 = -\frac{b'}{a'}$; значит (после ряда преобразований) $f(\xi_1)\,f(\xi_2) = \frac{1}{a'^2}[(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')] = \frac{\Delta}{a'^2}$. Далее аналогичными преобразованиями получим $f(\xi_1) + f(\xi_2) = \frac{b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca')}{a'^2} = \frac{P}{a'^2}$. Аналогично находим $\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \frac{\Delta}{a^2}$ и $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \frac{2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')}{a^2} = \frac{Q}{a^2}$. Из полученных выражений для $f(\xi_1)f(\xi_2)$ и $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ следует, что данные уравнения имеют общий корень тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$; Δ называется результантом двух данных уравнений; его можно представить в виде

$$\Delta = \frac{1}{4}[(2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')]. \qquad (I)$$

Все, что мы имели выше, верно и в том случае, если коэффициенты a, b, c, a', b', c' — комплексные числа. Начиная с этого места, мы будем считать, что a, b, c, a', b', c' — действительные числа, причем $a \neq 0$, $a' \neq 0$, и в дальнейшем будем исследовать лишь те случаи, когда корни данных уравнений действительны.

Случай I. $\Delta \neq 0$ (т. е. данные уравнения не имеют общего корня). α) $\Delta < 0$. Из соотношения (I) следует тогда, что $(b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') > 0$, значит либо $\delta = b^2 - 4ac > 0$ и $\delta' = b'^2 - 4a'c' > 0$, либо $\delta < 0$ и $\delta' < 0$. Следовательно, если $\Delta < 0$, то оба уравнения имеют либо действительные (и различные корни), либо оба уравнения имеют мнимые корни. Пусть $\Delta < 0$, $\delta > 0$ (тогда и $\delta' > 0$). Так как $f(\xi_1) f(\xi_2) < 0$, то одно из чисел ξ_1 или ξ_2 лежит между x_1 и x_2, а другое — вне интервала (x_1, x_2), т. е. мы имеем либо

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2, \tag{1}$$

либо

$$\xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2. \tag{2}$$

В случае (1) мы будем иметь $\xi_1 + \xi_2 > x_1 + x_2$, в случае (2) $\xi_1 + \xi_2 < x_1 + x_2$; иначе, в случае (1) $-\frac{b'}{a'} > -\frac{b}{a}$, т. е. $k = aa'(ab' - ba') < 0$; в случае (2) $k > 0$.

β) $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $\delta' > 0$. Тогда корни данных уравнений действительны и все попарно различны. Так как $f(\xi_1) f(\xi_2) > 0$, то $f(\xi_1)$ и $f(\xi_2)$ одного знака и одного знака с $f(\xi_1) + f(\xi_2)$. Но знак последней суммы одинаков со знаком P. Значит если $aP < 0$, то $af(\xi_1) < 0$ и $af(\xi_2) < 0$, поэтому ξ_1 и ξ_2 лежат между x_1 и x_2:

$$x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2, \tag{3}$$

а если $aP > 0$, то $af(\xi_1) > 0$ и $af(\xi_2) > 0$ и значит возможны следующие расположения:

$$\xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2, \tag{4}$$

$$x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2, \tag{5}$$

$$\xi_1 < \xi_2 < x_1 < x_2. \tag{6}$$

Так как $\Delta > 0$, то и $\varphi(x_1)\varphi(x_2) > 0$; в случае (4) x_1 и x_2 лежат между ξ_1 и ξ_2, значит $a'\varphi(x_1) < 0$ и $a'\varphi(x_2) < 0$, а потому $a'\varphi(x_1) + a'\varphi(x_2) = a'Q < 0$. В случаях (5) и (6) $a'Q > 0$. При этом в случае (5) $x_1 + x_2 < \xi_1 + \xi_2$, т. е. $k < 0$, а в случае (6) $k > 0$. Итак:

$$\Delta < 0,\ \delta > 0\ (\delta' > 0) \begin{cases} k < 0 & x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 \quad (1) \\ k > 0 & \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Delta > 0,\ \delta > 0,\ \delta' > 0 \begin{cases} aP < 0 & x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2 \quad (3) \\ aP > 0 \begin{cases} a'Q < 0 & \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2 \quad (4) \\ a'Q > 0 \begin{cases} k < 0 & x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2 \quad (5) \\ k > 0 & \xi_1 < \xi_2 < x_1 < x_2 \quad (6) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

γ) $\Delta > 0$, причем или $\delta = 0$, или $\delta' = 0$, или $\delta' = \delta = 0$. Пусть, например, $\delta = 0$; тогда $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и вопрос сводится к определению расположения числа $-\frac{b}{2a}$ относительно действительных и различных корней уравнения $\varphi(x) = 0$ ($\delta' > 0$). Аналогично исследуется случай $\delta' = 0$ $\delta > 0$. Если, наконец, $\delta = \delta' = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, $\xi_1 = \xi_2 = -\frac{b'}{2a'}$ и дело сводится к решению неравенства $-\frac{b}{a} < -\frac{b'}{a'}$ или $-\frac{b}{a} > -\frac{b'}{a'}$.

Случай II. $\Delta = 0$, т. е. данные уравнеиия имеют общий кореиь; пусть x_0 — общий корень данных уравнений, т. е.

$$\begin{array}{l|l} ax_0^2 + bx_0 + c \equiv 0 & -a' \\ a'x_0^2 + b'x_0 + c' \equiv 0 & a \end{array}$$

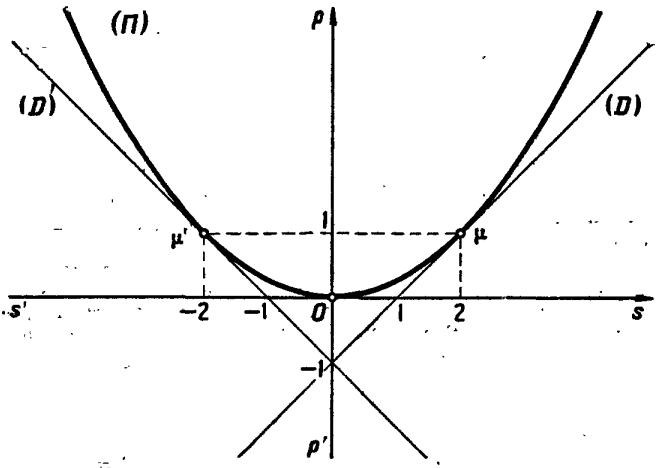
Умножая первое из тождеств на $-a'$, второе на a и складывая, получим $(ab' - ba')x_0 \equiv ca' - ac'$. Если $ab' - ba' \neq 0$, то $x_0 \equiv \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$. Отсюда следует, что если $\Delta = 0$, но $ab' - a'b \neq 0$, то данные уравнения имеют только один общий корень $x_0 = \xi_0 = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$. Второй корень x_0' уравнения $f(x) = 0$ будет $x_0' = -\frac{b}{a} - \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$, а второй корень ξ_0' уравнения $\varphi(x) = 0$ будет $\xi_0' = -\frac{b'}{a'} - \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$. Таким образом, x_0, x_0', ξ_0 и ξ_0' выражаются рационально через a, b, c, a', b', c'; значит, если a, b, c, a', b', c' — действительные числа, то корни

обоих уравнений действительны. Учитывая, что $x_0=\xi_0$, получаем, что возможны следующие восемь расположений x_0, x_0', ξ_0, ξ_0' относительно друг друга (случай $\xi_0'=x_0'$, $\xi_0=x_0$ исключается):

$$x_0'<\xi_0'<x_0=\xi_0 \quad x_0=\xi_0<x_0'<\xi_0'$$
$$\xi_0'<x_0'<x_0=\xi_0 \quad x_0=\xi_0<\xi_0'<x_0'$$
$$x_0'<\xi_0'=x_0=\xi_0 \quad x_0=\xi_0=x_0'<\xi_0'$$
$$\xi_0'<x_0'=x_0=\xi_0 \quad x_0=\xi_0=\xi_0'<x_0'.$$

Задача решена, так как x_0, x_0', ξ_0 и ξ_0' выражены рационально через a, b, c, a', b', c'. Замечание: если $\Delta=0$ и $ab'-a'b=0$, то $ac'-a'c=0$; значит, $a:b:c=a':b':c'$ и потому $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2$ (корни могут быть и комплексными). Рассмотрим теперь задачу 36 этого параграфа. Обозначая корни уравнения $x^2-x-1=0$ через x_1 и x_2: $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а корни уравнения $x^2+ax-1=0$ — через ξ_1 и ξ_2: $\xi_1=\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}$, $\xi_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$; находим ($a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $a'=1$, $b'=a$, $c'=-1$): $ac'-ca'=0$, $ab'-ba'=a+1$, $bc'-cb'=a+1$; следовательно, $\Delta=-(a+1)^2\leqslant 0$, $k=a+1$. Значит если $a<-1$, то ($\Delta<0$, $k<0$) $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2$; если $a>-1$, то ($\Delta<0$, $k>0$) $\xi_1<x_1<\xi_2<x_2$, а если $a=-1$, то $\xi_1=x_1<\xi_2=x_2$. 39. $a<-3$ или $a>0$. 40. $2<a<5$. 41. $-2<a\leqslant\frac{1}{4}$. 42. $-\frac{3}{2}<a<15-4\sqrt{17}$ и $a>15+4\sqrt{17}$. 43. При $a=-1$, $x_1=x_2=-1$; при $-1<a<-\frac{2}{3}$, $x_1<-1<x_2<1$; при $a=-\frac{2}{3}$ только один корень, равный $\frac{1}{5}$; при $-\frac{2}{3}<a<-\frac{1}{2}$, $-1<x_1<1<x_2$; при $a=-\frac{1}{2}$, $x_1=1$, $x_2=2$; при $-\frac{1}{2}<a<-\frac{23}{47}$, $1<x_1<x_2$; при $a=-\frac{23}{47}$, $x_1=x_2=\frac{7}{5}$. При остальных значениях a $\left(a<-1 \text{ и } a>-\frac{23}{47}\right)$ — корни мнимые. 44. а) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$; б) $\frac{3abc-b^3}{a^3}$; в) $\frac{b^4-4acb^2+2a^2c^2}{a^4}$; г) $\frac{-b^5+5acb^3-5a^2c^2b}{a^5}$; д) $\frac{3abc-b^3}{c^3}$. 45. а) $\frac{b^3-7abc+2a^2c}{a^3}$; б) $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$; в) $\frac{9c-3b+a}{4c+18b+81a}$; г) $\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$. 46. $a_1=-3$, $a_2=9$. 47. $a=6$ (при $a=0$ оба уравнения имеют по корню, равному нулю). 48. $a_1=0$, $a_2=-\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{2}{9}$. 49. Все действительные значения a, при которых корни действительны, таковы, что $-\frac{1}{3}<a<1$. Все мнимые: $a=\alpha\pm\sqrt{\alpha(3\alpha-2)}\,i$, где α — действительное число, или меньшее 0, или большее $\frac{2}{3}$. В последнем случае действительный корень уравнения равен 2α. 50. Рассмотрим последовательность, определенную рекуррентным соотношением $a_n-6a_{n-1}+a_{n-2}=0$. Этому соотношению удовлетворяет $a_n=x^n$, где x — корень данного уравнения ($x^n-6x^{n-1}+x^{n-2}=0$, $x^2-6x+1=0$), а также $a_n=x_1^n+x_2^n$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. При $n=1$ числа $a_1=x_1+x_2=6$ и $a_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=36-2=34$ — целые; значит, $a_3=6a_2-a_1$ будет целым, $a_4=6a_3-a_2$ тоже будет целым и т. д.; a_1 и a_2 на 5 не делятся; $a_3=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=6\cdot(36-3)=6\cdot 33$ не делится на пять. Предположим, что $a_n=x_1^n+x_2^n$ при каком-нибудь n делится на пять. Так как $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}=5a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}=5a_{n-1}+6a_{n-2}-a_{n-3}-a_{n-2}=5a_{n-1}+5a_{n-2}-a_{n-3}$, то a_{n-3} также делится на пять, a_{n-6} делится на пять и т. д., и значит, a_3, или a_2, или a_1 делится на пять — противоречие. 51. Положительный корень $\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}<r$, откуда $\sqrt{p^2+4q}<2r-p$. Отсюда $p<2r$ и далее $p^2+4q<4r^2-4rp+p^2$, $q<r(r-p)$; значит, $p<r$. Из неравенств $p<r$, $q<r(r-p)$ следует, что p может принимать значения $r-1$, $r-2$, $r-3$, ...

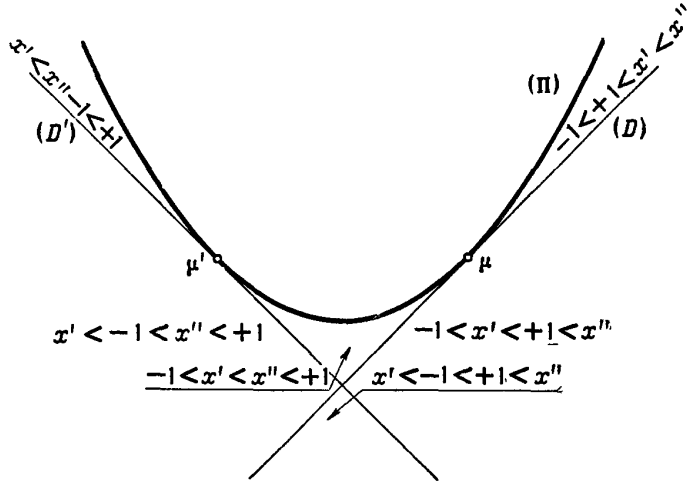
..., 3, 2, 1, а $q < r\,(r-p)$ при каждом выбранном p. Ответ: $(r-1)\left(\frac{r^2}{2}-1\right)$. **52.** Указание: $4(x^2+5x+16) = 4x^2+20x+64 = (2x+5)^2+39$. Для того чтобы это выражение разделилось на 169, во всяком случае необходимо, чтобы $(2x+5)^2$ делилось на 13, а значит и на 169; но 39 на 169 не делится. **53.** Прежде всего, по крайней мере, одно из чисел b_1, b_2, b_3 должно быть отлично от нуля. Далее: дискриминант может быть преобразован к виду $\Delta = -(a_2b_3-a_3b_2)^2-(a_3b_1-a_1b_3)^2-(a_1b_2-a_2b_1)^2$. Отсюда искомое необходимое и достаточное условие $a_2b_3-a_3b_2 = a_3b_1-a_1b_3 = a_1b_2-a_2b_1 = 0$. Пусть $b_1 \neq 0$; полагая $\frac{a_1}{b_1} = \lambda$, имеем $a_1 = \lambda b_1$, $\lambda b_2b_1 - a_2b_1 = 0$, $\lambda b_2 - a_2 = 0$, $a_2 = \lambda b_2$, а из $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$ найдем $a_3b_1 - \lambda b_1b_3 = 0$, $a_3 = \lambda b_3$. Квадратный трехчлен приводится к виду $\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)(x^2+2\lambda x+\lambda^2)$; его корень $x = -\lambda$. В случае комплексных значений a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 приведенные здесь выводы, вообще говоря, не верны. **54.** Если $a^2+c^2 \neq 0$, то при $x = -\frac{ab+cd}{a^2+c^2}$ наименьшее значение равно $\frac{(bc-ad)^2}{a^2+c^2}$. Если $a = c = 0$, то данное выражение равно b^2+d^2 при всех x. **56.** $b^2+b'^2 \neq 0$, $ab'-a'b = 0$. Все верно и в том случае, если коэффициенты комплексные. **57.** I, 1°. Геометрическое место точек таких, что уравнение $F(x) = 0$ имеет двойной корень. Уравнение $F(x) = x^2-sx+p = 0$ имеет двойной корень, если его дискриминант $\Delta = s^2-4p$ равен нулю. Точка $M(s, p)$ описывает, таким образом, параболу (П): $p = \frac{s^2}{4}$, осью симметрии которой является ось Op; Os — касательная в вершине (черт. 79). Если M лежит внутри параболы (П),



Черт. 79.

то $\Delta < 0$ и $F(x) = 0$ не имеет действительных корней; если точка M лежит вне (П), то $\Delta > 0$ и $F(x) = 0$ имеет два действительных различных корня. Геометрическое место точек M таких, что $F(x) = 0$ имеет корень $+1$. Уравнение $F(x) = 0$ имеет корень $+1$, если $F(1) = 1-s+p = 0$. Это уравнение определяет прямую (D), пересекающую ось Os в точке с абсциссой $s = 1$, а ось Op — в точке с ординатой $p = -1$. Так как уравнение $1-s+\frac{s^2}{4} = 0$ имеет двойной корень $s = 2$, то прямая (D) касается параболы $(П)$ в точке $\mu(2, 1)$. Прямая (D) делит плоскость (H) на две области: одну — содержащую начало координат, в которой $F(1) = 1-s+p > 0$, другую, в которой $F(1) < 0$. Если точка M находится в области, содержащей O, уравнение (1) или не имеет действительных корней, или имеет два корня таких, что $+1$ лежит вне интервала, ими образованного; если точка M лежит во второй области, то уравнение (1) имеет два действительных корня, таких, что $+1$ лежит между ними. Геометрическое место точек M таких, что уравнение $F(x) = 0$ имеет корень -1. Уравнение (1) имеет корень -1, если $F(-1) = 1+s+p = 0$; это геометрическое место точек M есть, следовательно, прямая (D'), пересекающая Os в точке с абсциссой $s = -1$, а прямую Op — в точке с ординатой -1. Так как

$1+s+\frac{s^2}{4}=0$ имеет двойной корень $s=-2$, то прямая (D') касается параболы (Π) в точке μ' $(-2, 1)$ (черт. 79). Прямая (D') делит плоскость (H) на две области: одну, содержащую начало координат, для которой $F(-1)=1+s+p>0$, другую, для которой $F(-1)<0$. Если M находится в области, содержащей O, уравнение (1) или вовсе не имеет действительных корней, либо имеет два корня таких, что -1 лежит вне интервала, образованного ими. Если M находится в другой области, то уравнение (1) имеет два корня таких, что -1 лежит между ними. Исследование числа корней уравнения (1), заключенных между -1 и $+1$. Предыдущее исследование позволяет найти в зависимости от положения точки M в плоскости (H) расположение чисел -1 и $+1$ по отношению к корням уравнения $F(x)=0$. На черт. 80 суммированы результаты предыдущего исследования*.

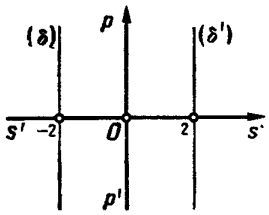


Черт. 80.

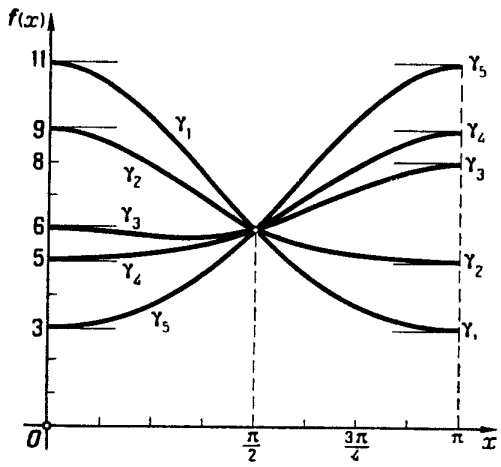
Мы видим, что уравнение (1) имеет два корня, заключенные между -1 и $+1$, если M расположена в области, ограниченной дугой $\mu\mu'$ параболы (Π) и прямыми (D) и (D'). Уравнение (1) имеет только один корень, заключенный между -1 и $+1$, если M лежит в одном из двух углов, образованных прямыми (D) и (D'), именно тех, которые не содержат точек параболы и не являются углами, вертикальными к углу, в котором расположена парабола. В оставшейся части плоскости нет корней между -1 и $+1$. 2°. Геометрическое место точек M таких, что уравнение (1) имеет корень a. Уравнение (1) имеет корень a, если $F(a)=a^2-as+p=0$ — это прямая (Δ), пересекающая ось Os в точке с абсциссой a, а ось Op — в точке с ординатой $-a^2$. Так как уравнение $a^2-as+\frac{s^2}{4}=0$ имеет двойной корень $s=2a$, то прямая (Δ) касается параболы (Π) в точке $A(2a, a^2)$; эта точка A и соответствует трехчлену $(x-a)^2$. Точка $T(a, 0)$, в которой прямая (Δ) пересекает ось Os, соответствует трехчлену $x(x-a)$. Огибающая AT — парабола (Π). 3° Построение A и B (исходя из P). Пусть P — точка, соответствующая трехчлену $(x-a)(x-b)$. Так как этот трехчлен имеет корень $x=a$, то точка P лежит на касательной к параболе (Π) в точке A и аналогично — на касательной к параболе (Π) в точке B. Следовательно, точки A и B суть точки прикосновения касательных к параболе (Π), проведенных из точки P. Геометрическое место точек M, соответствующих трехчлену $(x-c)(x-d)$ при условии, что (a, b, c, d) — гармоническая четверка. Пусть на оси координат четыре точки с абсциссами a, b, c, d образуют гармоническую четверку; тогда (и только тогда) $(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$. Если мы положим $c+d=s$, $cd=p$, то получим $(a+b)s=2(p+ab)$. Точка $M(s, p)$ принадлежит, следовательно, прямой плоскости (H), имеющей это уравнение; это уравнение удовлетворяется, если $c=d=a$ (и если $c=d=b$); значит, эта прямая есть прямая AB. Обратно: если мы возьмем на прямой AB точку, внешнюю по отношению к параболе (Π), то $s^2-4p>0$; значит, существует два действительных числа c и d таких,

* Отметим еще, что для области I, $s=x'+x''<-2$, для области II, $-2<x'+x''<2$ и для области III, $x'+x''>2$; отсюда и из предыдущего следуют неравенства, отмеченные на черт. 80.

что $c+d=s$ и $cd=p$; числа c и d удовлетворяют условию гармонической сопряженности. Таким образом, геометрическое место точек M есть *часть* прямой AB, лежащая вне параболы (H). II. Возьмем в плоскости (H) две точки с координатами $s=11$, $p=22$ и $s=7$, $p=10$. Соответствующие трехчлены: $x^2-11x+22$, $x^2-7x+10$; отсюда $y=\dfrac{x^2-11x+22}{x^2-7x+10}$, или $y=1-\dfrac{4x-12}{x^2-7x+10}=1-\dfrac{N}{D}$, где $N=4x-12$, $D=x^2-7x+10$. Дробь $\dfrac{N}{D}$ будет целым числом, если N делится на D. Исключая x из этих двух равенств, получим $16D=N(N-4)-32$. Если N делится на D, то 32 также делится на D и, значит, D имеет вид $\pm 2^k$, где $0\leqslant k\leqslant 5$. Остается найти, какие из уравнений $x^2-7x+10\pm 2^k=0$ имеют целые корни. Дискриминант этого уравнения равен $49-4(10\pm 2^k)=9\mp 2^{k+2}$, и корни могут быть целыми только в том случае, если $9\mp 2^{k+2}$ $(0\leqslant k\leqslant 5)$ — точный квадрат. Для числа $9+2^{k+2}$ имеется (при условии $0\leqslant k\leqslant 5$) только одно такое значение $k=2$, а для числа $9-2^{k+2}$ только 1. Соответствующие уравнения $x^2-7x+6=0$, $x^2-7x+12=0$; корни первого $x=1$, $x=6$, корни второго $x=3$, $x=4$. Итак, целые значения x, при которых дробь y принимает целые значения таковы: 1, 3, 4, 6. III. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos^2 x-s\cos x+p$ на сегменте $[0, \pi]$. Имеем: $f(0)=1-s+p$, $f(\pi)=1+s+p$. 1°. Ответ: если $|s|\geqslant 2$, то функция $f(x)$ монотонная; при $s\leqslant -2$ функция убывающая, при $s\geqslant 2$ функция $f(x)$ возрастающая; если $|s|<2$, то функция $f(x)$ убывает на сегменте $\left[0,\ \arccos\dfrac{s}{2}\right]$ и возрастает на сегменте $\left[\arccos\dfrac{s}{2},\ \pi\right]$. Разделим плоскость (H) на три области прямыми $\delta\,(s=-2)$ и $\delta'\,(s=2)$. Если точка M находится слева от (δ) или на (δ), то функция $f(x)$ убывающая; если точка M находится между (δ) и (δ'), функция $f(x)$ сначала убывает, затем возрастает; наконец, если точка M находится на прямой (δ') или справа от (δ'), функция $f(x)$ возрастает (черт. 81). 2°. Пять частных случаев. а) Если $s=-4$, $p=6$, функция убывает: когда x возрастает от 0 до π, она убывает от 11 до 3, причем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=6$, б) если $s=-2$, $p=6$, то функция $f(x)$ убывает; при измерении x от 0 до π она убывает от 9 до 5, причем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=6$, в) если $s=1$, $p=6$, функция $f(x)$ на сегменте $\left[0,\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ убывает от 6 до $\dfrac{23}{4}$, а на сегменте $\left[\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right]$ возрастает от $\dfrac{23}{4}$ до 8, при этом $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=6$, г) если $s=2$, $p=6$, функция $f(x)$ возрастает. При изменении x от 0 до π она возрастает от 5 до 9, причем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=6$, д) если $s=4$, $p=6$, то функция $f(x)$ возрастает; при изменении x от 0 до π она возрастает от 3 до 11, причем $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=6$. Графики. Заметим, что точки 0 и π суть точки максимума или минимума функции $f(x)$. Заметим еще, что линии, соответствующие значениям s, равным по абсолютной величине, но противоположным по знаку, симметричны относительно прямой $x=\dfrac{\pi}{2}$. Эти различные замечания позволяют составить представление о графиках γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 функций (черт. 82). 3°. Вы-

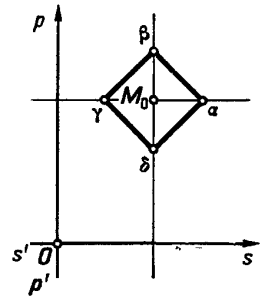


Черт. 81.

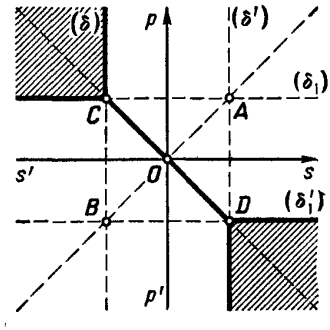


Черт. 82.

числение $D(M_0M)$. Пусть M_0 и M — точки плоскости (H), соответствующие функциям $f_0(x) = \cos^2 x - s_0 \cos x + p_0$ и $f(x) = \cos^2 x - s\cos x + p$; имеем $f(x) - f(x_0) = (s_0 - s)\cos x + p - p_0$; следовательно, $D(M_0M) = \max|(s_0 - s)\cos x + p - p_0|$. Функция вида $\varphi(x) = \alpha\cos x + \beta$ изменяется между $\beta - \alpha$ и $\beta + \alpha$. Следовательно, максимум $|\varphi(x)|$ равен $|\alpha + \beta|$, если α и β одного знака, и $|\alpha - \beta|$, если α и β разных знаков. Во всех случаях этот максимум равен $|\alpha| + |\beta|$. Мы имеем, следовательно, $D(M_0M) = |s - s_0| + |p - p_0|$. Выражение $D(M_0M)$ поэтому обладает следующими свойствами, аналогичными расстоянию между двумя точками: а) $D(M_0M) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только в том случае, когда точки M_0 и M совпадают; б) $D(M_0M) = D(MM_0)$ (симметрия); в) $D(M_1M_2) \leqslant D(M_1M_3) + D(M_3M_2)$; это последнее «неравенство треугольника» получается при почленном сложении неравенств: $|s_1 - s_2| \leqslant |s_1 - s_3| + |s_2 - s_3|$, $|p_1 - p_2| \leqslant |p_1 - p_3| + |p_2 - p_3|$. 4°. Геометрическое место точек M таких, что $D(M_0M)$ постоянно, где M_0 — фиксированная точка. Заметим, что изменение $s_0 - s$ и $p_0 - p$ на $s - s_0$ и $p - p_0$ (одновременно или нет) оставляет $D(M_0M)$ без изменения; значит, искомое геометрическое место имеет в качестве осей симметрии прямые, параллельные осям Op и Os и проходящие через точку M_0. Значит, достаточно изучить геометрическое место точек M при условии $s \geqslant s_0$, $p \geqslant p_0$. Необходимое и достаточное условие того, что $D(M_0M) = c$ (= const) имеет вид $s - s_0 + p - p_0 = c$ или $s + p = c + s_0 + p_0$. Эта часть геометрического места есть, следовательно, отрезок $\alpha\beta$ прямой $s + p = c + s_0 + p_0$, ограниченный прямыми, проведенными через точку M_0 параллельно осям. В силу установленной выше симметрии геометрическое место точек M есть квадрат $\alpha\beta\gamma\delta$ с центром M_0, имеющий своими диагоналями



Черт. 83.



Черт. 84.

прямые, параллельные осям Op и Os (черт. 83). 4°. Геометрическое место точек M таких, что $D(MA) = D(MB)$. Пусть A — точка с координатами $s = p = 2$, а B — точка с координатами $s = p = -2$. Имеем: $D(MA) = |s - 2| + |p - 2|$, $D(MB) = |s + 2| + |p + 2|$. Отсюда

$$|s - 2| + |p - 2| = |s + 2| + |p + 2|. \qquad (1)$$

Это геометрическое место имеет две оси симметрии: AB и медиатрису AB; эти две прямые делят плоскость на четыре квадранта, и мы можем ограничить себя отысканием точек этого геометрического места в одном из квадрантов, например в том, который содержит положительную полуось Op. Проведем прямые (δ) и (δ'), уравнения которых $s = -2$ и $s = 2$, и прямые (δ_1) и (δ_1'), уравнения которых $p = 2$ и $p = -2$. Эти прямые делят рассматриваемый квадрант на четыре части, которые мы последовательно рассмотрим. Рассмотрим область, ограниченную частью прямой (δ') и продолжением BA за точку A. В этой области, включая границы, имеем $p \geqslant 2$, $s \geqslant 2$. Значит, из (1) $s - 2 + p - 2 = s + 2 + p + 2$ условие не выполняется. Возьмем область, ограниченную прямыми (δ), (δ') и расположенную над отрезком AC прямой (δ_1). В этой области, включая границы, мы имеем $-2 \leqslant s < 2$, $p \geqslant 2$; значит, из (1): $2 - s + p - 2 = s + 2 + p + 2$, откуда $s = -2$; точка M находится на луче прямой (δ), имеющем положительное направление оси Op, включая точку C. Возьмем область, заключенную между (δ) и продолжением OC за точку C. В этой области, включая границы, будем иметь $p \geqslant -s \geqslant 2$. Условие (1) принимает вид $2 - s + p - 2 = -2 - s + p + 2$, т. е. удовлетворяется всякой точкой этой области. Наконец, рассмотрим область, заключенную внутри треугольника OCA. В этой области, включая границу, мы имеем: $-2 \leqslant s \leqslant p < 2$ и $-2 \leqslant -s \leqslant p \leqslant 2$. Условие (1) принимает вид $2 - s + 2 - p = s + 2 + p + 2$, или $s + p = 0$; точка M, следовательно, описывает отрезок OC медиатрисы отрезка AB. На основании

указанной выше симметрии искомого геометрического места относительно медиатрисы этого отрезка заключаем, что геометрическое место точек M таких, что $D(MA) = D(MB)$ состоит из отрезка CD и областей (вместе с их границами), заштрихованных на черт. 84.

§ 2. Корни целой рациональной функции от одного аргумента

2. -2, 3. **3.** $-3, \frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$. **5.** Рациональных корней нет. **6.** 1 — двукратный корень; -3 — двукратный корень. **7.** 3, -1 — четырехкратный корень. **8.** $f(x)-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)p(x)$; если x — целое число, отличное от x_1, x_2, x_3, x_4, то все множители правой части — целые числа. Множители $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$, $x-x_4$ попарно различны, два из них могут быть равны ± 1, два других отличны от ± 1; значит, правая часть при целом x не может быть равна -2. **9.** ± 1, $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i\sqrt{3})$. **10.** $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}\pm\right.$ $\left.\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\,i\right)$. **13.** 1, $-\frac{2}{3}$, -2, $-\frac{1}{3}$. **14.** $\pm(a+b)$, $\pm(a-b)$. **15.** $\pm a$, $\pm\sqrt{ab}$. **16.** Указание. Надо исследовать дискриминант уравнения $0=-(a-2)(a+3)$ совместно с выражениями $x_1^2+x_2^2=\frac{4}{a-1}$, $x_1^2-x_2^2=\frac{a+2}{a-1}$ (при $a\neq 1$). Ответ: если $a\neq 1$, то уравнение имеет четыре корня:

$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{a-1}\pm\sqrt{\frac{4}{(a-1)^2}-\frac{a+2}{a-1}}}=\pm\sqrt{\frac{2}{a-1}\pm\sqrt{\frac{6-a-a^2}{(a-1)^2}}}. \quad (1)$$

а) Если $a<-2$, то все корни мнимые, б) если $a=-2$, то $x_1=x_2=0$, $x_{3,4}=\pm\frac{2i}{\sqrt{3}}$, в) если $-2<a<1$, то два корня действительные: $x_{1,2}=$ $=\pm\sqrt{\frac{2}{a-1}+\sqrt{\frac{6-a-a^2}{(a-1)^2}}}$ и два мнимые: $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{a-1}-\sqrt{\frac{6-a-a^2}{(a-1)^2}}}$, г) если $a=1$, то два корня $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) если $1<a<2$, то все четыре корня (1) действительные; е) если $a=2$, то $x_1=x_2=\sqrt{2}$, $x_3=x_4=-\sqrt{2}$; ж) если $a>2$, то все четыре корня (1) мнимые. **17.** Если $a\neq 3$, то уравнение имеет четыре корня $x=\pm\sqrt{\frac{3a-4}{a-3}\pm\sqrt{\left(\frac{3a-4}{a-3}\right)^2-\frac{7a-6}{a-3}}}$; а) если $a<-2$, то все четыре корня уравнения действительны; б) если $a=-2$, то два двойных корня: $x_1=x_2=\sqrt{2}$, $x_3=x_4=-\sqrt{2}$; в) если $-2<a<\frac{1}{2}$, то все четыре корня мнимые; г) если $a=\frac{1}{2}$, то $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=-1$; д) если $\frac{1}{2}<a<\frac{6}{7}$, то все корни действительны; е) если $a=\frac{6}{7}$, то $x_1=x_2=0$, $x_{3,4}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; ж) если $\frac{6}{7}<a<3$, то два корня действительны: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3a-4}{a-3}+\sqrt{\left(\frac{3a-4}{a-3}\right)^2-\frac{7a-6}{a-3}}}$, и два мнимых: $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{3a-4}{a-3}-\sqrt{\left(\frac{3a-4}{a-3}\right)^2-\frac{7a-6}{a-3}}}$. 3) Если $a>3$, то все четыре корня действительны. **18.** $-\frac{4}{5}<a<0$. Указание. Установить сначала, при каких значениях a уравнение будет иметь четыре действительных корня. Левая часть будет равна

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4). \quad (1)$$

Среди корней биквадратного уравнения, если все они действительны и отличны от 0, два положительных и два отрицательных. Из (1) следует, что если корень $x_1<-2$, то (для действительности корней необходимо выполнение условия $a<0$) $f(-2)>0$, а так как $x_1<-2<-1<x_2<x_3<x_4$, то и $f(-1)>0$. Это дает $a>-\frac{4}{5}$; так как $a<0$, то $-\frac{4}{5}<a<0$. При этих значе-

ниях a корни действительны. **19.** а) $p^2-4q\geqslant 0$, $p\leqslant 0$, $q\geqslant 0$; б) $p^2-4q<0$, или $p^2-4q\geqslant 0$, $p>0$, $q>0$; в) $p^2-4q\geqslant 0$, $q\leqslant 0$; г) $p^2-4q\geqslant 0$, $p>0$, $q>0$. **21.** а) $p^2-4q\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p\leqslant 0$, $2a^2+p>0$, $a^4+pa^2+q>0$; б) $p^2-4q\geqslant 0$, $q>0$, $2a^2+p<0$, $a^4+pa^2+q>0$; в) $p^2-4q\geqslant 0$, $p<0$, $q\geqslant 0$, $a^4+pa^2+q<0$. **22.** -2ε, $\sqrt[3]{3}\varepsilon$, где $\varepsilon=1$ или $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **23.** ± 2, $\pm 2i$, $\frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$. **24.** -2, $-\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1. **25.** 1 (двойной корень), $\pm i$, $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. **26.** $-4\pm\sqrt{-3\pm\sqrt{10}}$. **27.** $\frac{-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$, $\frac{1\pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}$. **28.** Подстановкой $x=\frac{1}{z}$ приводим уравнение к предыдущему. **29.** 3, 1, $2\pm 5i$. **30.** 4, 2, $3\pm i\sqrt{19}$. **31.** 1 (двойной корень), $-1\pm 2i$. **32.** -1, 12, $\frac{1}{2}(11\pm i\sqrt{159})$. **33.** $\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1\pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}\right)$, $\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$. **34.** $-1\pm\sqrt{7}$, $4\pm 2i\sqrt{2}$. Указание. $x^2(x-3)^2-16(x-3)^2+9x^2=x^2(x^2-6x+18)-16(x-3)^2=x^4-6x^2(x-3)-16(x-3)^2$. **35.** $x^4-12x+323=x^4-12x+18^2-1=x^4-36x^2+36x^2-12x+18^2-1$. Ответ: $-3\pm i\sqrt{10}$, $3\pm 2i\sqrt{2}$. **36.** $-\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{21}$, $-\frac{5}{6}\pm\frac{1}{3}\sqrt{5}i$. **37.** $-2a$ (двойной корень), $-2a\pm a\sqrt{5+\sqrt{15}i}$, $-2a\pm a\sqrt{5-\sqrt{15}i}$. **38.** Если $a\neq 0$, то три корня: -1, $\frac{-3a-1\pm\sqrt{4a^3+9a^2+6a+1}}{2a^3}$. Если $a=0$, то два корня: ± 1. **39.** 2, 3, $\frac{5\pm i\sqrt{3}}{2}$. **40.** $-m$, $\frac{m\pm\sqrt{m^2-4}}{2}$. **41.** a, b, $\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{2}i\sqrt{3}$. **42.** $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4})$. **43.** 1. (двойной корень); $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **44.** 2, 1, $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. **45.** a, b, $\frac{a+b}{2}$. **46.** 3, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$. **47.** a, b, $\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{14}(a-b)i\sqrt{7}$ (если $a\neq b$). **48.** a, b, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{6}i\sqrt{3}$. **49.** Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, то корни $\pm\sqrt{ab}$, $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{a}$. Если $a=0$, $b\neq 0$ или $a\neq 0$, $b=0$, то один корень $x=0$. Если $a=b=0$, то любое число x является корнем. **50.** $a+\frac{1}{a}$, $\frac{1}{2}\left[-\left(a+\frac{1}{a}\right)\pm\sqrt{12-3\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}\right]$. **51.** b, $\frac{b\pm\sqrt{b^2+8}}{2}$. **52.** Решение. Будем следовать методу, которым решается любое кубическое уравнение вида $x^3+px+q=0$. Числа a и b, входящие в данное уравнение, могут быть и комплексными. Положим $x=u+v$, тогда $x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$. Подставляя в данное уравнение, получим

$$u^3+v^3+3uv(u+v)-\frac{3}{ab}(u+v)+\frac{a+b}{a^2b^2}=0.$$

Выберем u и v так, чтобы коэффициент при $u+v$ обратился в нуль: $uv=\frac{1}{ab}$. Тогда $u^3+v^3=-\frac{a+b}{a^2b^2}$, $u^3v^3=\frac{1}{a^3b^3}$; u^3, v^3 — корни уравнения $z^2+\frac{a+b}{a^2b^2}z+\frac{1}{a^3b^3}=0$. Решая это уравнение, получим $z_1=-\frac{1}{a^2b}$, $z_2=-\frac{1}{ab^2}$; значит, $u=-\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}\varepsilon$, $v=\frac{1}{abu}=-\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{ab\varepsilon}=-\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{ab}\varepsilon^2$, где ε — любое из трех значений $\sqrt[3]{1}$, т. е. 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Окончательно: $x_{1,2,3}=-\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}\varepsilon-\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{ab}\varepsilon^2$, где ε имеет значения 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, а значение радикала $\sqrt[3]{a^2b}$ берется любое, но

одно и то же в обоих слагаемых. **53.** $9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=$ $=-4\left(x^2+\frac{x}{3}\right)$, $9\left(x^2+\frac{x}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(x^2+\frac{x}{3}-\frac{2}{9}\right)=-4\left(x^2+\frac{x}{3}\right)$ и т. д. Ответ: -1, $\frac{2}{3}$, $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{6}$. **54.** $-\sqrt[3]{c\varepsilon}$, $\sqrt[3]{b\varepsilon}$, где ε принимает значения, равные 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **55.** $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $\frac{-7+2i\sqrt{2}}{8}$. **56.** $\left(\frac{a^2+x^2+2ax}{ax}\right)^4+\left(\frac{a^2+x^2}{ax}\right)^4=1$. Полагая

$$\frac{a^2+x^2}{ax}=z-1, \tag{1}$$

получим $(z+1)^4+(z-1)^4=1$, откуда

$$z_{1,2,3,4}=\varepsilon_2\sqrt{\frac{-6+\varepsilon_1\sqrt{64}}{2}}, \tag{2}$$

где ε_1 и ε_2 принимают значения $+1$ и -1. Из (1) $x=\frac{a}{2}\left(z-1\pm\sqrt{(z+1)(z-3)}\right)$, где z имеет одно из четырех значений (2). **57.** Указание. $(x^2+3x+2)\times$ $\times(x^2-9x+20)=(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)$; далее положить $x^2-3x=z$. Одно из значений z будет $z=5$. Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$. **58.** $(1+\sqrt{3})\left(1\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$, $(1-\sqrt{3})\times$ $\times\left(1\pm i\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$. **59.** При $p>0$ фуикция x^3+px+q возрастающая. **60.** Рассмотреть дискримииаит p^2-4q. **61.** $x^4-49x^3+2x^2+1=0$; имеет. Указаиие. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — кории даиного уравиеиия, тогда $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=$ $=x^4-7x^3+1$; зиачит, $(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=x^4+7x^3+1$; остается эти равеиства почлеио перемножить. **62.** $x^5+2x^4+5x^3+3x^2-2x-9=0$; миимые корни имеются. **63.** Первый способ. Зная $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2=p$, $x_1x_2x_3=-q$, легко вычислить $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, $x_2^3x_3^3+$ $+x_3^3x_1^3+x_1^3x_2^3$, $x_1^3x_2^3x_3^3$. Второй способ. Искомое уравнение можно записать в виде $\left(u^3-x_1^3\right)\left(u^3-x_2^3\right)\left(u^3-x_3^3\right)=0$ (где $u^3=x$) или, полагая $f(x)=x^3+px+q$, в виде $f(u)f(\varepsilon u)f(\varepsilon^2u)=0$ $\left(\text{где }\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, или $(u^3+pu+q)(u^3+\varepsilon pu+q)(u^3+$ $+\varepsilon^2pu+q)=0$, или, выполняя умножение $(u^3+q)^3+(pu^3)=0$, $x^3+3qx^2+(3q^2+$ $+p^3)x+q^3=0$. **64.** В решеиии задачи № 10, гл. I, § 3 «симметрические много-члены» была выведена первая формула Ньютона $s_k-s_{k-1}p_1+s_{k-2}p_2-\ \ldots\ +$ $+(-1)^{k-1}s_1p_{k-1}+k(-1)^kp_k=0$, где $k=1,2,3,\ldots,n-1$, а p_1, p_2, p_3 $\ldots$, p_{n-1} — осиовные симметрические функции переменных x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n, т. е.

$$p_1=x_1+x_2+x_3+\ \ldots\ +x_n,$$

$$p_2=x_1x_2+x_1x_3+\ \ldots\ +x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ \ldots\ +x_2x_n+\ \ldots\ +x_{n-1}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а s_1, s_2, $\ldots$, s_{n-1} — сумма одинаковых степеней переменных x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n:

$$s_1=x_1+x_2+x_3+\ \ldots\ +x_n,$$

$$s_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ \ldots\ +x_n^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{n-1}=x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+x_3^{n-1}+\ \ldots\ +x_n^{n-1}.$$

Для вычисления s_n, s_{n+1}, $\ldots$ выведем вторую формулу Ньютона. Пусть $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}-\ \ldots\ +(-1)^np_n$. Тогда

$$f(x_i)=x_i^n-p_1x_i^{n-1}+p_2x_i^{n-2}-\ \ldots\ +(-1)^np_n=0,\ i=1,2,3,\ldots,n.$$

Отсюда

$$x_i^k f(x_i) = x_i^{n+k} - p_1 x_i^{n+k-1} + p_2 x_i^{n+k-2} - \ldots + (-1)^n p_n x_i^k = 0.$$

Полагая здесь $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ и складывая почленно получеиные равенства, будем иметь $s_{n+k} - p_1 s_{n+k-1} + p_2 s_{n+k-2} - \ldots + (-1)^n p_n s_n = 0$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Это — *вторая* формула Ньютоиа, которая позволяет вычислить $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ после того, как по первой формуле Ньютоиа $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}$ выражеиы через осиовные симметрические функции. Идея решеиия задачи 64 заключается в том, что сиачала вычисляются суммы $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, 1-ых, 2-ых, ..., 6-ых степеией выражеиий $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_4$, $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$, $x_3 + x_4$ через суммы $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ степеней основиых перемеииых x_1, x_2, x_3, x_4. По формулам Ньютоиа последние можио вычислить, а зная $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, можио вычислить осиовиые симметрические функции выражений $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, ... Рассмотрим равеиство $(x + x_i)^k = x^k + C_k^1 x^{k-1} x_i + C_k^2 x^{k-2} x_i^2 + \ldots + x_i^k$. Полагая здесь $i = 1, 2, 3, 4$ и складывая, будем иметь $(x + x_1)^k + (x + x_2)^k + (x + x_3)^k + (x + x_4)^k = 4x^k + C_k^1 x^{k-1} s_1 + C_k^2 x^{k-2} s_2 + \ldots + s_k$. Полагая в этом равеистве $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x = x_4$ и складывая полученные равенства, будем иметь

$$2^k s_k + 2S_k = 4s_k + C_k^1 s_1 s_{k-1} + C_k^2 s_2 s_{k-2} + \ldots + C_k^1 s_{k-1} s_1 + 4s_k,$$

откуда

$$S_k = \frac{1}{2}\left(s_0 s_k + C_k^1 s_1 s_{k-1} + C_k^2 s_2 s_{k-2} + \ldots + C_k^1 s_{k-1} s_1 + s_k s_0\right) - 2^{k-1} s_k,$$

где для симметрии мы положили $s_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 = 4$. Теперь иаходим (сначала иепосредственно)

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_1 + x_3 + x_1 + x_4 + x_2 + x_3 + x_2 + x_4 + x_3 + x_4 = 3s_1,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(s_0 s_2 + 2s_1^2 + s_2 s_0\right) - 2s_2 = 2s_2 + s_1^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\left(s_0 s_3 + 3s_1 s_2 + 3s_2 s_1 + s_3 s_0\right) - 4s_3 = 3s_1 s_2,$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\left(s_0 s_4 + 4s_1 s_3 + 6s_2^2 + 4s_3 s_1 + s_4 s_0\right) - 8s_4 = 4s_1 s_3 + 3s_2^2 - 4s_4,$$

$$S_5 = \frac{1}{2}\left(s_0 s_5 + 5s_1 s_4 + 10 s_2 s_3 + 10 s_3 s_2 + 5 s_4 s_1 + s_5 s_0\right) - 16 s_5 = 5 s_1 s_4 + 10 s_2 s_3 - 12 s_5,$$

$$S_6 = \frac{1}{2}\left(s_0 s_6 + 6 s_1 s_5 + 15 s_2 s_4 + 20 s_3^2 + 15 s_4 s_2 + 6 s_5 s_1 + s_6 s_0\right) - 32 s_6 =$$

$$= 6 s_1 s_5 + 15 s_2 s_4 + 10 s_3^2 - 28 s_6.$$

Теперь находим $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Из данного уравнеиия $x^4 + x^3 - 1 = 0$ находим: $p_1 = -1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = -1$. Примеияя первую формулу Ньютона (см. решение задачи 10, гл. 1, § 3), получим:

$$S_1 = p_1 = -1,$$

$$S_2 = p_1^2 - 2p_2^2 = 1,$$

$$S_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3 = -1,$$

а теперь, применяя вторую формулу Ньютона, находим:

$$s_4 - p_1 s_3 + p_2 s_2 - p_3 s_1 + p_4 s_0 = 0 \quad (s_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 = 4),$$

$$s_4 - 1 - 4 = 0, \quad s_4 = 5,$$

$$s_5 - p_1 s_4 + p_2 s_3 - p_3 s_2 + p_4 s_1 = 0,$$

$$s_5 + 5 + 1 = 0, \quad s_5 = -6,$$

$$s_6 - p_1 s_5 + p_2 s_4 - p_3 s_3 + p_4 s_2 = 0,$$

$$s_6 - 6 - 1 = 0, \quad s_6 = 7.$$

Значит,

$$S_1 = -3,$$
$$S_2 = 2s_2 + s_1^2 = 2 + 1 = 3,$$
$$S_3 = 3s_1s_2 = -3,$$
$$S_4 = 4s_1s_3 + 3s_2^2 - 4s_4 = 4 + 3 - 20 = -13,$$
$$S_5 = 5s_1s_4 + 10s_2s_3 - 12s_5 = -25 - 10 + 72 = 37,$$
$$S_6 = 6s_1s_5 + 15s_2s_4 + 10s_3^2 - 28s_6 = 36 + 75 + 10 - 196 = -75.$$

Теперь по первой формуле Ньютона находим основные симметрические функции от аргументов $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, ...:

$$P_1 = S_1 = -3, \quad S_2 - S_1P_1 + 2P_2 = 0,$$
$$3 - 9 + 2P_2 = 0, \quad P_2 = 3;$$
$$S_3 - S_2P_1 + S_1P_2 - 3P_3 = 0,$$
$$-3 + 9 - 9 - 3P_3 = 0, \quad P_3 = -1;$$
$$S_4 - S_3P_1 + S_2P_2 - S_1P_3 + 4P_4 = 0,$$
$$-13 - 9 + 9 - 3 + 4P_4 = 0, \quad P_4 = 4,$$
$$S_5 - S_4P_1 + S_3P_2 - S_2P_3 + S_1P_4 - 5P_5 = 0,$$
$$37 - 39 - 9 + 3 - 12 - 5P_5 = 0, \quad P_5 = -4.$$

А теперь по второй формуле Ньютона $S_6 - S_5P_1 + S_4P_2 - S_3P_3 + S_2P_4 - S_1P_5 + 6P_6 = 0$ находим $-75 + 111 - 39 - 3 + 12 - 12 + 6P_6 = 0$, $P_6 = 1$. Искомое уравнение: $x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$. **65.** $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. **66.** $25x^3 + 37x^2 + 18x + 3 = 0$. Указание. Воспользоваться формулами Виета. **67.** Указание. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. **68.** $q \neq 0$, $256p^5 - 3125q = 0$. **69.** При $\lambda = 11$ — двойной кореиь $x = 1$, при $\lambda = -5$ тройной кореиь $x = -1$. **70.** $a = -\frac{15}{2}\varepsilon$, $b = -6\varepsilon$, $c = \frac{5}{2}$, где ε равио или 1, или $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. **72.** Кории 1, 2, 3. **73.** $(p - q)^2 + q = 0$. Третий кореиь равеи $\alpha\beta$. **74.** Общий кореиь $-\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$. Два других кория первого уравиеиия: $\frac{1}{2(p_1 - p_2)}(q_1 - q_2 \pm \sqrt{-3(q_1 - q_2)^2 - 4p_1(p_1 - p_2)^2})$. Два других корня второго уравнеиия: $\frac{1}{2(p_1 - p_2)}(q_1 - q_2 \pm \sqrt{-3(q_1 - q_2)^2 - 4p_2(p_1 - p_2)^2})$. **75.** $p_1 = -12$; $q_1 = -2$; $p_2 = -7$; $q_2 = -1$. **76.**

$$x = \sqrt[n]{\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 1}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right],$$

$$x = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{n}\right],$$

$$x = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{n}\right],$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

77. $x = a\dfrac{\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}{1 + \sqrt[n]{4} - 2\sqrt[n]{2}\cos\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. **78.** а) $-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. **79.** $\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. **80.** Если $\sin\varphi \neq 0$, то уравне-

ние имеет n корней: $\operatorname{tg}\frac{\varphi+2k\pi}{2n}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$; если $\cos\varphi=-1$ и n нечетное, то уравнение имеет $n-1$ корней $\left(\text{исключается значение } k=\frac{n-1}{2}\right)$; если $\cos\varphi=1$ и n — четное, то уравнение также имеет $n-1$ корней $\left(\text{исключается } k=\frac{n}{2}\right)$. **81.** Корни: 1, 2, 3, ..., n. Указание. Последовательно сложить дроби. **82.** Уравнение можно переписать в виде

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)[1+(\cos\alpha+i\sin\alpha)x]^n+(\cos\varphi-i\sin\varphi)[1+(\cos\alpha-i\sin\alpha)x]^n=0.$$

Ответ:

$$x_k=-\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi-2n\alpha}{2n}},\quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Если $\alpha\neq\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, то уравнение имеет n корней, указанных предыдущей формулой. Если же при некотором целом $k\geqslant 0$ имеет место равенство $\alpha=\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}$, то из указанных значений x_k следует исключить x_k с индексом, равным остатку от деления числа k на число n; если $k<0$, то сначала к нему надо добавить n столько раз, чтобы сумма была больше или равна нулю; первая такая сумма дает индекс для x_k, который должен быть исключен из указанной совокупности корней; уравнение в последнем случае $\left(\text{т. е. в случае наличия равенства } \alpha=\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}\right)$ будет иметь $n-1$ корней.

§ 3. Рациональные уравнения с одним неизвестным

1. 3. **2.** $\frac{6}{5}, \frac{12}{5}$. **3.** $0, \frac{67}{7}$, 13. **4.** $\pm\frac{1}{2}$, $\pm i\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$, $\frac{-\sqrt{2}-1\pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{2}$. Указание. Переписать уравнение в виде $\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x-1}=1$. **6.** 2, $-1\pm i\sqrt{3}$. **7.** $0, \pm 5\sqrt{2}$. **8.** $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$. **9.** $6, -\frac{33}{4}$. **10.** $0, -\frac{5}{2}$. **11.** $\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$. **12.** 3, -1, $1\pm i\sqrt{3}$. **13.** $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$, $\frac{-13\pm 5i\sqrt{51}}{38}$. **14.** $\sqrt{\frac{3}{2}-1}\pm i\sqrt{\sqrt{6}-1{,}5}$; $-\sqrt{\frac{3}{2}-1}\pm\sqrt{\sqrt{6}+1{,}5}$. **15.** 6, -2, $3\pm\sqrt{21}$. **16.** Подстановка $x=z-\frac{7}{2}$; ответ: $-\frac{7}{2}$, $\frac{1}{2}\left(-7\pm\sqrt{\frac{\sqrt{313}+13}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{313}-13}{2}}\right)$. **17.** 1, $-\frac{5}{7}$, $\frac{-37\pm i\sqrt{1221}}{14}$. **18.** $\frac{1}{2}$, $\frac{24\pm 35i\sqrt{3}}{13}$. **19.** $7\pm\sqrt{34}$, $\frac{7\pm i\sqrt{11}}{2}$. Указание. Положить $x^2-8x+15=y$; тогда легко находится отношение $\frac{x}{y}$. **20.** -1, 2, $\frac{-5\pm i\sqrt{15}}{2}$. **21.** 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}(-9\pm\sqrt{65})$. **22.** 7, $\frac{1}{7}$, $\frac{-25\pm i\sqrt{339}}{32}$. **23.** 2, $\frac{1}{2}$, $2\pm\sqrt{3}$. **24.** $0, \pm 6i, \frac{6}{5}(1\pm\sqrt{26})$. Указание. Правая часть равна $\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}$. **25.** $1\pm\sqrt{\frac{19}{18}}$. Указание. Произвести умножение биномов. **26.** $-\frac{5}{2}$. Указание. Переписать уравнение в виде $31\left(\frac{24-5x}{x+1}+5+\frac{5-6x}{x+4}+6\right)=29\left(\frac{17-7x}{x+2}+7+\frac{8x+55}{x+3}-8\right)$. **27.** -1, 2, $\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{65})$. **28.** $\pm 1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3 \pm 4\sqrt{10}i}{13}$. **29.** $\pm 2, \pm\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{13} \pm i\sqrt{21}}{\sqrt{34}}$.
30. $\frac{1+\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}, \frac{1-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{2}$. **31.** $\frac{\pm 3 \pm \sqrt{5}}{2}, \pm i$.

§ 4. Рациональные уравнения с одним неизвестным, содержащие параметры

1. $a = 0, a = -2$. **2.** $a = 0, a = 1$. **3.** $a = 0$. **4.** $a = 0$. **5.** $ab(a+b)(5a-3b) \neq 0$. **6.** $ab(a-b)(2b-a) \neq 0$. **7.** $b(a+b)(2a+b)(2b+a) \neq 0$. **8.** $ab(a-b) \neq 0$. **9.** $b(a-b)(30a^2+47ab+30b^2) \neq 0$ (см. решение задачи № 31 этого параграфа). **10.** Решение. Уравнения (1) и (2) будут эквивалентны тогда и только тогда, когда корни уравнений

$$(b-2x)^2+(2a-x)^2=0 \tag{3}$$

и

$$b+2a-3x=0$$

не будут корнями уравнения (2). Уравнение (3) может быть приведено к виду

$$5x^2-4(a+b)x+4a^2+b^2=0, \tag{3'}$$

а так как $(a-2x)+(2x-b)^2=5x^2-4(a+b)x+4b^2-a^2$, то прежде всего должно быть $4b^2+a^2-4a^2-b^2 \neq 0$, т. е. $a^2-b^2 \neq 0$. (I) Далее: корни уравнения (3) не должны обращать в нуль и $2a+b-3x$, иначе $x=\frac{2a+b}{3}$ не должно быть корнем (3). Подставляя $x=\frac{2a+b}{3}$ в (3), получим еще одно неравенство $4a-b \neq 0$ (II). Наконец, корень уравнения $b+2a-3x=0$, т. е. $x=\frac{b+2a}{3}$, не должен обращать в нуль правую часть уравнения (2), т. е. $\left[\left(b-2\frac{b+2a}{3}\right)^2+\right.$ $\left.+\left(2a-\frac{b+2a}{3}\right)^2\right](a+2b-b-2a)^2 \neq 0$, или [учитывая (I)] $4a-b \neq 0$ (III). Условия (I), (II), (III) можно объединить: $(a^2-b^2)(4a-b) \neq 0$. **11.** $(b^2-c^2) \times (c^2-a^2)(a^2-b^2)(a+b+c) \neq 0$. **12.** $a \neq b$. **13.** $c(a-c)(a+b-c)(b+c-a) \times (2c+b)(b+c) \neq 0$. **14.** $a \neq b$. **15.** $a \neq b$. **16.** $abm(a+b)(1-m)(a-mb) \times (b-ma) \neq 0$. **17.** $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) \neq 0$. **18.** $b \neq c, c \neq a, a \neq b$. **19.** $(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$. **20.** Уравнения неэквивалентны, так как второе уравнение имеет корень $x=b$, не являющийся корнем первого уравнения. Если $a \neq \lambda b$, где $\lambda=\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, то все остальные корни обоих уравнений соответственно одинаковы. **21.** Уравнения неэквивалентны, так как второе уравнение имеет корни $x=-a$ и $x=-b$, не являющиеся корнями первого уравнения. **22.** $abc(b-c) \times (c-a)(a-b) \neq 0$. **23.** При $a=0$ уравнение корней не имеет. При a, равном -2, $x=6$. При $a \neq 0$ и $a \neq -2$ уравнение имеет два корня: $\frac{a}{2}(-a-4 \pm \sqrt{a^2+4a+20})$. **24.** При $a=0$ и $a=1$ уравнение не имеет корней. Если $a \neq 1$ и $a \neq 0$, то уравнение имеет два корня: $x=-a$ и $x=a-1$. **25.** При $a=0$ уравнение корней не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет два корня: $1+a$ и $1+\frac{1}{a}$. **26.** Если $a=0$, то уравнение корней не имеет; если $a \neq 0$, то уравнение имеет два корня: $-2a$ и $3a$. **27.** Перенося все в левую часть, приводя дроби к общему знаменателю и производя упрощения в числителе, получим $\frac{(a+b)[x^2-(a^2+ab+b^2)]}{(3b+2a-3x)(b+2a+2x)(x-2b+a)}=0$. Значит, если $a+b=0$, уравнение удовлетворяется при любом значении x, кроме корней знаменателя. Если же $a+b \neq 0$, то данное уравнение эквивалентно следующему: $\frac{x^2-(a^2+ab+b^2)}{(3b+2a-3x)(b+2a+2x)(x-2b+a)}=0$. Отсюда следует, что уравнение имеет два корня $x=\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}$ (I), если $\left(\frac{3b+2a}{3}\right)^2-(a^2+ab+b^2) \neq 0$ или $a(3b-5a) \neq 0$; $\left(\frac{b+2a}{2}\right)^2-(a^2+ab+b^2) \neq 0$ или $b \neq 0$; $(2b+a)^2-$ $-(a^2+ab+b^2) \neq 0$ или $b \neq 0$. Если $a=0$, то $b \neq 0$ (ибо $a+b \neq 0$) и уравнение имеет один корень $x=-b$. Если $3b-5a=0$ (при этом $a \neq 0$ ибо $a+b \neq 0$), то уравнение имеет один корень $x=-\frac{7}{3}a$. Наконец, если $b=0$, то уравнение имеет

один корень $x=a$. В этом решении дан общий метод решения рациональных уравнений, содержащих параметры: все переносим в левую часть, приводим к общему знаменателю и находим корни числителя; подставляя их в знаменатель, находим неравенства, при выполнении которых корни числителя будут корнями данного уравнения. Затем исследуем случаи, когда корни числителя обращают в нуль знаменатель. Можно вместо подстановки корней числителя в знаменатель поставить корни знаменателя в числитель. **28.** Если $b=0$, то уравнение корней не имеет. Если $b=a\neq 0$, то уравнение удовлетворяется при любом значении x, кроме $x=-a$ и $x=-\frac{a}{2}$. Если $ab(a-b)(2b-a)\neq 0$, то уравнение имеет три корня: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}$. Если $a\neq b$, $b\neq 0$, но $a=0$, то уравнение имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=b$. Если $a\neq b$, $b\neq 0$, $2b-a=0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\pm b\sqrt{3}$. **29.** Уравнение приводится к виду $\frac{(a+b)(x-a)(x-b)^2}{(b+x)^2(b+2x)(2b+x)}=0$. Отсюда следует, что если $a+b=0$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=-b$, $x=-2b$ и $x=-\frac{b}{2}$; если $a+b\neq 0$, то корнями данного уравнения могут быть только числа a и b; при этом число a будет корнем данного уравнения тогда и только тогда, когда $(a+b)(b+2a)(2b+a)\neq 0$, а число b будет корнем данного уравнения тогда и только тогда, когда $b\neq 0$. **30.** Уравнение преобразуется к виду

$$\frac{(a-b)(x^2-ab)[10x-3(a+b)]}{(3b-x)(3x-a)(9b-a)(8x-3a+3b)}=0.$$

Если $a=b$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=0$, $x_3=\frac{a}{3}$, $x+3b$. Если $ab(a-b)\neq 0$, то уравнение имеет три корня $x_{1,2}\pm\sqrt{ab}$, $x_3=\frac{3}{10}(a+b)$. Если $b\neq a=0$, то уравнение имеет один корень $x=\frac{3b}{10}$, а если $a\neq b=0$, то корень $x=\frac{3a}{10}$. **31.** Уравнение приводится к виду

$$\frac{(a-b)[x-(a+b)][x^2-(a^2+34ab+b^2)]}{[(x-a+b)^2+36b^2][(7b-a+x)^2}=0.$$

Подставляя $x=a+b$ в знаменатель, получаем $40b^2\cdot 64b^2$. Подставляя $x=a-7b$ в числитель, получаем $(a-b)(-8b)48b(b-a)$. Остается исследовать, при каком условии уравнения $x^2-(a^2+34ab+b^2)=0$ и $(x-a+b)^2+36b^2=0$ или $x^2-2(a-b)x+a^2-2ab+37b^2=0$ имеют общий корень. Предполагая $a\neq b$, можно утверждать, что они могут иметь только один общий корень, который определяется из уравнения $a^2+34ab+b^2-2(a-b)x+a^2-2ab+37b^2=0$, т. е. $x=\frac{a^2+16ab+19b^2}{a-b}$. Для того чтобы это значение x было общим корнем, необходимо и достаточно, чтобы $\left(\frac{a^2+16ab+19b^2}{a-b}\right)^2-(a^2+34ab+b^2)=0$ или $b^2(30a^2+48ab+30b^2)=0$. Итак, если $b(a-b)(5a^2+8ab+5b^2)\neq 0$, то уравнение имеет три корня: $x_1\pm a+b$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{a^2+34ab+b^2}$. Если $a\neq b=0$, то только один кореиь $x=-a$. Если $a\neq b$ и $b\neq 0$, но $5a^2+8ab+5b^2=0$, то уравнение имеет два корня: $x=a+b$ и тот из корней $\pm\sqrt{a^2+34ab+b^2}$, который отличен от $\frac{a^2+16ab+19b^2}{a-b}$. **31.** Уравнение приводится к виду

$$\frac{(a-b)(x^2-ab)\left[x-\frac{2}{5}(a+b)\right]}{[(b-2x)^2+(2a-x)^2](b+2a-3x)^2}=0.$$

Значит, если $a=b$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=-\frac{a}{3}$ и $x=\frac{4\pm 3i}{5}a$, так как при $a=b$ знаменатель при указанных значениях x обращается в нуль. Пусть $a\neq b$. Уравнения $x^2=ab$ и $(b-2x)^2+(2a-x)^2=0$ или $5x^2-4(a+b)x+b^2+4a^2=0$ при условии $a+b\neq 0$ имеют общий кореиь, определяемый из уравнения $5ab-4(a+b)x+b^2+4a^2=0$; отсюда $x=\frac{4a+b}{4}$, и это значение x будет общим корнем данных уравнений, если $(4a+b)^2=16ab$ или $4a-b=0$. Подстановка $x=\frac{2}{5}(a+b)$ в знаменатель и $x=\frac{2a+b}{3}$ в числитель новых ограиичений ие дает. Впрочем, условие $(a^2-b^2)(4a-b)\neq 0$ было уже получеио в решении за-

дачи № 10 этого параграфа. Итак, если $(a^2-b^2)(4a-b)\neq 0$, то уравнение имеет три корня: $x_{1,2}=\pm\sqrt{ab}$, $x_3=\frac{2}{5}(a+b)$. Если $a-b\neq 0$, но $b=-a$, то уравнение имеет только один корень $x=0$. Если $a-b\neq 0$, но $4a-b=0$, то уравнение имеет только один корень $x=-2a$. **33.** Уравнение приводится к виду

$$\frac{[(a+b+c)x-abc]\,[3x^2-2(bc+ca+ab)x+abc(a+b+c)]}{x(bc-x)(ca-x)(ab-x)}=0.$$

Отсюда, если $(a+b+c)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)\neq 0$, то уравнение имеет три корня:

$$x_1=\frac{abc}{a+b+c},$$

$$x_{2,3}=\frac{1}{3}(bc+ca+ab\pm\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)}).$$

Если $a+b+c=0$, но $(b-c)(2c+b)(2b+c)\neq 0$, то уравнение имеет один корень $x=\frac{2}{3}(bc+ca+ab)$. Если $a+b+c=0$, $(b-c)(2c+b)(2b+c)=0$, то уравнение не имеет корней. Если $a+b+c\neq 0$, но $b=c\neq a$, то в случае $c=b\neq -a$ уравнение имеет два корня: $x_1=\frac{ab^2}{a+2b}$, $x_2=\frac{b(a+2b)}{3}$, а если $c=b=-a$, то один корень: $x=\frac{1}{3}b^2$. Аналогичны выводы в случаях $a+b+c\neq 0$, $b=a\neq c$ и $a+b+c\neq 0$, $a=c\neq b$. Если $a+b+c\neq 0$, $b=-a$, то в случае $b=-a=c$ и $b=-a=-c$ уравнение имеет один корень $x=\frac{1}{3}a^2$, а в случае $b=-a\neq\pm c$ уравнение имеет два корня $\frac{1}{3}(-a^2\pm\sqrt{a^4+3a^2c^2})$. Аналогичны выводы в случаях $a+b+c\neq 0$, $b=-c$ и $a+b+c\neq 0$, $c=-a$. **34.** Если $a\neq b$, то уравнение имеет один корень $x=-2(a+b+c)$. Если $a=b$, то уравнение удовлетворяется при любом значении x, не равном $-2a$. **35.** Указание. При решении рациональных уравнений, содержащих параметры, иногда удобно применять следующий прием: перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{(x+a)(x+a+b)(x-c)(x-c-b)-(x-a)(x-a-b)(x+c)(x+c+b)}{(x+c)(x-c)(x+c+b)(x-c-b)}=0 \qquad (1)$$

или

$$\frac{(a-c)x\left[x^2-\frac{ac+(a+b)(b+c)}{2}\right]}{(x+c)(x-c)(x+c+b)(x-c-b)}=0. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что если $a=c$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=\pm c$ и $x=\pm(b+c)$. Во всем дальнейшем мы будем считать $a\neq c$ и не отмечать это каждый раз. Если подставить корни знаменателя уравнения (2) в числитель, то придется производить некоторые преобразования для приведения результата подстановки к простому виду. Лучше поэтому подставлять корни знаменателя в числитель уравнения (1) (сказанное относится и к ряду предыдущих и к ряду последующих примеров). Производя эту подстановку и отбрасывая множитель $c-a\neq 0$, будем иметь:

а) при $x=c$: $\quad -(c-a-b)\,2c\,(2c+b)$; (3)

б) при $x=-c$: $\quad (a+b-c)(-2c)(-2c-b)$; (4)

в) при $x=b+c$: $\quad -(b+c-a)(2c+b)\,2\,(b+c)$; (5)

г) при $x=-(b+c)$: $\quad (a-b-c)(-2a-b)(-2b-2c)$. (6)

Отсюда следует, что если $c(a+b-c)(2c+b)(b+c-a)(b+c)\neq 0$, уравнение имеет три корня:

$$x_1=0,\quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{ac+(a+b)(b+c)}{2}}. \qquad (7)$$

Сравнивая результаты подстановки при $x=c$ и при $x=b+c$, заключаем, что если $c(a+b-c)=0$, $(b+c-a)(b+c)(2c+b)\neq 0$ (в этом и только в этом случае выражения (3) и (4) будут равны нулю, а выражения (5) и (6) будут отличны от нуля), то среди значений (7) для x будут значения $\pm c$, которые не будут

корнями данного уравнения; более точно: если $c=0$, $a+b\neq 0$, $ab(a-b)\neq 0$, то уравнение имеет только корни $x=\pm\sqrt{\frac{b(a+b)}{2}}$; если $c\neq 0$, $a+b-c=0$, $b+c\neq 0$, то уравнение имеет только один корень $x=0$; если $c=0$, $a+b=0$, то уравнение корней не имеет. Далее, если наоборот $(a+b-c)(2c+b)\neq 0$, но $(b+c-a)(b+c)=0$, то среди значений (7) для x будут значения $\pm(b+c)$, которые не будут корнями данного уравнения; более точно: если $b+c=0$, $ac\neq 0$, то уравнение имеет два корня $x=\pm\sqrt{\frac{ac}{2}}$; если $b+c=0$, $ac=0$, то уравнение не имеет корней; если $b+c-a=0$, $c(b+c)\neq 0$, то уравнение имеет один корень $x=0$, а если $b+c-a=0$, $c=0$, уравнение не имеет корней. Пусть, наконец, все выражения (3) равны нулю; тогда если хотя бы одно из чисел c и $b+c$ не равно нулю, то среди чисел $x=\pm c$, $x=\pm(b+c)$ есть, по крайней мере, три различных; значит, уравнение не имеет корней; если же $c=0$ и $b+c=0$, то уравнение не имеет корней. **36.** $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\frac{a}{b}\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}-\frac{b}{a}\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\frac{x-a}{x-b}\right)-\frac{b}{a}\frac{x-a}{x-b}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\frac{x-a}{x-b}\right)=\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\frac{x-a}{x-b}\right)\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{b}{a}\frac{x-a}{x-b}\right)=0$. Ответ: если $a\neq b$, то четыре корня: $\frac{1}{2}[\pm(a+b)\pm\sqrt{a^2+6ab+b^2}]$. Если $a=b$, то уравнение удовлетворяется при любом значении x, кроме $x=\pm a$. **37.** Если $a\neq b$, то уравнение имеет два корня: $x_1=3b-2a$, $x_2=3a-2b$. Если $a=b$, то уравнение корней не имеет. **38.** Если $m=1$ или $a+b=0$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=a$, $x=b$, $x=ma$, $x=-mb$. Если $abm(a+b)(1-m)(a-mb)(b-ma)\neq 0$, то уравнение имеет три кор: я: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{amb}$. Если хотя бы одно из чисел a или b, или m равно нулю, то уравнение корней не имеет. Если $amb(m-1)(a+b)\neq 0$, $a=mb$, $m\neq -1$, то уравнение имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=-a$; если $amb(m-1)(a+b)\neq 0$, $a=mb$, $m=-1$, то уравнение имеет один корень $x=0$. Если $abm(m-1)(a+b)\neq 0$, $b=ma$, $m\neq -1$, то уравнение имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=-b$; если же $abm(m-1)(a+b)\neq 0$, $b=ma$, $m=-1$, то уравнение имеет один корень $x=0$. **39.** Если $(a-b)(c-d)=0$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=-a$, $x=-b$, $x=-c$ и $x=-d$. Если $(a-b)(c-d)(a-d)(a-c)\times(b-c)(b-d)\neq 0$, $a+b\neq c+d$, то уравнение имеет два корня: $x=0$, $x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$. Если $(a-b)(c-d)\neq 0$, $a+b=c+d$, $cd-ab\neq 0$, то уравнение имеет один корень $x=0$. Если, наконец, $a+b=c+d$ и $cd-ab=0$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=-a$, $x=-b$, $x=-c$ и $x=-d$. **40.** Если $(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$, то уравнение имеет три корня: $x_1=0$, $x_{2,3}=-\frac{1}{3}(a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab})$. Если $a\neq b=c$, то уравнение имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=\frac{-2a-b}{3}$; если $b\neq a=c$, то тоже два корня: $x_1=0$, $x_2=\frac{-2b-a}{3}$; если $c\neq a=b$, то тоже два корня $x_1=0$, $x_2=\frac{-2c-a}{3}$. Если $a=b=c$, то уравнение не имеет корней. **41.** Если $(b-c)\times(c-a)(a-b)\neq 0$, то уравнение имеет три корня: $x_1=a+b+c$, $x_{2,3}=\frac{2}{3}(a+b+c)\pm\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}$. Если $b=c\neq a$, то уравнение имеет два корня: $x_1=a+b+c$, $x_2=\frac{a+5b}{3}$. Если $c=a\neq b$, то уравнение имеет два корня $x_1=a+b+c$, $x_2=\frac{b+5a}{3}$; если $a=b\neq c$, то два корня $x_1=a+b+c$, $x_2=\frac{c+5a}{3}$. Если $a=b=c$, то уравнение имеет один корень $x=3a$. **42.** При $a=b$ уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=b$ и $x=\frac{b\pm i\sqrt{3}b}{2}$. Во всем дальнейшем считаем $a\neq b$. Если $b=0$, $a\neq 0$, то уравнение имеет только один корень $x=a$. Если $b\neq 0$, $a^2+ab+b^2\neq 0$, $a^2-ab+b^2\neq 0$, то уравнение имеет четыре корня: 0, a, $\pm\sqrt{ab}$, а если $b\neq 0$, $a^2+ab+b^2\neq 0$, $a^2-ab+b^2=0$, то три корня 0, $\pm\sqrt{ab}$. Если $b\neq 0$, $a^2+ab+b^2=0$, то уравнение имеет три корня 0, a, $-(a+b)$, а если $b\neq 0$, $a=0$, то один корень, равный 0.

43. $\left(\frac{a+b+x}{a}+\frac{a+b+x}{b}+\frac{a+b+x}{x}-1\right)\left(\frac{a+b+x}{a+b}+\frac{a+b+x}{a+x}+\right.$
$\left.+\frac{a+b+x}{b+x}-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$, $(a+b+x)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-$
$-(a+b+x)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-\frac{5}{2}(a+b+x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)=0$. Уравнение имеет корень $x=-(a+b)$, если $a+b\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Если же $ab(a+b)=0$, то это значение x не является корнем данного уравнения. Далее,

$$(a+b+x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)=0,$$
$$\left[1+(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{a+b}{x}\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)=0,$$
$$\left[(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{a+b}{x}\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-$$
$$-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)=0,\quad \frac{a+b}{abx}(x+a)(x+b)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-$$
$$-\frac{5}{2}\frac{(a+b)x+ab}{abx}=0,\quad 2x^2+(a+b)x+2a^2+ab+2b^2=0.$$

Отсюда, в случае $2a^2+ab+2b^2\neq 0$, $3a^2+2b^2\neq 0$ уравнение имеет два корня: $x=\frac{1}{4}(-a-b\pm\sqrt{-15a^2-6ab-15b^2})$ (1). Если $2a^2+ab+2b^2=0$, то данное уравнение имеет корень $x=-\frac{a+b}{2}$ при условии, что $a+b\neq 0$ и $a\neq b$; если же $a+b=0$ или $a-b=0$, то это значение x не является корнем данного уравнения. Если $3a^2+2b^2=0$, то данное уравнение вместо двух корней (1) имеет один корень $x=\frac{a-b}{2}$ при условии, что $a\neq b$, $a+b\neq 0$ и $3a-b\neq 0$; если же $(a^2-b^2)\times$ $\times(3a-b)=0$, то это значение x не является корнем. Наконец, если $3a^2+2b^2=0$, то вместо двух корней (1) данное уравнение имеет один корень $x=\frac{b-a}{2}$, если $b\neq a$, $3b-a\neq 0$, $a+b\neq 0$; если же $(a^2-b^2)(3b-a)=0$, то это значение x не является корнем данного уравнения. 44.

$$\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}+\frac{x^2-bx+b^2}{(x+b)^2}+\frac{x^2-cx+c^2}{(x+c)^2}+\frac{3}{2}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+a)(x+b)(x+c)}-\frac{3}{2}=0,$$
$$1-\frac{3ax}{(x+a)^2}+1-\frac{3bx}{(x+b)^2}+1-\frac{3cx}{(x+c)^2}+\frac{3}{2}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+a)(x+b)(x+c)}-\frac{3}{2}=0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+a)(x+b)(x+c)}+\frac{1}{2}-x\left[\frac{a}{(x+a)^2}+\frac{b}{(x+b)^2}+\frac{c}{(x+c)^2}\right]=0,$$
$$\frac{x^3+(bc+ca+ab)x}{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\frac{a(x+b)^2(x+c)^2+b(x+a)^2(x+c)^2+c(x+a)^2(x+b)^2}{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}=0,$$
$$\frac{[x^3+(bc+ca+ab)x](x+a)(x+b)(x+c)-ax(x^2+bx+cx+bc)^2}{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}-$$
$$-\frac{bx(x^2+cx+ax+ac)^2+cx(x^2+ax+bx+ab)^2}{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}=0,$$
$$x^2\frac{x^4-2(bc+ca+ab)x^2-8abcx+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2a^2bc-2b^2ca-2c^2ab}{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}=0.$$

Числитель преобразуем по методу Феррари (этот метод заключается в том, что целую рациональную функцию четвертой степени представляют как разность квадратов целых рациональных функций второй степени; эта задача приводит,

вообще говоря, к решению уравнения третьей степени; здесь дано искусственное преобразование):

$$[x^2-(-bc+ca+ab)]^2-4bcx^2-8abcx-4a^2bc=[x^2-(-bc+ca+ab)]^2-$$
$$-4bc(x^2+2ax+a^2)=[x^2-(-bc+ca+ab)]^2-[2\sqrt{bc}(x+a)]^2=$$
$$=(x^2+2\sqrt{bc}x+2a\sqrt{bc}-ab-ac+bc)(x^2-2\sqrt{bc}x-2a\sqrt{bc}-ab-ac+bc).$$

Находим: $x_1=-\sqrt{bc}+\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$, $x_2=-\sqrt{bc}-\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$, $x_3=\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$, $x_4=\sqrt{bc}-\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$. Все эти значения x, а также значение $x_5=0$ будут корнями данного уравнения, если $abc(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$ (см. задачу 22 этого параграфа). Если же среди значений x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 будут равные $-a$, $-b$, $-c$, то эти значения не будут корнями данного уравнения. Если $abc=0$, то $x=0$ не будет корнем данного уравнения, а если $abc\neq 0$, то $x=0$ — корень. **45.** Если $a=b$, то уравнение не имеет корней. Если $a\neq b$, то уравнение имеет четыре корня: $x_1=\frac{3a-b}{2}$, $x_2=\frac{3b-a}{2}$, $x_{3,4}=\frac{a+b}{2}\pm\frac{3(a-b)}{\sqrt{5}}i$ (подстановка $x=\frac{a+b}{2}-z$). **46.** $3a-2b$, $3b-2a$, $\frac{a+b}{2}\pm i\frac{a-b}{6}\sqrt{\frac{13}{7}}$. **47.** Если $a\neq b$, то уравнение имеет четыре корня: 0, $a+b$, $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Если $a=b$, то два корня: 0 и $2a$. **48.** Если $a=b$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=a$. Если $a\neq b$ и $a^2+ab+b^2\neq 0$, то уравнение имеет четыре корня: 0, $a+b$, $\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{a^2-3ab+b^2}{a^2+ab+b^2}}$. Если $a\neq b$, $a^2+ab+b^2=0$, то уравнение имеет два корня: 0 и $a+b$. **49.** Если $abc(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$, то уравнение имеет корни: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$, $x_3=-\sqrt{bc}+\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$, $x_4=-\sqrt{bc}-\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$, $x_5=\sqrt{bc}-\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$. Если $abc=0$, то $x_1=0$ — не корень, а если $abc\neq 0$, то $x_1=0$ — корень. Если среди чисел x_2, x_3, x_4, x_5 есть равные $-a$, $-b$, $-c$, то эти значения не будут корнями данного уравнения. **50.** Указание. Положить $a+b=\alpha+\beta$, $c+d=\alpha-\beta$, $a+c=\alpha'+\beta'$, $b+d=\alpha'-\beta'$; тогда $\alpha=\alpha'=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, $\beta=\frac{1}{2}(a+b-c-d)$, $\beta'=\frac{1}{2}(a+c-b-d)$. Затем положить $x+\alpha=z$ и решить уравнение относительно z. Ответ. Если $\lambda=1$, $\beta^2=\beta'^2$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме тех, которые обращают в нуль сумму $(x+a+c)^5+(x+b+d)^5$. Если $\lambda=1$, $\beta^2\neq\beta'^2$, то уравнение имеет два корня $x=-\alpha\pm\sqrt{-\frac{\beta^2+\beta'^2}{2}}$ при условии, что $\beta^4-18\beta^2\beta'^2+\beta'^4\neq 0$. Если же $\lambda=1$, $\beta^2=\beta'^2$, $\beta^4-18\beta^2\beta'^2+\beta'^4=0$, то уравнение не имеет корней. Если $\lambda\neq 1$, $\beta^2=\sqrt{\lambda}\beta'^2$ (под $\sqrt{\lambda}$ здесь понимается любое из значений $\sqrt{\lambda}$), то данное уравнение имеет два корня: $x=-\alpha\pm\beta'\sqrt{\frac{10\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}}$ (1), если только $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq(9+4\sqrt{5})^2$, $\lambda\neq(9-4\sqrt{5})^2$ и $\beta'\neq 0$ (в выражении (1) под $\sqrt{\lambda}$ принимается то значение корня, которое входит в равенство $\beta^2=\sqrt{\lambda}\beta'^2$). Если $\lambda\neq 1$, $\beta^2=\sqrt{\lambda}\beta'^2$, но имеет место хотя бы одно из равенств $\lambda=0$, $\lambda=(9\pm 4\sqrt{5})^2$, $\beta'=0$, то уравнение не имеет корней. Если $\lambda\neq 1$, $\beta^2\neq\beta'^2$, то уравнение не имеет корней. Если $\lambda\neq 1$, $\beta^2\neq\beta'^2$, $\beta^4-\lambda\beta'^4\neq 0$, $\beta^4-18\beta^2\beta'^2+\beta'^4\neq 0$, то данное уравнение имеет четыре корня:

$$x=-\alpha\pm\sqrt{\frac{-5(\beta^2-\beta'^2)\pm\sqrt{5}\sqrt{(4+\lambda)\beta^4-10\lambda\beta^2\beta'^2+\lambda(4\lambda+1)\beta'^4}}{1-\lambda}}.$$

Если $\lambda\neq 1$, $\beta^2\neq\beta'^2$, $\beta^4-\lambda\beta'^4\neq 0$, $\beta^4-18\beta^2\beta'^2+\beta'^4=0$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x=-\alpha\pm\sqrt{\frac{19\beta^2-\beta'^2}{2}}\left(=-\alpha\pm\sqrt{\frac{19\beta'^2-\beta^2}{2}}\right).$$

51. Положить $a+b=\alpha+\beta$, $c+d=\alpha-\beta$, $a+c=\alpha'+\beta'$, $b+d=\alpha'-\beta'$; тогда $\alpha=\alpha'=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, $\beta=\frac{1}{2}(a+b-c-d)$, $\beta'=\frac{1}{2}(a+c-b-d)$. Ответ:

если $\beta^2=\beta'^2$, то данное уравнение удовлетворяется при всех значениях x, за исключением тех, которые обращают в нуль выражение $(x+a+c)^5+(x+b+d)^5$; если $\beta^2\neq\beta'^2$, $\beta\neq 0$, $\beta\neq\pm\sqrt{5}\beta'$, то данное уравнение имеет корни: $x=-a\pm\sqrt{5}\sqrt[4]{\beta\beta'}$, $x=-a\pm\sqrt[4]{5}\sqrt{\beta\beta'}$ (для $\sqrt[4]{5}$ берется арифметическое значение, для $\sqrt{\beta\beta'}$ — любое). Если $\beta^2\neq\beta'^2$ и имеет место хотя бы одно из равенств: $\beta=0$, $\beta=\pm\beta'\sqrt{5}$, то данное уравнение не имеет корней. 52. Если $n=1$, $a=0$, то уравнение удовлетворяется при всех значениях x, кроме $x=0$. Если $n=1$, $a\neq 0$, то уравнение имеет один корень $x=0$. Если $n\neq 1$, $a=0$, то уравнение корней не имеет. Если $n\neq 1$, $a\neq 0$, то следует сделать подстановку $\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}=z$; если $n\neq 1$, $a\neq 0$, $n\neq\frac{1}{2}$, то уравнение имеет восемь корней:

$$x=\frac{a}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{5n-3}{n-1}}\pm\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right),$$

$$x=\frac{a}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{n}+2}\pm\sqrt{\frac{1}{n}-2}\right),$$

а если $a\neq 0$, $n=\frac{1}{2}$, то — четыре корня: $x=\frac{a}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{5n-3}{n-1}}\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)$, где $n=\frac{1}{2}$.

§ 5. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными

1. $\left(\frac{9}{4},\ \frac{3}{8}\right)$, $\left(-\frac{21}{40},\ \frac{63}{20}\right)$. 2. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$. 3. $\left(\frac{1-i}{2},\ \frac{1+i}{2}\right)$, $\left(\frac{1+i}{2},\ \frac{1-i}{2}\right)$. 4. (6, 6). $\left[\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1),\ -\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)\right]$, $\left[-\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1),\ \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)\right]$. 5. (0, 0), $(\sqrt{7},\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7},-\sqrt{7})$, $(\sqrt{19},-\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19},\sqrt{19})$. (2, 3), (—2, —3). (3, 2), (—3, —2). 6. (3, 1), (1, 3), $\left(\frac{-5+i\sqrt{23}}{2},\ \frac{-5-i\sqrt{23}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-i\sqrt{23}}{2},\ \frac{-5+i\sqrt{23}}{2}\right)$. 7. (3, 2). (—3, —2). $\left(i\sqrt{\frac{11}{13}},\ -\frac{14}{11}i\sqrt{\frac{11}{13}}\right)$, $\left(-i\sqrt{\frac{11}{13}},\ \frac{14}{11}i\sqrt{\frac{11}{13}}\right)$. 8. (3, 2), (2, 3). 9. (4, 1), (1, 4), $\left(\frac{-7+i\sqrt{15}}{2},\ \frac{-7-i\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(\frac{-7-i\sqrt{15}}{2},\ \frac{-7+i\sqrt{15}}{2}\right)$. 10. (3, 4), (4, 3), $\left(\frac{-16+8\sqrt{10}}{7},\ \frac{-16-8\sqrt{10}}{7}\right)$, $\left(\frac{-16-8\sqrt{10}}{7},\ \frac{-16+8\sqrt{10}}{7}\right)$. 11. $(\varepsilon, 3\varepsilon)$, $(3\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ или $\varepsilon=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 12. $(2\varepsilon, 3\varepsilon)$, $(3\varepsilon, 2\varepsilon)$, где ε — любое из значений $\sqrt[3]{1}\left(\varepsilon=1, \varepsilon=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. 13. (0, 0), (2, —2), (—2, 2), $(\sqrt{6},\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6},-\sqrt{6})$, $\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7}),\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{7})\right]$, $\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{7}),\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})\right]$, $\left[\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+\sqrt{7}),\ -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})\right]$, $\left[-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7}),\ \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})\right]$. 14. (9, 12), (—12, —9), $\left(\frac{3+i\sqrt{423}}{2},\ \frac{-3+i\sqrt{423}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-i\sqrt{423}}{2},\ \frac{-3-i\sqrt{423}}{2}\right)$. 15. (2, 1), (1, 2), $\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-i\sqrt{15}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)$, (0, —3), (—3, 0), (—2, 1), (1, —2). 16. $\left(\sqrt[4]{8},\ \sqrt[4]{2}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{8},\ -\sqrt[4]{2}\right)$, $\left(i\sqrt[4]{8},\ -i\sqrt[4]{2}\right)$, $\left(-i\sqrt[4]{8},\ i\sqrt[4]{2}\right)$,

$\left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right), \left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right), \left(i\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, -i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right), \left(-i\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$. **17.** $(10\varepsilon, 7\varepsilon), (-7\varepsilon, -10\varepsilon)$, где ε равно или 1, или $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **18.** $\left(\sqrt[3]{13}\,\varepsilon, -\sqrt[3]{13}\,\varepsilon\right), (-\varepsilon, -3\varepsilon), (3\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **19.** $(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}), (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}), (-1+i, -1-i), (-1-i, -1+i)$. **20.** (0, 0), (3, 2). **21.** $(3\varepsilon, -2\varepsilon), (-2\varepsilon, 3\varepsilon), \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{169}+i\sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right)\varepsilon, \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{169}-i\sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right)\varepsilon\right], \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{169}-i\sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right)\varepsilon, \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{169}+i\sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right)\varepsilon\right]$, где $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **22.** (5, 2), (2, 5), (−5, −2), (−2, −5), $(5\sqrt{3}+2i\sqrt{3}, -5\sqrt{3}+2i\sqrt{3}), (2i\sqrt{3}-5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}+2i\sqrt{3}), (-5\sqrt{3}-2i\sqrt{3}, 5\sqrt{3}-2i\sqrt{3}), (5\sqrt{3}-2i\sqrt{3}, -5\sqrt{3}-2i\sqrt{3})$. **23.** (9, 3), $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{2}\right)$. **24.** $(i, 2i), (-i, -2i)$, (2, 1), (−2, −1). **25.** (4, 2), (9, −3), $(5+i\sqrt{11}, 1-i\sqrt{11}), (5-i\sqrt{11}, 1+i\sqrt{11})$. **26.** (3, 2), (2, 3), (−6, 1), (1, −6). **27.** (3, 1), (1, 2). **28.** $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, (2, 5), $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$, (−2, −5). **29.** (0, 0), (2, −1), $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}\right)$. **30.** (3, 4), (4, 3), $(6+\sqrt{29}, 6-\sqrt{29}), (6-\sqrt{29}, 6+\sqrt{29})$. **31.** (3,5), (5, 3), $\left(\frac{-9+\sqrt{21}}{2}, \frac{-9-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{-9-\sqrt{21}}{2}, \frac{-9+\sqrt{21}}{2}\right)$. **32.** (1, 4), (4, 1), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$. **33.** (2, 3), (3, 2), (−5, 2), (2, −5). **34.** $(3\varepsilon+2\sqrt{2}\varepsilon', 3\varepsilon-2\sqrt{2}\varepsilon'), \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{129}+\varepsilon'), \frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{129}-\varepsilon')\right]$, где ε и ε' принимают значения $+1$ и -1 независимо друг от друга. **35.** $(7+4\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}), (7-4\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3}), (7+4\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}), (7-4\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3})$. **36.** (0, 0), (27, 27), $\left[\frac{7}{2}(3+\sqrt{33}), \frac{7}{2}(3-\sqrt{33})\right], \left[\frac{7}{2}(3-\sqrt{33}), \frac{7}{2}(3+\sqrt{33})\right]$, (30, 15), (15, 30). **37.** (2, −1), (−1, 2), (−2, 1), (1, −2), $\left(\frac{3\varepsilon+\varepsilon' i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \frac{3\varepsilon-\varepsilon' i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)$, где ε и ε' независимо друг от друга принимают значения $+1$ и -1. **38.** Вычесть почленно из первого уравнения второе. Ответ: $\left[\frac{-1+(4+\sqrt{10})i}{5}, \frac{14+(-6+\sqrt{10})i}{10}\right], \left[\frac{-1+(4-\sqrt{10})i}{5}, \frac{14-(16+\sqrt{10})i}{10}\right], \left[\frac{-1+(16+\sqrt{10})i}{5}, \frac{14+(6+\sqrt{10})i}{10}\right], \left[\frac{-1+(16-\sqrt{10})i}{5}, \frac{14+(6-\sqrt{10})i}{10}\right]$. **39.** (2, 1), (1, 2), $(1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}), (1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}), \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}, \frac{1-i\sqrt{19}}{2}\right), \left(\frac{1-i\sqrt{19}}{2}, \frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)$. **40.** $\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right)$,

$$\left(\frac{250+5\sqrt{134}\,i+\sqrt{1168334-7674\sqrt{134}\,i}}{1272}, \frac{250+5\sqrt{134}\,i-\sqrt{1168334-7674\sqrt{134}\,i}}{1272}\right),$$

$$\left(\frac{250+5\sqrt{134}\,i-\sqrt{1168334-7674\sqrt{134}\,i}}{1272}, \frac{250+5\sqrt{134}\,i+\sqrt{1168334-7674\sqrt{134}\,i}}{1272}\right),$$

$$\left(\frac{250-5\sqrt{134}\,i+\sqrt{1168334+7674\sqrt{134}\,i}}{1272}, \frac{250-5\sqrt{134}\,i-\sqrt{1168334+7674\sqrt{134}\,i}}{1272}\right),$$

$$\left(\frac{250-5\sqrt{134}\,i-\sqrt{1168334+7674\sqrt{134}\,i}}{1272}, \frac{250-5\sqrt{134}\,i+\sqrt{1168334+7674\sqrt{134}\,i}}{1272}\right).$$

41. $(0, 0)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$,

$$\left[\frac{35}{18}(-1+i\sqrt{9603}),\ \frac{35}{18}(-1-i\sqrt{9603})\right],$$

$$\left[\frac{35}{18}(-1-i\sqrt{9603}),\ \frac{35}{18}(-1+i\sqrt{9603})\right].$$

Указание. Выделив решение $(0, 0)$, разделить обе части первого уравнения на xy, обе части второго — на x^2y^2 и ввести новые переменные $x+y=\alpha$, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\beta$. Относительно β получится квадратное уравнение. **42.** Ввести новые неизвестные $\alpha=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $\beta=xy+\frac{1}{xy}$. Ответ: $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. **43.** Указание. Освободиться от знаменателя; ввести новые неизвестные $x+y$ и xy. Получится возвратное уравнение четвертой степени относительно xy. Ответ: $(2, 3)$, $(3, 2)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

§ 6. Системы рациональных уравнений с двумя неизвестными, содержащие параметры

1. Если $a\neq 0$, то три решения: $(0, 0)$, $\left(\frac{2a}{3}, -\frac{4a}{3}\right)$, $(2a, 4a)$. Если $a=0$, то все решения $x=\lambda$, $y=\lambda$, где λ — любое число. **2.** $\left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}+\varepsilon'\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}-\varepsilon'\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}}\right)\right]$, где $\varepsilon=\pm 1$, $\varepsilon'=\pm 1$. **3.** Если $a=0$, то $x=y=0$; если $a\neq 0$, то система имеет решения: $(0, a)$, $(a, 0)$, $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}a, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}a\right)$; $\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}a, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}a\right)$. **4.** Если $a=0$, то все решения $x=\lambda$, $y=-\lambda$, где λ — любое число. Если $a\neq 0$, то решения: $(0, a)$, $(a, 0)$, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}a, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}a\right)$. **5.** Если $a=0$, то $x=y=0$; если $a\neq 0$, то решения $\left(a\frac{1+i\varepsilon'\sqrt{8+\varepsilon\sqrt{33}}}{2}, a\frac{1-i\varepsilon'\sqrt{8+\varepsilon\sqrt{33}}}{2}\right)$, где ε и ε' принимают независимо друг от друга значения ± 1. **6.** Если $a=0$, то решением является пара чисел вида $x=\lambda$, $y=-\lambda$ (λ — любое число); если $a\neq 0$, то система имеет следующие решения: $(a, 0)$, $(0, a)$, $\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}a, \frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}a\right)$. **7.** Если $a+3b\neq 0$, то

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{a+3b}+\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}},\ \frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{a+3b}-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right),$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{a+3b}-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}},\ \frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{a+3b}+\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right).$$

8. При $a=1$, $b=1$ все решения системы: $x=\lambda$, $y=\lambda$, где λ — любое число, кроме 0, 1, -1, i, $-i$. При $a=1$, $b=-1$ все решения: $x=\lambda$, $y=\frac{1}{\lambda}$, где λ — любое число, кроме 0, 1, -1, i, $-i$. При $a=-1$, $b=1$ все решения системы: $x=\lambda$, $y=-\frac{1}{\lambda}$, где λ — любое число, кроме 0, 1, -1, i, $-i$. При $a=-1$, $b=-1$ все решения $x=\lambda$, $y=-\lambda$, где λ — любое число, кроме 0, 1, -1, i, $-i$. При $a=1$, $b\neq\pm 1$ система несовместна. При $a\neq\pm 1$, $b=1$ система несовместна. При $a=b=0$ все решения системы: $x=\lambda$, $y=0$, где λ — любое число, не равное нулю. Если $a=0$, $b\neq 0$, $b\neq\pm 1$, то решения $\left(-i, \frac{-i\pm\sqrt{b^2-1}}{b}\right)$; если $b=0$, $a\neq 0$,

$a \neq \pm 1$, то решения $\left(1, \frac{1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}\right), \left(-1, \frac{1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}\right)$; если $a = b$, но $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq -1$, $b \neq -1$, то система несовместна; если $a = -b$, но $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq -1$, $b \neq -1$, то система несовместна. Пусть, наконец, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq -1$, $b \neq -1$, $a \neq b$, $a \neq -b$. Тогда данная система и система

$$\begin{aligned} y(1+x^2) &= ax(1+y^2), \\ y(1-x^2) &= bx(1-y^2) \end{aligned} \tag{3}$$

имеет те же решения, что и данная, и еще одно решение (0, 0). Складывая и вычитая (3), получим систему, эквивалентную (при указанных условиях) системе (3):

$$\begin{aligned} 2y &= x[a(1+y^2) + b(1-y^2)], \\ 2yx^2 &= x[a(1+y^2) - b(1-y^2)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Эта система будет эквивалентна следующей:

$$\left.\begin{aligned} 2y &= x[a(1+y^2) + b(1-y^2)], \\ 4y^2x^2 &= x^2[a^2(1+y^2)^2 - b^2(1-y^2)^2]; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

второе уравнение после сокращения на x^2 не будет иметь решения (0, 0), а потому система

$$\left.\begin{aligned} 2y &= x[a(1+y^2) + b(1-y^2)], \\ 4y^2 &= a^2(1+y^2)^2 - b^2(1-y^2)^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

в случае $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, $a \neq \pm b$ будет эквивалентна данной. Второе уравнение системы (6) имеет решения:

$$y = \varepsilon' \sqrt{\frac{2 - a^2 - b^2 + 2\varepsilon\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a^2-b^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1, \ \varepsilon' = \pm 1.$$

Подставляя это в первое уравнение системы (6) и замечая, что в силу $a \neq \pm b$ коэффициент при x не равен нулю, найдем $x = \frac{ab + 1 - \varepsilon\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a+b} \varepsilon' \times$ $\times \sqrt{\frac{2 - a^2 - b^2 + 2\varepsilon\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a^2-b^2}}$. Итак, данная система, в случае если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, $a \neq \pm b$, имеет решения: $\left(\frac{ab+1-\varepsilon\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a+b} \times \right.$ $\left. \times \varepsilon' \sqrt{\frac{2-a^2-b^2+2\varepsilon\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a^2-b^2}}, \ \varepsilon' \sqrt{\frac{2-a^2-b^2+2\varepsilon\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a^2-b^2}}\right)$, где $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$. 9. Если $a = 0$, система имеет одно решение (0, 0); если $a \neq 0$, то система имеет четыре решения:

$$\left(a\sqrt{1+\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right), \left(-a\sqrt{1+\sqrt{2}}, -\frac{a}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right),$$

$$\left(ai\sqrt{\sqrt{2}-1}, -\frac{ai}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\right), \left(ai\sqrt{\sqrt{2}-1}, \frac{ai}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\right).$$

10. Если $b = 0$, $a \neq 0$, то система несовместна. Если $b \neq 0$, то решения системы:

$$\left(\frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}, \ \frac{b}{2} - \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}\right),$$

$$\left(\frac{b}{2} - \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}, \ \frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}\right),$$

$$\left(\frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}, \ \frac{b}{2} - \sqrt{-\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}\right),$$

$$\left(\frac{b}{2} - \sqrt{-\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}, \ \frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4 + \frac{4a^5}{b}}}\right).$$

11. Если $b=0$, $a\neq 0$, то система несовместна; если $a=0$, $b\neq 0$, то решения: (0, 0),

$$\left[\frac{b}{2}\left(1+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}\right),\ \frac{b}{2}\left(1-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}\right)\right],$$
$$\left[\frac{b}{2}\left(1-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}\right),\ \frac{b}{2}\left(1+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}\right)\right],$$
$$\left[\frac{b}{2}\left(1+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}\right),\ \frac{b}{2}\left(1-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}\right)\right],$$
$$\left[\frac{b}{2}\left(1-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}\right),\ \frac{b}{2}\left(1+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}\right)\right];$$

если $a=b=0$, то все решения: $(\lambda, -\lambda)$, (λ, λ), $(\lambda, i\lambda)$, $(\lambda, -i\lambda)$, где λ — любое число, не равное нулю; если $a^5=b^5\neq 0$, то данная система принимает вид

$$\frac{x^5-b^5}{x-b}=y^4,\quad \frac{y^5-b^5}{y-b}=x^4. \tag{1}$$

Система

$$\begin{aligned} x^5-b^5&=y^4(x-b),\\ y^5-b^5&=x^4(y-b), \end{aligned} \tag{2}$$

или

$$\begin{aligned} x^5-b^5&=xy^4-by^4,\\ y^5-b^5&=x^4y-bx^4 \end{aligned} \tag{3}$$

имеет те же решения, что и система (1) и еще решения (b, b), $(b, -b)$, $(-b, b)$, (b, bi), $(b, -bi)$, (bi, b), $(-bi, b)$. Решая систему (3) и исключая из решений указанные, получим все решения системы (1). Вычитая из первого уравнения (3) второе, получим $x^5-y^5=-xy(x^3-y^3)+b(x^4-y^4)=0$. Отсюда: или $x=y$, тогда получаем решения $(-b, -b)$, (bi, bi), $(-bi, -bi)$, или $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=-xy(x^2+xy+y^2)+b(x^2+y^2)(x+y)$ или $(x^2+y^2)(x+y)^2=b(x^2+y^2)\times(x+y)$. Отсюда $x+y=0$ — это дает решения $(bi, -bi)$ и $(-bi, bi)$ или $x^2+y^2=0$ — это дает решения $(-b, bi)$, $(-b, -bi)$, $(bi, -b)$, $(bi, -b)$, или $x+y=b$. Тогда уравнения (2) принимают вид $x+y=b$, $x^5+y^5=b^5$. Решая систему $x+y=b$, $x^5+y^5=b^5$ [и исключая решения $(b, 0)$, $(0, b)$], получим: $\left(b\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ b\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(b\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ b\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Пусть, наконец, $a^5\neq b^5$, причем $b\neq 0$ и $a\neq 0$. Тогда данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} x^5-a^5&=y^4(x-b),\\ y^5-a^5&=x^4(y-b). \end{aligned} \tag{4}$$

Вычитая из первого уравнения второе, как и выше, получим: $x-y=0$, $x+y=0$, $x^2+y^2=0$, $x+y=b$; $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}},\ a\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)$ (для корня берутся все четыре значения каждый раз для x и y — одно и то же значение), $\left(a\sqrt[4]{\frac{a}{b}},\ -a\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)$ (еще четыре решения), $\left(a\sqrt[4]{\frac{a}{b}},\ ia\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)$ (четыре решения), $\left(a\sqrt[4]{\frac{a}{b}},\ -ia\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)$ (четыре решения) и при $x+y=b$ получим: $x^5-a^5=y^4(-y)$ или $x^5+y^5=a^5$; отсюда решения:

$$\left(\frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}},\ \frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}}\right),$$
$$\left(\frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}},\ \frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}}\right),$$
$$\left(\frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{b^2}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}},\ \frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{b^2}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}}\right),$$
$$\left(\frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{b^2}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}},\ \frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{b^2}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}}\right).$$

12. Если $a \neq 0$, два решения: $(a-b,\ a+b)$, $\left[\frac{b}{a}(b-a),\ \frac{b}{a}(b+a)\right]$. Если $a=0$ — одно решение $(-b,\ b)$. 13. Если $a^2-2ab+5b^2 \neq 0$, то система имеет решения: $(a+b,\ a)$, $(b-b,\ b)$; если $a^2-2ab+5b^2=0$, но a и b одновременно не равны нулю, то первое уравнение есть следствие второго; решением является любая пара чисел, удовлетворяющих лишь одному второму уравнению; если $a=b=0$, то все решения системы $(\lambda,\ \pm i\lambda)$, где λ — любое число. 14. Если $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то система имеет 25 решений: $(a\varepsilon_k, b\varepsilon_s)$, где ε_k есть любое из пяти значений $\sqrt[5]{1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\ s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$; если $a=b \neq 0$, то решения системы $(a\varepsilon_k, b\varepsilon_s)$, где $k \neq s$ (всего 20 решений); если $a=0$, $b \neq 0$, то система имеет пять решений $(0,\ b\varepsilon_k)$; если $a \neq 0$, $b=0$, то система имеет пять решений $(a\varepsilon_k, 0)$. 15. $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=[(x+y)^2-2xy]^2-2(xy)^2$. Отсюда приходим с системе, эквивалентной данной: $xy=a^2-b^2$, $[(x+y)^2-2(a^2-b^2)]^2-2(a^2-b^2)^2=2(a^4+6a^2b^2+b^4)$. Ответ: $(a+b,\ a-b)$, $(a-b,\ a+b)$, $(-a+b,\ -a-b)$, $(-a-b,\ -a+b)$, $[(a+b)i,\ (-a+b)i]$, $[(-a+b)i,\ (a+b)i]$, $[(a-b)i,\ (-a-b)i]$, $[(-a-b)i,\ (a-b)i]$. 16.

$$\left(\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3a^2}{4}+\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}},\ \frac{a}{2}-\sqrt{-\frac{3a^2}{4}+\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}}\right),$$

$$\left(\frac{a}{2}-\sqrt{-\frac{3a^2}{4}+\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}},\ \frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3a^2}{4}+\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}}\right),$$

$$\left(\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3a^2}{4}-\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}},\ \frac{a}{2}-\sqrt{-\frac{3a^2}{4}-\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}}\right),$$

$$\left(\frac{a}{2}-\sqrt{-\frac{3a^2}{4}-\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}},\ \frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3a^2}{4}-\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{\sqrt{2}}}\right).$$

17. Если $b=\frac{3}{2}a$ и $a \neq 0$, то система несовместна; если $a=b=0$, то решением служит любая пара чисел x, y такая, что $x+y=a$; если $a=0$, $b \neq 0$, то система имеет одно решение $(0,\ 0)$; если $a \neq 0$, $b \neq \frac{3a}{2}$, то система имеет решения:

$$\left[\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a-2b}{2b-3a}}\right),\ \frac{a}{2}\left(1-\sqrt{\frac{a-2b}{2b-3a}}\right)\right],$$

$$\left[\frac{a}{2}\left(1-\sqrt{\frac{a-2b}{2b-3a}}\right),\ \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a-2b}{2b-3a}}\right)\right].$$

18. Если $a=b=1$, то все решения $(1,\ \lambda)$, где λ — любое число, не равное 1 и не равное -1; если $a=1$, $b=-1$, то все решения $(\lambda,\ 1)$, где λ — любое число, не равное ± 1; если $a=-1$, $b=1$, то все решения $(\lambda,\ -1)$, где λ — любое число, не равное ± 1; если $a=b=-1$, то все решения $(\lambda,\ -1)$, где λ — любое число, не равное ± 1; если $a=b \neq \pm 1$, то система имеет одно решение $\left(\frac{2a}{1+a^2},\ 0\right)$; если $a=-b \neq \pm 1$, то система имеет одно решение $\left(0,\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$; если $ab=1$, но $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, то система имеет одно решение $\left(\frac{2a}{1+a^2},\ 0\right)$; если $ab=-1$, $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, то система имеет одно решение $\left(0,\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$; если $a \neq \pm b$, $ab \neq \pm 1$, $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, то данная система эквивалентна следующей:

$$x+y=\frac{2a}{1+a^2}(1+xy), \tag{1}$$

$$x-y=\frac{2b}{1+b^2}(1-xy); \tag{2}$$

из уравнения (1) следует, что

$$x+y+1+xy=\frac{2a}{1+a^2}(1+xy)+1+xy,$$

$$1+xy-x-y=1+xy-\frac{2a}{1+a^2}(1+xy)$$

или

$$(1+x)(1+y)=\frac{(1+a)^2}{1+a^2}(1+xy), \qquad (1-x)(1-y)=\frac{(1-a)^2}{1+a^2}(1+xy).$$

Заметим, что в решение не может входить $x=1$ или $y=1$, или такие x и y, что $xy=-1$ (ибо если $x=1$ или $y=1$, то $a=1$, если же $xy=-1$, то знаменатель первого из уравнений равен нулю); поэтому все решения данной системы будут удовлетворять уравнению

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2; \tag{3}$$

аналогично

$$\frac{(1+x)(1-y)}{(1-x)(1+y)}=\left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что $\frac{1+x}{1-x}=\pm\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}$; отсюда $x_1=\frac{a+b}{1+ab}$, $x_2=\frac{1+ab}{a+b}$. Из (1) находим: $y_1=\frac{a-b}{1-ab}$, $y_2=\frac{1-ab}{a-b}$. Эти значения x и y удовлетворяют и уравнению (2) (это нужно проверить, так как применяемый здесь метод решения приводил к необходимым следствиям из данной системы; в результате могли появиться пары значений x и y, не являющиеся решением данной системы). 19. Если $a=0$, $b\neq 0$, то система несовместна; если $a^3=b^3$, но $a\neq b^3$, то система несовместна. Если $a=b=0$, то все решения $(\pm i, \lambda)$, λ — любое число, причем $\lambda\neq 0$ и $\lambda\neq\sqrt[6]{-1}$; если $a=1$, $b^3=1$, то все решения (λ, λ) и $\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$, где λ — любое число, отличное от 0 и любого из значений $\sqrt[6]{-1}$; если $a=-1$, $b^3=-1$, то все решения $(-\lambda, \lambda)$, $\left(-\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$, где λ — любое число, отличное от 0 и любого из значений $\sqrt[6]{-1}$. Пусть теперь $a^3\neq b^3$ и $a\neq b^3$. Тогда решения:

$$\left(\frac{a\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{-a\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{-\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{-a\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{-\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{-a\sqrt{2(a-b^3)}+\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{-\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

$$\left(\frac{-a\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(2b^3-a^3-a^2b^3)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}, \frac{-\sqrt{2(a-b^3)}-\sqrt{2(b^3-2a^3+a)}}{2\sqrt{a^3-b^3}}\right),$$

если только ни одно из значений для y не равно $\sqrt[6]{-1}$; если же среди указанных пар чисел будут такие, для которых $y^6=-1$, то эти пары чисел следует исключить (они тогда не являются решениями).

§ 7. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными

1. $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}, 1-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}, 1+\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\right)$. 2. $(9, 3, 1)$, $(1, 3, 9)$. 3. $(4, 3, 5)$, $(-4, -3, -5)$, $(3, 4, 5)$, $(-3, -4, -5)$, $\left[\frac{1}{2}(7+\sqrt{113}), \frac{1}{2}(7-\sqrt{113}), 9\right]$, $\left[\frac{1}{2}(7-\sqrt{113}), \frac{1}{2}(7+\sqrt{113}), 9\right]$,

$\left[-\frac{1}{2}(7+\sqrt{113}), \frac{1}{2}(-7+\sqrt{113}), -9\right], \left[\frac{1}{2}(-7+\sqrt{113}), -\frac{1}{2}(7+\sqrt{113}), -9\right]$.

4. $\left(\frac{1}{12}\sqrt{85\cdot 111}, 12\sqrt{\frac{85}{111}}, 12\sqrt{\frac{111}{85}}\right), \left(-\frac{1}{12}\sqrt{85\cdot 111}, -12\sqrt{\frac{85}{111}}, -12\sqrt{\frac{111}{85}}\right)$. 5. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). 6. (5, −2, −3), (−5, 2, 3), (2, −5, 3), (−2, 5, −3). 7. (0, 0, 0), (−1, −1, 0), (2, 2, 6), $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{7+\sqrt{153}}{12}, \frac{7-\sqrt{153}}{12}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{7-\sqrt{153}}{12}, \frac{7+\sqrt{153}}{12}, \frac{1}{3}\right)$. 8. (0, 0, 0), (−1, −1, −1), (1, 1, 1), $\left(1, i-1, -\frac{i+1}{2}\right), \left(i-1, -\frac{i+1}{2}, 1\right), \left(1, -1-i, \frac{i-1}{2}\right), \left(-i-1, \frac{i-1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1+i}{2}, 1, -1+i\right), \left(\frac{-1+i}{2}, 1, -1-i\right)$. 9. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}-1, \frac{1}{2}\sqrt{6}-1, \sqrt{6}-1\right), \left(-\frac{2}{3}\sqrt{6}-1, -\frac{1}{2}\sqrt{6}-1, -\sqrt{6}-1\right)$. 10. (0, 0, 0), (1, 1, 1), (−1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1). 11. (1, 0, 1), (1, −1, 1), (7, 2, 1), (0, 0, 0), $[(1+\sqrt{2})^3, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ $[(1-\sqrt{2})^3, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}]$.

12. (0, 4, −1), (−2, 2, −3), (2, −2, 3), (0, −4, 1),

$$\left(\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}i, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}i, \frac{-4\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}i\right),$$

$$\left(\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}i, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}i, \frac{-4\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}i\right),$$

$$\left(\frac{-5\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}i, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}i, \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}i\right),$$

$$\left(\frac{-5\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}i, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}i, \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}i\right).$$

13. Указание. Левые части выразить через основные симметрические функции от x, y, z. Ответ: (1, −1, 2), (1, 2, −1), (−1, 1, 2), (−1, 2, 1), (2, 1, −1), (2, −1, 1),

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\right).$$

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\,\varepsilon^2+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\,\varepsilon,\quad \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}},\right.$$
$$\left.\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{473}}{54}}\,\varepsilon+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{473}}{54}}\,\varepsilon^2\right),$$

где $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. 14. (1, 2, 3), $\left(\frac{14}{9}, \frac{9}{7}, \frac{7}{4}\right)$.

15. $\left(2+i\sqrt{\frac{7}{6}},\ 2-i\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$, $\left(2-i\sqrt{\frac{7}{6}},\ 2+i\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$,

$$\left[\frac{1}{2}\left(-2+\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{7}{3}+4\sqrt{5}}\right),\ \frac{1}{2}\left(-2+\sqrt{5}\mp\sqrt{\frac{7}{3}+4\sqrt{5}}\right)\right],$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(-2-\sqrt{5}\pm i\sqrt{4\sqrt{5}-\frac{7}{3}}\right),\quad \frac{1}{2}\left(-2-\sqrt{5}\mp i\sqrt{4\sqrt{5}-\frac{7}{3}}\right)\right].$$

16. Указание. Положить $y+z=\alpha$, $z+x=\beta$, $x+y=\gamma$. Ответ: (0, 0, 0) (0, 0, 3), (0, 2, 0), (1, 0, 0), $\left(\frac{35}{24}, -\frac{7}{24}, -\frac{5}{24}\right)$. 17. (0, 0, 0), (—1, —2, 3), $\left(-\frac{13}{5}, -\frac{13}{10}, \frac{39}{10}\right)$. 18. Указание. Ввести еще одно неизвестное $u=x+y-z$. Ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

19. $\left(-\frac{39}{\sqrt{153}}, -\frac{1}{\sqrt{153}}, \frac{1}{\sqrt{153}}\right)$, $\left(\frac{39}{\sqrt{153}}, \frac{1}{\sqrt{153}}, -\frac{1}{\sqrt{153}}\right)$,
(1, 1, —1), (—1, —1, 1),

$$\left(\pm\frac{\sqrt{11}\,(\sqrt{883}-29)}{\sqrt{1980-64\sqrt{883}}},\quad \mp\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{1980-64\sqrt{883}}},\quad \pm\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1980-64\sqrt{883}}}\right),$$

$$\left(\pm\frac{\sqrt{11}\,(-29-\sqrt{883})}{\sqrt{1980+64\sqrt{883}}},\quad \mp\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{1980+64\sqrt{883}}},\quad \pm\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1980+64\sqrt{883}}}\right).$$

20. Указание. Сложить все данные уравнения, затем из первого уравнения вычесть второе, из второго третье, из третьего первое и воспользоваться тождеством $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=2[x^2+y^2+z^2-(yz+zx+xy)]$; тогда легко определить $x^2+y^2+z^2$ и $yz+zx+xy$; ответ: $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{10}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$; (4, 3, 2), (—4, —3, —2). 21. (1, —1, 2), (1, 2, —1), (—1, 1, 2), (2, 1, —1), (—1, 2, 1), (2, —1, 1). 22. (1, 2, 3), (2, 1, 3), $\left(3, 6, \frac{1}{3}\right)$, $\left(6, 3, \frac{1}{3}\right)$, (1, 3, 2), (3, 1, 2), $\left(2, 6, \frac{1}{2}\right)$, $\left(6, 2, \frac{1}{2}\right)$. 23. $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(2, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$. 24. $\left(\frac{120}{61}, \frac{120}{11}, \frac{120}{19}\right)$. 25. $\left(\frac{1}{20}, \frac{7}{20}, -\frac{3}{20}\right)$. 26. $\left(\frac{23}{10}, \frac{23}{6}, \frac{23}{2}\right)$. 27. $\left(\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{8}{15}}\varepsilon, \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{8}{15}}\varepsilon, \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{8}{15}}\varepsilon\right)$, $\varepsilon=\pm 1$, $\varepsilon=\pm i$. 28. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 29. (4, 5, 6), $\left(\frac{355}{42}, \frac{190}{21}, -\frac{5}{2}\right)$. 30. $\left(1, 3, \frac{1}{3}\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}, 3\right)$, $\left(3, 1, \frac{1}{3}\right)$, $\left(3, \frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1, 3\right)$. 31. Выразить x, y и z через xyz. Ответ: (0, 0, 0), $\left(-\frac{1}{3}, 3, -1\right)$, $\left(\frac{1}{3}, -3, 1\right)$. 32. (0, 0, 0). 33. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число.

34. $\left(\frac{10}{\sqrt{15}}, \frac{9}{\sqrt{15}}, \frac{4}{\sqrt{15}}\right)$, $\left(-\frac{10}{\sqrt{15}}, -\frac{9}{\sqrt{15}}, -\frac{4}{\sqrt{15}}\right)$. **35.** (0, 0, 0), (1, —1, 2). **36.** (2, 1, 3), (—2, —1, 3), (2, —1, —3), (—2, 1, —3). (λ, 0, 0), (0, λ, 0), (0, 0, λ), где λ — любое число. **37.** $(2, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$, $(2, \sqrt[3]{3}\varepsilon, \sqrt[3]{9}\varepsilon^2)$, $(2, \sqrt[3]{3}\varepsilon^2, \sqrt[3]{9}\varepsilon)$, $(2\varepsilon, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\varepsilon^2)$, $(2\varepsilon^2, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\varepsilon)$, $(2\varepsilon, \sqrt[3]{3}\varepsilon^2, \sqrt[3]{9})$, $(2\varepsilon^2, \sqrt[3]{3}\varepsilon, \sqrt[3]{9})$, $(2\varepsilon, \sqrt[3]{3}\varepsilon, \sqrt[3]{9}\varepsilon)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\varepsilon, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\varepsilon^2\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\varepsilon\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon, -\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\varepsilon^2\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon^2, -\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\varepsilon\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon, -\sqrt{\frac{9}{2}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon^2, -\sqrt{\frac{9}{2}}\varepsilon, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon, -\sqrt{\frac{9}{2}}\varepsilon, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\varepsilon\right)$, $(2\varepsilon^2, \sqrt[3]{3}\varepsilon^2, \sqrt[3]{9}\varepsilon^2)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon^2, -\sqrt{\frac{9}{2}}\varepsilon^2, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\varepsilon^2\right)$. **38.** (2, —3, 4), (2, 3, —4), (—2, 3, 4), $\left[\frac{3}{2}(1+i\sqrt{7}), 1+i\sqrt{7}, 2(1+i\sqrt{7})\right]$, $\left[\frac{3}{2}(1-i\sqrt{7}), 1-i\sqrt{7}, 2(1-i\sqrt{7})\right]$. **39.** (10, 8, 2, 5). **40.** Указание. Из данных уравнений нетрудно определить основные симметричные функции от четырех переменных x, y, z, u. Данная система имеет 48 решений: $\left(i, -i, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(i, -i, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(i, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, -i, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ и т. д. (все 24 перестановки) и еще:

$$\left[\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{\sqrt{145}+10}+i\left(\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{145}-10}\right)\right),\right.$$
$$\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{\sqrt{145}+10}+i\left(\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{145}-10}\right)\right),$$
$$\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{\sqrt{145}+10}-i\left(\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{145}-10}\right)\right),$$
$$\left.\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{\sqrt{145}+10}-i\left(\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{145}-10}\right)\right)\right]$$

и т. д. (все 24 перестановки). **41.** $\left(-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\varepsilon, -\sqrt[3]{4}\varepsilon, -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\varepsilon, \sqrt[3]{4}\varepsilon\right)$, $\varepsilon = 1$, или $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **42.** x_1 — любое число, не равное нулю, $x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_3 = x_1$, $x_4 = \frac{1}{x_1}$, ..., $x_{14} = \frac{1}{x_1}$, $x_{15} = x_1$. **43.** Складывая почленно второе уравнение с третьим и вычитая первое, будем иметь $x^n = \frac{a}{xyz}$, аналогично $y^n = \frac{b}{xyz}$, $z^n = \frac{c}{xyz}$. Данная система уравнений (1) эквивалентна системе:

$$x^n = \frac{a}{xyz}, \quad y^n = \frac{b}{xyz}, \quad z^n = \frac{c}{xyz}. \tag{2}$$

В самом деле, соотношения (2) следуют из соотношений (1); обратно, если выполнены соотношения (2), то имеем

$$y^n + z^n = \frac{b+c}{xyz};$$

аналогично выводятся второе и третье из соотношений (1). Система (2) эквивалентна такой:

$$x^n = \frac{a}{xyz}, \quad y^n = \frac{b}{xyz}, \quad z^n = \frac{c}{xyz}, \quad (xyz)^n = \frac{abc}{(xyz)^3}. \tag{3}$$

В самом деле, соотношения (3) следуют из соотношений (2); обратно, если выполнены соотношения (3), то будут выполнены и соотношения (2), так как соотношения (2) — это первые три из соотношений (3). Система (3) эквивалентна следующей:

$$x^n=\frac{a}{xyz},\quad y^n=\frac{b}{xyz},\quad z^n=\frac{c}{xyz},\quad \frac{1}{(xyz)^{n+3}}=\frac{1}{abc}, \tag{4}$$

или

$$x^n=\frac{a}{xyz},\quad y^n=\frac{b}{xyz},\quad z^n=\frac{c}{xyz},\quad \frac{1}{xyz}=\frac{\varepsilon}{\sqrt[n+3]{abc}}, \tag{5}$$

где ε — любое из $n+3$ значений корня степени $n+3$ из 1, т. е. $\varepsilon=\cos\frac{2k\pi}{n+3}+i\sin\frac{2k\pi}{n+3}$, а $k=0, 1, 2, \ldots, n+2$, $\sqrt[n+3]{abc}$ рассматривается здесь как действительное положительное число. Система (5) эквивалентна следующей:

$$x^n=\frac{a\varepsilon}{\sqrt[n+3]{abc}},\quad y^n=\frac{b\varepsilon}{\sqrt[n+3]{abc}},\quad z^n=\frac{c\varepsilon}{\sqrt[n+3]{abc}},\quad \frac{1}{xyz}=\frac{\varepsilon}{\sqrt[n+3]{abc}}. \tag{6}$$

Из первых трех уравнений этой системы находим:

$$x=\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[n+3]{abc}}}\sqrt[n]{\varepsilon}=\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[n+3]{abc}}}\lambda,\quad y=\sqrt[n]{\frac{b}{\sqrt[n+3]{abc}}}\mu,\quad z=\sqrt[n]{\frac{c}{\sqrt[n+3]{abc}}}\nu,$$

где λ, μ, ν — корни степени $n(n+3)$ из 1, т. е.

$$\lambda=\cos\frac{2p\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{2p\pi}{n(n+3)},$$
$$\mu=\cos\frac{2q\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{2q\pi}{n(n+3)},$$
$$\nu=\cos\frac{2r\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{2r\pi}{n(n+3)},$$

где p, q, r принимают значения 0, 1, 2, 3, ..., $n(n+3)-1$. Так как должно быть еще выполнено соотношение $\frac{1}{xyz}=\frac{\varepsilon}{\sqrt[n+3]{abc}}$, а

$$\frac{1}{xyz}=\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n+3]{abc}}{a}}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n+3]{abc}}{b}}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n+3]{abc}}{c}}\frac{1}{\lambda\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt[n+3]{abc}}\cdot\frac{1}{\lambda\mu\nu},$$

то должно быть $\lambda\mu\nu=\frac{1}{\varepsilon}$ или $(\lambda\mu\nu)^{n+3}=1$, ибо ε есть любое значение корня степени $n+3$ из 1. Из последнего соотношения находим

$$\left[\cos\frac{(p+q+r)2\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{(p+q+r)2\pi}{n(n+3)}\right]^{n+3}=1$$

или

$$\cos\frac{(p+q+r)2\pi}{n}+i\sin\frac{(p+q+r)2\pi}{n}=1;$$

значит, $p+q+r$ равно 0 или n, или $2n$ и т. д. Таким образом, все решения данной системы:

$$x=\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[n+3]{abc}}}\left(\cos\frac{2p\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{2p\pi}{n(n+3)}\right),$$
$$y=\sqrt[n]{\frac{b}{\sqrt[n+3]{abc}}}\left(\cos\frac{2q\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{2q\pi}{n(n+3)}\right),$$
$$z=\sqrt[n]{\frac{c}{\sqrt[n+3]{abc}}}\left(\cos\frac{2r\pi}{n(n+3)}+i\sin\frac{2r\pi}{n(n+3)}\right),$$

где радикалы рассматриваются как действительные положительные числа, p, q, r принимают значения: 0, 1, 2, 3, ..., $n(n+3)-1$, причем $p+q+r$ должно быть равно одному из чисел 0, n, $2n$, $3n$, $4n$, ... **44.** Решение: k-ое уравнение системы можно переписать в виде (будем считать $n>2$) $x_k^2 - x_k s - k(k+1)s^2 - (2k+1)^2 a^2 = 0$, где $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ или $x_k = \frac{s}{2} \pm (2k+1)\sqrt{\frac{s^2}{4} - a^2} = \frac{s}{2} \pm \frac{2k+1}{2}\sqrt{s^2 - 4a^2}$; складывая почленно эти уравнения, получаем $s = \frac{ns}{2} + A\sqrt{\frac{s^2}{4} - a^2}$ (1), или $(2-n)s = A\sqrt{s^2 - 4a^2}$, где $A = \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm \ldots \pm (2n+1)$ (со всевозможными наборами знаков). Из (1) для выбранного набора знаков (следовательно, для фиксированного A) находим $s^2 = \frac{4a^2A^2}{A^2 - (2-n)^2}$, если только $A^2 \neq (2-n)^2$ [случай $A^2 = (2-n)^2$ возможен; пример: $n=5$, $(-3-5+7+9-11)^2 = (2-5)^2$]; в случае $A^2 \neq (2-n)^2$, $s^2 - 4a^2 = \frac{4a^2(2-n)^2}{A^2-(2-n)^2}$, $\sqrt{s^2-4a^2} = \frac{2a(2-n)}{\sqrt{A^2-(2-n)^2}}$ и значит $s = \frac{2Aa}{\sqrt{A^2-(2-n)^2}}$, $x_k = \frac{aA \pm (2k+1)a(2-n)}{\sqrt{A^2-(2-n)^2}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, причем из двух знаков $\pm$ берется тот, который выбран для A, а для радикала берется одно и то же (любое) значение. Система имеет столько решений, сколько существует значений $A = \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm \ldots \pm (2n+1)$ таких, что $A^2 \neq (2-n)^2$.

§ 8. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными, содержащие параметры

1. Если $b^2+c^2 \neq a^2$, $c^2+a^2 \neq b^2$, $a^2+b^2 \neq c^2$, то система имеет два решения: $\left[\frac{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}}{(b^2+c^2-a^2)\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}}{(c^2+a^2-b^2)\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}}{(a^2+b^2-c^2)\sqrt{2}}\right]$, причем во всех выражениях берется одно и то же значение радикала; если $a^2+b^2=c^2$, но $a \neq 0$ и $b \neq 0$ — система не имеет решений; если $a^2+b^2=c^2$, $a=0$, $b \neq 0$, то решением служит тройка чисел $\left(0, \frac{b^2}{\lambda}, \lambda\right)$, где λ — любое число, не равное 0; если $a^2+b^2=c^2$, $a \neq 0$, $b=0$, то решением служит тройка чисел $\left(\frac{a^2}{\lambda}, 0, \lambda\right)$, где λ — любое число, не равное 0; аналогичны выводы в случае $b^2+c^2=a^2$ и $c^2+a^2=b^2$; если $a=b=c=0$, то решениями служат тройки чисел $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число. **2.** Решение. Если дана система уравнений вида

$$f_1(x, y, z) = a, \quad f_2(x, y, z) = b, \quad f_3(x, y, z) = c, \tag{1}$$

то следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 - f_3 &= a + b - c, \\ f_1 - f_2 + f_3 &= a - b + c, \\ -f_1 + f_2 + f_3 &= -a + b + c, \end{aligned} \tag{2}$$

будет эквивалентна системе (1). Для заданной системы уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} x^2 + (y-z)^2 + y^2 + (x-z)^2 - z^2 - (x-y)^2 &= a + b - c, \\ x^2 + (y-z)^2 - y^2 - (x-z)^2 + z^2 + (x-y)^2 &= a - b + c, \\ -x^2 - (y-z)^2 + y^2 + (x-z)^2 + z^2 + (x-y)^2 &= -a + b + c, \end{aligned}$$

или

$$(x+y-z)^2 = a+b-c, \quad (x-y+z)^2 = a-b+c, \quad (-x+y+z)^2 = -a+b+c.$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} x + y - z &= \varepsilon_1\sqrt{a+b-c}, \\ x - y + z &= \varepsilon_2\sqrt{a-b+c}, \\ -x + y + z &= \varepsilon_3\sqrt{-a+b+c}, \end{aligned} \tag{3}$$

где ε_1, ε_2, ε_3 принимают значения $+1$ и -1, а под каждым выражением $\sqrt{a+b-c}$, $\sqrt{a-b+c}$, $\sqrt{-a+b+c}$ понимается любое из двух значений квадратных радикалов. Система (3) при фиксированных значениях ε_1, ε_2, ε_3 имеет единственное решение:

$$x=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\sqrt{a+b-c}+\varepsilon_2\sqrt{a-b+c}),$$

$$y=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\sqrt{a+b-c}+\varepsilon_3\sqrt{-a+b+c}), \qquad (4)$$

$$z=\frac{1}{2}(\varepsilon_2\sqrt{a-b+c}+\varepsilon_3\sqrt{-a+b+c}).$$

3. Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\neq 0$, то система имеет два решения (соответственно двум значениям радикала):

$$\left[\frac{-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}},\right.$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}},$$

$$\left.\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}}\right].$$

Система не имеет решений, если $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, или $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$, или $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$, или $a=b=0$, $c\neq 0$, или $b=c=0$, $a\neq 0$, или $c=a=0$, $b\neq 0$; если $a=b=c=0$, то решениями являются тройки чисел: $(0, \lambda, \mu)$, $(\lambda, 0, \mu)$, $(\lambda, \mu, 0)$, где $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$. Пусть теперь $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, но $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ или $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, или $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$; в этом случае система решений не имеет. **4.** Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, то система имеет два решения: $\left[\pm\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}\right), \pm\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}-\frac{ca}{b}\right), \pm\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{cb}{a}-\frac{ab}{c}\right)\right]$, причем должны быть взяты одновременно все верхние или все нижние знаки; если равно нулю только одно из трех чисел: a или b, или c, то система не имеет решений; если $b=c=0$, но $a\neq 0$, то все решения $(\pm\sqrt{a^2+y^2}, y, -y)$, где y — любое число; если $c=a=0$, $b\neq 0$, то все решения $(x, \pm\sqrt{x^2+b^2}, -x)$, где x — любое число; если $a=b=0$, $c\neq 0$, то все решения $(x, -x, \pm\sqrt{c^2+x^2})$, где x — любое число; если $a=b=c=0$, то решениями будут $(-\lambda, \lambda, \lambda)$, $(\lambda, -\lambda, \lambda)$, $(\lambda, \lambda, -\lambda)$, где λ — любое число. **5.** Если $a+b+c=0$, но хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля, то система несовместна; если $a=b=c=0$, то система удовлетворяется любой тройкой чисел x, y, z, в сумме составляющих нуль: $x+y+z=0$; если, наконец, $a+b+c\neq 0$, то система имеет два решения:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}\right),$$

соответственно двум значениям радикала $\sqrt{a+b+c}$. При этом во всех написанных выражениях надо брать одно и то же значение радикала. **6.** $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$; если $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$, $a+b\neq 0$, то система, кроме того, имеет единственное решение:

$$x_2=-\frac{2bc}{b+c}, \quad y_2=-\frac{2ca}{c+a}, \quad z_2=-\frac{2ab}{a+b};$$

если, хотя бы одно из чисел $b+c$, $c+a$, $a+b$ равно нулю, то это решение отпадает, но есть другие (уже независимо от ограничений на a, b и c): $x=0$,

$y=0$, z — любое число; $x=0$, y — любое число, $z=0$; x — любое число, $y=0$, $z=0$. **7.** Если $a^2+b^2+c^2\neq 0$, то система имеет два решения:

$$\left(\pm\frac{b^2+c^2-a^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\frac{c^2+a^2-b^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\frac{a^2+b^2-c^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

где должны быть взяты одновременно все верхние или одновременно все нижние знаки (значение радикала во всех выражениях — одно и то же); если $a^2+b^2+c^2=0$, но хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю, то система несовместна; если $a=b=c=0$, то решением служит любая тройка чисел x, y, z, такая, что $x+y+z=0$. **8.** Если $a=0$, решений нет; если $a\neq 0$, но $ab=2$, то система имеет одно решение $\left(\frac{a}{4},\ -\frac{a}{2},\ \frac{a}{4}\right)$; если $a\neq 0$ и $ab\neq 2$, то система имеет два решения:

$$\left(a\frac{ab+2\pm\sqrt{a^2b^2-4ab+20}}{4(ab-2)},\ -\frac{a}{2},\ a\frac{ab-6\mp\sqrt{a^2b^2-4ab+20}}{4(ab-2)}\right).$$

9. Если $a^k+b^k+c^k=0$, то система решений не имеет; если $a^k+b^k+c^k\neq 0$, то система имеет n^3 решений:

$$\left(a\lambda_n\sqrt[n]{\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}},\ b\mu_n\sqrt[n]{\frac{b^k}{a^k+b^k+c^k}},\ c\nu_n\sqrt[n]{\frac{c^k}{a^k+b^k+c^k}}\right),$$

где λ_n, μ_n, ν_n — любые значения $\sqrt[n]{1}$, а под радикалами понимаются какие-нибудь фиксированные значения (из n значений). **10.** Решением служит любая тройка чисел:

$$\left(\frac{d\left(\sqrt[3]{a}\lambda+\sqrt[3]{b}\mu+\sqrt[3]{c}\nu\right)}{\lambda\sqrt[3]{a}},\ \frac{d\left(\sqrt[3]{a}\lambda+\sqrt[3]{b}\mu+\sqrt[3]{c}\nu\right)}{\mu\sqrt[3]{b}},\ \frac{d\left(\sqrt[3]{a}\lambda+\sqrt[3]{b}\mu+\sqrt[3]{c}\nu\right)}{\nu\sqrt[3]{c}}\right)$$

при условии, что $\lambda\sqrt[3]{a}+\mu\sqrt[3]{b}+\nu\sqrt[3]{c}\neq 0$ $\left(\lambda, \mu, \nu\right.$ принимают независимо друг от друга все значения $\sqrt[3]{1}$, т. е. 1 и $\left.\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. В общем случае система имеет, следовательно, 27 решений. **11.** Если $b\neq 1$, то система имеет шесть решений: $(0, i\sqrt{a}, -i\sqrt{a})$, $(0, -i\sqrt{a}, i\sqrt{a})$, $(i\sqrt{a}, 0, -i\sqrt{a})$, $(-i\sqrt{a}, 0, i\sqrt{a})$, $(i\sqrt{a}, -i\sqrt{a}, 0)$, $(-i\sqrt{a}, i\sqrt{a}, 0)$; если $b=1$, то, помимо этих решений, система имеет еще решения, являющиеся любой комбинацией корней λ_1, λ_2, λ_3 кубического уравнения $\lambda^3-p\lambda^2+a\lambda-p=0$, где p — любое число (система имеет, таким образом, бесконечное однопараметрическое множество корней). **12.** $(a, b, -b)$, $(a, -b, b)$, $(b, a, -b)$, $(b, -b, a)$, $(-b, a, b)$, $(-b, b, a)$. **13.** $\left(\lambda\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a},\ \mu\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{b},\ \nu\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{c}\right)$, где значение радикала одно и то же; λ, μ, ν — значения $\sqrt[3]{1}$, причем λ, μ и ν должны выбираться так, чтобы $\lambda\mu\nu=1$, т. е. допустимыми комбинациями являются лишь следующие:

λ	1	1	1	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
μ	1	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	1	1	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
ν	1	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	1	1

— система имеет 7 решений. **14.** Если $a+b+c\neq 0$, то система имеет одно решение: $\left(\frac{bc}{a+b+c},\ \frac{ca}{a+b+c},\ \frac{ab}{a+b+c}\right)$; если $a+b+c=0$, то система не имеет решений. **15.** $\left(-1+\sqrt[3]{\frac{-a+b+c}{2}}+1,\ -1+\sqrt[3]{\frac{a-b-c}{2}}+1,\ -1+\right.$ $\left.+\sqrt[3]{\frac{a+b-c}{2}}+1\right)$. где для каждого радикала берется любое из трех значений.

16. $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число; если $a+b+c=0$, то система имеет, кроме указанных решений, еще решение $\left(\frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{b}, \frac{\lambda}{c}\right)$, где λ — любое число; если $a+b+c\neq 0$, но хотя бы одно из чисел $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$ равно нулю, то система имеет только решения $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$; если $a+b+c\neq 0$, $-a+b+c\neq 0$, $a-b+c\neq 0$, $a+b-c\neq 0$, то все решения системы: $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число, и еще одно решение $\left(\frac{1}{-a+b+c}, \frac{1}{a-b+c}, \frac{1}{a+b-c}\right)$. 17. Если $a=b=c=0$, то все решения $(\varepsilon\lambda, \varepsilon^2\lambda, \lambda)$, где λ — любое число, а ε — любое из значений $\sqrt[3]{1}$; если хотя бы одно из чисел a, b или c (например, c) не равно нулю, но $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab=0$, то все решения системы: $\left(x, -\frac{\varepsilon x}{2}\pm\sqrt{c\varepsilon-\frac{3\varepsilon^2x^2}{4}}, -\frac{\varepsilon x}{2}\mp\sqrt{c\varepsilon-\frac{3\varepsilon^2x^2}{4}}\right)$, где ε — любое из значений $\sqrt[3]{1}$, а для радикала $\sqrt{c\varepsilon-\frac{3\varepsilon^2x^2}{4}}$ берется в выражениях для y и z одно и то же значение; если $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, но хотя бы одно из чисел a^2-bc, b^2-ca, c^2-ab отлично от нуля, то система не имеет решений; если, наконец, $a^3+b^3+c^3-3abc\neq 0$, то система имеет два решения:

$$\left(\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}, \frac{b^2-ca}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}, \frac{c^2-ab}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}\right),$$

где для радикала берется любое из двух значений, но одно и то же в выражениях для x, y, z. Указание. Из данных уравнений следует, что $cx+ay+bz=0$, $bx+cy+az=0$ и т. д. 18. Указание. Положим $x=\alpha^2$, $y=\beta^2$, $z=\gamma^2$; тогда получим $\pm c\gamma\pm a\alpha\pm b\beta=0$; определяя отсюда $c\gamma=\pm a\alpha\pm b\beta$, первое уравнение системы запишем в виде $(\alpha\pm a)^2=(\beta\pm b)^2$ и т. д. Ответ: $[(b+c)^2, (a-c)^2, (b+a)^2]$, $[(b-c)^2, (a-c)^2, (b-a)^2]$, $[(b-c)^2, (a+c)^2, (b+a)^2]$, $[(b+c)^2, (a-c)^2, (b-a)^2]$; если $(a+c)^2=b^2$, то система имеет еще решения $[(\lambda+c)^2, \lambda^2, (\lambda-a)^2]$, где λ — любое число; если $(a-c)^2=b^2$, то система имеет еще решения $[(\lambda+c)^2, \lambda^2, (\lambda+a)^2]$, где λ — любое число. 19. Если $a=b=0$, то все решения: $(0, 0, \lambda)$, $(0, \lambda, 0)$, $(\lambda, 0, 0)$, $(\lambda, \lambda, \lambda)$, где λ — любое число; если $a=0$, $b\neq 0$ или $a\neq 0$, $b=0$, то система имеет только одно решение: $(0, 0, 0)$; если $a\neq 0$, $b\neq 0$, но $a^2+ab+b^2=0$, то система имеет два решения: $(0, 0, 0)$ и $\left[2(a+b), -\frac{2a}{b}(a+b), -\frac{2a}{b}\frac{(a+b)^2}{a+2b}\right]$; если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a^2+ab+b^2\neq 0$, то система имеет три решения: $(0, 0, 0)$ и $\left(\frac{a^3+2a^2b-ab^2-b^3\pm R}{2(a^2+ab+b^2)}, \frac{ab(3a^3+6a^2b+9ab^2+5b^3\mp R)}{2(a^2+ab+b^2)^2}, -\frac{a(a^3+2a^2b-ab^2-b^3\pm R)}{2b(a^2+ab+b^2)}\right)$, где $R=\sqrt{a^6+4a^5b+10a^4b^2+12a^3b^3+13a^2b^4+10ab^5+b^6}$. 20. Если $a=b=c=0$, то все решения системы: $(0, \lambda, \mu)$, $(\lambda, 0, \mu)$, $(\lambda, \mu, 0)$, где λ и μ — любые числа; если $a=b=0$, $c\neq 0$ или $b=c=0$, $a\neq 0$, или $c=a=0$, $b\neq 0$, или $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$, или $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$, или $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, или $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0$, то все решения системы: $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число; если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\neq 0$, но $\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0$, то все решения системы: $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число. Наконец, если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\neq 0$, $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\neq 0$, $\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\neq 0$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\neq 0$, то все решения системы: $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, где λ — любое число, и еще два решения:

$$\left(\pm 2\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}, \pm 2\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}, \pm 2\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\right).$$

21. $\left[a\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right), a\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right), 0\right]$, $\left[a\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right), a\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right), 0\right]$. 22. Если $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=0$, то система не имеет решений; если

$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\neq 0$, то система имеет решения:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a-b+c}\sqrt{a+b-c}\,\varepsilon_1,\ \frac{1}{2}\sqrt{-a+b+c}\sqrt{a+b-c}\,\varepsilon_2,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\sqrt{a-b+c}\sqrt{-a+b+c}\,\varepsilon_3\right),$$

где для радикалов $\sqrt{-a+b+c}$, $\sqrt{a-b+c}$, $\sqrt{a+b-c}$ берутся фиксированные значения (любые), а ε_1, ε_2, ε_3 принимают значения $+1$ и -1, причем $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1$, так что для ε_1, ε_2, ε_3 возможны следующие комбинации значений:

ε_1	1	1	-1	-1
ε_2	1	-1	1	-1
ε_3	1	-1	-1	1

23. Система несовместна, если выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{array}{llll} a=0, & b=0, & c\neq 0;\\ a=0, & b\neq 0, & c=0;\\ a\neq 0, & b=0, & c=0;\\ a=0, & b=0, & c=0;\\ c=0, & a\neq b,\\ b=0, & a\neq c,\\ a=0, & c\neq b. \end{array}$$

Если $a=0$, $b=c\neq 0$, то все решения системы: $(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+b\alpha},\ \alpha-\sqrt{\alpha^2-b\alpha},\ \alpha+\sqrt{\alpha^2-b\alpha})$, где α — любое число, не равное нулю; для каждого радикала берется любое из двух значений, но одно и то же в выражениях для y и z; если $b=0$, $c=a\neq 0$, то все решения системы: $(\beta-\sqrt{\beta^2-a\beta},\ -\beta+\sqrt{\beta^2+a\beta},\ \beta+\sqrt{\beta^2-a\beta})$, где β — любое число, не равное нулю; для каждого радикала берется любое значение, но одно и то же в выражениях для x и z. Если $c=0$, $a=b\neq 0$, то все решения системы: $(\gamma-\sqrt{\gamma^2-b\gamma},\ \gamma+\sqrt{\gamma^2-b\gamma},\ -\gamma+\sqrt{\gamma^2+b\gamma})$, где γ — любое число не равное нулю; для каждого радикала берется любое значение, но одно и то же в выражениях для y и x. Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $(-a+b+c)(a-b+c)\times$ $\times(a+b-c)=0$, то система не имеет решений. Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\neq 0$, то все решения системы:

$$x=-a\frac{\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{a-b+c}\sqrt{a+b-c}}\varepsilon_1+b\frac{\sqrt{c}\sqrt{a}}{\sqrt{-a+b+c}\sqrt{a+b-c}}\varepsilon_2+$$
$$+c\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a-b+c}\sqrt{-a+b+c}}\varepsilon_3,$$
$$y=a\frac{\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{a-b+c}\sqrt{a+b-c}}\varepsilon_1-b\frac{\sqrt{c}\sqrt{a}}{\sqrt{-a+b+c}\sqrt{a+b-c}}\varepsilon_2+$$
$$+c\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a-b+c}\sqrt{-a+b+c}}\varepsilon_3,$$
$$z=a\frac{\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{a-b+c}\sqrt{a+b-c}}\varepsilon_1+b\frac{\sqrt{c}\sqrt{a}}{\sqrt{-a+b+c}\sqrt{a+b-c}}\varepsilon_2+$$
$$+c\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a-b+c}\sqrt{-a+b+c}}\varepsilon_3,$$

где для шести радикалов выбраны любые фиксированные значения, а ε_1, ε_2, ε_3 принимают значения, указанные в следующей таблице:

ε_1	1	1	-1	-1
ε_2	1	-1	1	-1
ε_3	1	-1	-1	1

24. Указание. Из данных уравнений следует: $ay+bz+cx=0$, az^2+bx^2+ $+cy^2=0$. Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{array}{r} ay+bz+cx=0,\\ az^2+bx^2+cy^2=0,\\ y^3-z^2x=b. \end{array}\qquad (1)$$

В самом деле, эти уравнения следуют из данной системы; обратно, если выполнены эти соотношения, то из двух первых находим (в силу $y^3 - z^2x = b \neq 0$; $a : b : c = (x^3 - zy^2) : (y^3 - z^2x) : (z^3 - x^2y)$, и так как $y^3 - z^2x = b \neq 0$, то $x^3 - zy^2 = a$ и $z^3 - x^2y = c$. Из первых двух соотношений (1) в случае $b^3 + c^2a \neq 0$ находим: $x = \dfrac{-ca^2 \mp bR}{b^3 + c^2a}\, y$, $z = \dfrac{-ab^2 \pm cR}{b^3 + c^2a}$, где $R = \sqrt{-a^3b - b^3c - c^3a}$; используя же последнее из уравнений, находим решения:

$$x = \frac{(-ca^2 \mp bR)\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{(b^3 + c^2a)^3 - (-ab^2 \pm cR)^2(-ca^2 \mp bR)}}\,\varepsilon,$$

$$y = \frac{(b^3 + c^2a)\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{(b^3 + c^2a)^3 - (-ab^2 \pm cR)^2(-ca^2 \mp bR)}}\,\varepsilon,$$

$$z = \frac{(-ab^2 \pm cR)\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{(b^3 + c^2a)^3 - (-ab^2 \pm cR)^2(-ca^2 \mp bR)}}\,\varepsilon,$$

где для кубического радикала $\sqrt[3]{b}$ и кубического радикала

$$\sqrt[3]{(b^3 + c^2a)^3 - (-ab^2 \pm cR)^2(-ca^2 \mp bR)}$$

берутся фиксированные значения, а ε принимает все значения $\sqrt[3]{1}$. Это, конечно, верно, если $(b^3 + c^2a)^3 - (-ab^2 + cR)^2(-ca^2 - bR) \neq 0$, $(b^3 + c^2a)^3 - (-ab^2 + cR)^2 \times (-ca^2 + bR) \neq 0$. Если эти выражения равны нулю, система не имеет решений. Если равно нулю только одно из них, то система имеет три решения, соответствующие неравному нулю из этих двух последних выражений. Если $b^3 + c^2a = 0$, то решения системы: $\left(-\dfrac{b}{(\sqrt[3]{c})^2}\varepsilon,\ 0,\ \sqrt[3]{c}\,\varepsilon\right)$, где $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, и в случае $8a^3b^6c^3 - (c^3 + ba^2)^2(c^3 - ba^2)\,bc^2 \neq 0$ еще три решения:

$$x = \frac{(c^3 - ba^2)\,b^2}{\sqrt[3]{8a^3b^6c^3 - (c^3 + ba^2)^2(c^3 - ba^2)\,bc^2}}\,\varepsilon,$$

$$y = \frac{2ab^3c}{\sqrt[3]{8a^3b^6c^3 - (c^3 + ba^2)^2(c^3 - ba^2)\,bc^2}}\,\varepsilon,$$

$$z = \frac{(c^3 + ba^2)\,b^2c}{\sqrt[3]{8a^3b^6c^3 - (c^3 + ba^2)^2(c^3 - ba^2)\,bc^2}}\,\varepsilon,$$

где ε принимает значения 1, $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **25.** Решение: из данных уравнений находим:

$$a^2 + (a+b)^2 + b^2 = 2x + 2y + 2z, \quad (1)$$
$$a^2x + (a+b)^2y + b^2z = yz + zx + xy, \quad (2) \quad (B)$$
$$a^2x^2 + (a+b)^2y^2 + b^2z^2 = 0. \quad (3)$$

Обратно: любое решение: x, y, z этой системы такое, что $y \neq z$, $z \neq x$, $x \neq y$ есть и решение данной системы, так как уравнения системы (B) получены из уравнений данной системы (A) сначала их почленным сложением, затем сложением после предварительного умножения на x, y, z и после предварительного умножения на x^2, y^2, z^2; остается заметить, что $yz^2 + xy^2 + x^2z - yx^2 - zy^2 - z^2x = (z - y)(x - z)(x - y) \neq 0$ (см. задачу № 27, глава IV, § 1). Вместе с тем из данных уравнений (A) следует:

$$\frac{a^2}{y - z} + \frac{(a+b)^2}{z - x} + \frac{b^2}{x - y} = 0, \quad (4)$$

или

$$a^2\left(\frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x}\right) + \frac{2ab}{z - x} + b^2\left(\frac{1}{z - x} + \frac{1}{x - y}\right) = 0,$$

$$a^2\,\frac{y - x}{(y - z)(z - x)} + \frac{2ab}{z - x} + b^2\,\frac{z - y}{(z - x)(x - y)} = 0,$$

$$a(y - x) + b(y - z) = 0,$$

$$(a + b)y - ax - bz = 0,$$

$$(a + b)y = ax + bz. \quad (5)$$

Таким образом, все решения данной системы есть все такие решения системы (B), для которых $y \neq z$, $z \neq x$, $x \neq y$. Если $a = b = 0$, то система (B) принимает вид: $x + y + z = 0$, $yz + zx + xy = 0$. Все решения данной системы в этом случае: $\left(z\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}z\right)$, $\left(z\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, z\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z\right)$, где z — любое число, не равное нулю. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то данная система не имеет решений. Если $a \neq 0$, $b = 0$, то данная система не имеет решений. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то уравнение (5) при помощи (3) может быть записано в виде $(ax)^2 + ax \cdot bz + (bz)^2 = 0$, откуда (6) $bz = \varepsilon ax$, где $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Будем решать систему (1), (5), (6), т. е. систему уравнений $x + y + z = a^2 + ab + b^2$, $(a + b)y = ax + bz$, $bz = \varepsilon ax$. Если для двух указанных значений ε мы будем иметь $b^2 + 2ab + \varepsilon(a^2 + 2ab) \neq 0$, то для этих двух значений ε:

$$x = \frac{b(a+b)(a^2+ab+b^2)}{b^2+2ab+\varepsilon(a^2+2ab)},$$
$$y = \frac{ab(\varepsilon+1)(a^2+ab+b^2)}{b^2+2ab+\varepsilon(a^2+2ab)}, \qquad (7)$$
$$z = \frac{\varepsilon a(a+b)(a^2+ab+b^2)}{b^2+2ab+\varepsilon(a^2+2ab)}.$$

Если для одного значения ε выражение $b^2 + 2ab + \varepsilon(a^2 + 2ab) = 0$, а для другого — это выражение не равно нулю, то система (1), (5), (6) будет иметь лишь одно решение соответственно тому значению ε, для которого $b^2 + 2ab + \varepsilon(a^2 + 2ab) \neq 0$. Если, наконец, для обоих значений ε выражение $b^2 + 2ab + \varepsilon(a^2 + 2ab) = 0$, то система (1), (5), (6), а значит и данная, не имеет решений. Решения (7) системы (1), (5), (6) будут решениями данной системы, если только для значений x, y, z, определенных формулами (7), будут выполнены неравенства $y \neq z$, $z \neq x$, $x \neq y$, $x + y + z \neq 0$. В самом деле, (7) есть решение системы (1), (5), (6), но из (5) и (6) следует (3); из (5) следует (в силу $z \neq y$, $x \neq z$, $y \neq x$), что

$$\frac{a^2}{y-z} + \frac{(a+b)^2}{z-x} + \frac{b^2}{x-y} = 0. \qquad (4)$$

Система же (1), (3), (4) эквивалентна данной, так как (см. задачу № 27, глава IV, § 1):

$$y^2\frac{1}{x-y} + x^2\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z}z^2 - \frac{1}{y-z}y^2 - \frac{1}{z-x}z^2 - \frac{1}{x-y}x^2 =$$
$$= -2(x+y+z) \neq 0;$$

значит, (7) будет решением данной системы тогда и только тогда, когда $a^2 + ab + b^2 \neq 0$, $a + b \neq 0$, $b \neq \varepsilon a$. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но хотя бы одно из чисел $a + b$, $a^2 + ab + b^2$ или $b - \varepsilon a$ равно нулю, то система не имеет решений. 26. Если $1 + a + b + c \neq 0$, то имеется два решения:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+a+b+c}}, \frac{1}{\sqrt{1+a+b+c}}, \frac{1}{\sqrt{1+a+b+c}}\right)$$

соответственно двум значениям радикала (во всех случаях берется одно и то же значение радикала). Если $1 + a + b \neq 0$, $1 + c \neq 0$, то имеется еще два решения:

$$\left(\sqrt{\frac{1+c}{1+a+b}}, \sqrt{\frac{1+c}{1+a+b}}, -\sqrt{\frac{1+a+b}{1+c}}\right);$$

в первых двух случаях значения радикала одинаковы (но любые), значение для z связано со значением x (и y) соотношением $xz = -1$. Если $1 + a + b = 1 + c = 0$, то взамен этого решения система имеет бесконечное множество решений $\left(x, x, -\frac{1}{x}\right)$, где x — любое число, не равное нулю. Если $1 + a \neq 0$, $1 + b + c \neq 0$, то система имеет еще два решения:

$$\left(-\sqrt{\frac{1+b+c}{1+a}}, \sqrt{\frac{1+a}{1+b+c}}, \sqrt{\frac{1+a}{1+b+c}}\right),$$

причем здесь значения радикалов выбраны так: $y = z$, $xy = 1$. Если $1 + a = 1 + b + c = 0$, то взамен этих двух решений система имеет бесконечное множество

решений $\left(-\frac{1}{y}, y, y\right)$, где y — любое число, не равное нулю. Если $1+b\neq 0$, $1+a+c\neq 0$, то система имеет еще два решения:

$$\left(\sqrt{\frac{1+b}{1+c+a}}, -\sqrt{\frac{1+c+a}{1+b}}, \sqrt{\frac{1+b}{1+c+a}}\right),$$

причем здесь $x=z$, $xy=-1$. Если, наконец, $1+a+c=1+b=0$, то взамен этих двух решений система имеет бесконечное множество решений $\left(z, -\frac{1}{z}, z\right)$, где z — любое число, не равное нулю.

§ 9. Решение рациональных неравенств

1. Корни функции $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$ таковы: -3, -1, 2 и 4. Если $x<-3$, то все множители отрицательны, а значит все произведение положительно. Если $-3\leqslant x\leqslant -1$, то все множители, кроме третьего, не положительны, третий множитель не отрицателен, и, значит, произведение не положительно. Если $-1<x<2$, то первый и третий множители положительны, второй и четвертый отрицательны, а произведение положительно. Если $2\leqslant x\leqslant 4$, то первый и третий множители положительны, второй не отрицателен, а четвертый не положителен, следовательно, и произведение не положительно. Наконец, если $x>4$, то все множители положительны и, значит, произведение положительно. Итак, все решения данного неравенства образуют три интервала: $(-\infty, -3)$, $(-1, 2)$, $(4, +\infty)$. 2. $\frac{1}{x}<1$, $\frac{1}{x}-1<0$, $\frac{1-x}{x}<0$ и т. д. Ответ: $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$. 3. $(-4, -2)$, $(1, 3)$, $(5, +\infty)$. 4. $(-\infty, -4)$, $(-2, 1)$, $(3, 5)$. 5. $(-\infty, 1)$, $(2, 3)$, $(4, +\infty)$. 6. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{5}{4}\right)$. 7. Указание. $x^4-3x^3+3x+1=\frac{4}{9}x^2$, $\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-$ $-2\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)+1=\frac{25}{36}x^2$ и т. д. Ответ: $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right), \left(\frac{7-\sqrt{85}}{6}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right), \left(\frac{7+\sqrt{85}}{3}, +\infty\right)$. 8. $(-\infty, -1)$, $(3, 4)$. 9. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$, $(2, +\infty)$. 10. $(-\infty, -4)$, $(-1, 2)$, $(3, +\infty)$. 11. $\left(2-\frac{4}{\sqrt{3}}, 1\right), \left(3, 2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. 12. $(-\infty, -3)$, $(4, +\infty)$. 13. $\left(2-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), (2, 2+\sqrt{3})$. 14. $\left(-4, -\frac{5}{2}\right), (-1, +\infty)$. 15. $\left(-\infty, \frac{-7-\sqrt{37}}{2}\right), \left(-5, -\frac{3}{5}\right), \left(\frac{-7+\sqrt{37}}{2}, \frac{7-\sqrt{37}}{2}\right), \left(\frac{3}{5}, 5\right), \left(\frac{7+\sqrt{37}}{2}, +\infty\right)$. 16. $\left(1, \frac{5}{3}\right), \left(2, \frac{7}{3}\right), (3, +\infty)$, 17. $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(0, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$. 18. $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 6)$, $(7, +\infty)$. 19. $\left(-6, \frac{6-6\sqrt{26}}{5}\right)$, $(0, 6)$, $\left(\frac{6+6\sqrt{26}}{5}, 9\right)$, $(9, +\infty)$. 20. $(-8, -5\sqrt{2})$, $(-6, 0)$, $(6, 5\sqrt{2})$, $(8, +\infty)$. 21. $(-\infty, -2), \left(-\frac{5}{4}, -1\right)$, $(1, 5)$. 22. $\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(5, +\infty)$. 23. $(-\infty, -4), \left(-3, -\frac{5}{2}\right)$, $(-2, -1)$, $(0, +\infty)$. 24. $(-4, -3), \left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, $(-1, 0)$. 25. $\left(\frac{1}{4}, 8\right)$, 26. $(-2, 0)$, $(6, +\infty)$. 27. $(-1, 2)$. 28. $(-\infty, 0), \left(\frac{1}{3}, 3\right)$. 29. $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, +\infty)$. 30. $(-\infty, 1), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, 4\right)$. 31. $\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $(4, +\infty)$. 32. Указание. Сложить дроби, равноотстоящие от концов; $(-7, -6)$, $(-5, -4), \left(-\frac{7}{2}, -3\right)$, $(-2, -1)$, $(0, +\infty)$.

§ 10. Иррациональные уравнения с одним неизвестным и смешанные системы

Указания. В уравнениях вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — рациональная функция от x, требовалось определить все корни, в том числе и комплексные. Аналогичное условие ставилось и по отношению к системам рациональных уравнений (§ 1—8). В § 10 требуется найти лишь действительные корни; при этом для каждого ради-

кала берется лишь его арифметическое значение. Возможна и иная точка зрения, когда для каждого радикала берутся все его значения (в том числе и комплексные); корнем уравнения в этом случае можно считать такое значение неизвестного, когда при подстановке этого значения в данное уравнение найдется такой набор радикалов, при котором уравнение удовлетворится. Так, например, с этой точки зрения уравнение $(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1})^4=1$ имеет корень $x=0$, так как одним из значений корня $\sqrt{x-4}$ при $x=0$ является $2i$, одним из значений корня $\sqrt{x-1}$ при $x=0$ является $-i$; значит, одним из значений суммы $\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$ при $x=0$ будет i, но $i^4=1$. Этой точки зрения в § 10 мы придерживаться не будем. Отметим, что в вопросах решения неравенств рассмотрение многозначных функций уже явно нецелесообразно (например, если ограничиться лишь арифметическим значением корня, то можно сказать, что неравенство $\sqrt{x}>1$ при $x=4$ выполнено, но если считать, что $\sqrt{4}=\pm 2$, то вопрос о выполнимости неравенства $\sqrt{x}>1$ при $x=4$ лишен смысла). Кроме того, множество комплексных чисел мы рассматриваем как неупорядоченное (знаки $>$ и $<$ не вводятся); таким образом, при решении неравенств нужно ограничиваться лишь действительными числами. Одним из весьма плодотворных методов решения уравнений (а также систем уравнений и неравенств) является введенное С. И. Новоселовым понятие смешанной системы, т. е. системы, состоящей из уравнений и неравенств. Это понятие позволяет во многих случаях от одного уравнения или системы уравнений перейти к эквивалентной смешанной системе. Этим дается строгое обоснование применений разнообразных преобразований уравнений, в процессе которых и не теряются и не приобретаются «лишние» корни. Особенно удобно применять этот прием по отношению к иррациональным уравнениям. Применение этого приема позволяет не производить «проверки» найденных «решений». Такая проверка иногда вызывает значительные технические трудности. Так, например, ниже, на стр. 488, указано, что уравнение $\sqrt{1-x^2}=\left(\frac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2$ имеет только один действительный корень $x=\frac{1}{9}\left(1+\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}}-3}\right)^2$; однако установить проверкой, что это значение x является корнем, технически трудно. Заметим, что весьма часто производятся такие преобразования уравнения, которые приводят к новому уравнению, являющемуся следствием предыдущего. В таком случае решения никогда не теряются, но «посторонние» корни могут появиться. Покажем, как может быть решено уравнение, данное в задаче 1: $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$ (1), каждым из этих двух методов.

Вариант I. Из уравнения (1) имеем: $x+5+2\sqrt{(x+5)(2x+8)}+2x+8=49$, $2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=3(12-x)$, $4(x+5)(2x+8)=9(12-x)^2$, $x^2-288x+1136=0$, $x_1=4$, $x_2=284$. Так как каждое из последующих уравнений есть следствие предыдущего, то в результате этих преобразований корни не могли быть потеряны. Проверка, однако, нужна, и с ее помощью мы устанавливаем, что только $x=4$ — корень, следовательно, и единственный корень данного уравнения. Большое количество «искусственных» приемов решения уравнений и заключается как раз в получении из данного уравнения — следствия; при таком способе проверка необходима: при ее помощи будет выделено множество всех решений.

Вариант II. Если x — действительный корень данного уравнения, то $x+5\geqslant 0$, $2x+8\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant -5$, $x\geqslant -4$, или $x\geqslant -4$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно (над полем действительных чисел) смешанной системе:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7,\quad x\geqslant -4. \tag{1}$$

Эта система эквивалентна такой (возводим в квадрат):

$$x+5+2\sqrt{x+5}\sqrt{2x+8}+2x+8=49,\qquad x\geqslant -4. \tag{2}$$

В самом деле, соотношения (2) следуют из соотношений (1). Обратно, если выполнено второе из соотношений (2), то $x+5\geqslant 0$, $2x+8\geqslant 0$ и, значит, первое из соотношений (2) можно переписать так: $(\sqrt{x+5})^2+2\sqrt{(x+5)(2x+8)}+(\sqrt{2x+8})^2=49$, или $(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8})^2=49$; так как $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}>0$, то $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$. Система (2) эквивалентна такой: $2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=3(12-x)$, $x\geqslant -4$. (2′). Система же (2′) эквивалентна следующей

$$4(x+5)(2x+8)=9(12-x)^2,\quad 12\geqslant x\geqslant -4. \tag{3}$$

В самом деле, соотношения (3) следуют из (2′); обратно: из соотношений (3) следуют соотношения (2′). Решая уравнение $4(x+5)(2x+8)=9(12-x)^2$ или $x^2-288x+1136=0$, получим: $x_1=284$, $x_2=4$. Условию $-4\leqslant x\leqslant 12$ удовлетворяет только $x=4$; следовательно, $x=4$ — единственный корень данного уравнения. Задачи, которые даны ниже, рекомендуется решить обоими методами. **2.** 0 и 4. **3.** 0 и 2. **4.** $\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$. **5.** $\frac{5}{3}$. **6.** 0, $9\sqrt[3]{9}$. **7.** 10. **8.** 6. **9.** $\frac{2+9\sqrt{7}}{10}$. **10.** $-\frac{4}{3}$. **11.** $-\frac{1}{11}$. **12.** Перенося второй радикал направо и возводя в квадрат, получим $10=-2\sqrt{2x^2+5x-9}$; отсюда следует, что уравнение не имеет корней. **13.** 5 и $\frac{1}{2}$. **14.** Возводя в квадрат, получим $1+2\sqrt{x^2+8x+15}=0$. Корней нет. **15.** Если x — корень данного уравнения, то $2x+4\geqslant 0$, $2-x\geqslant 0$, т. е. $-2\leqslant x\leqslant 2$; заметим, что если $-2\leqslant x\leqslant 2$, то $12x-8=2(6x-4)=2[(2x+4)-4(2-x)]=2[(\sqrt{2x+4})^2-(2\sqrt{2-x})^2]$. Данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=2\frac{(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}},$$

или

$$(-2\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+4})\left(1-2\frac{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}{\sqrt{9x^2+16}}\right)=0.$$

Таким образом, надо найти корни уравнений $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=0$ и $1-2\frac{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}{\sqrt{9x^2+16}}=0$, удовлетворяющие условию $-2\leqslant x\leqslant 2$. Решая уравнение $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=0$ или $\sqrt{2x+4}=2\sqrt{2-x}$, получим $x=\frac{2}{3}$; так как $-2<\frac{2}{3}<2$, то $x=\frac{2}{3}$ — корень данного уравнения. Уравнение $1-2\frac{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}{\sqrt{9x^2+16}}=0$ эквивалентно уравнению $\sqrt{9x^2+16}=2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})$, а это уравнение эквивалентно следующему: $9x^2+16=4[2x+4+4\sqrt{(2x+4)(2-x)}+4(2-x)]$, или $9x^2+16=4(12-2x+4\sqrt{8-2x^2})$, или $-9x^2+32-8x+16\sqrt{8-2x^2}=0$, или $4(8-2x^2)+16\sqrt{8-2x^2}-(x^2+8x)=0$, или $(2\sqrt{8-2x^2}-x)(2\sqrt{8-2x^2}+8+x)=0$; отсюда $2\sqrt{8-2x^2}=x$ и $2\sqrt{8-2x^2}+8+x=0$. Второе уравнение не имеет корней, так как из условия $8-2x^2\geqslant 0$ следует, что $|x|\leqslant 2$, а поэтому $2\sqrt{8-2x^2}+8+x>0$ при всех x, удовлетворяющих этому условию ($|x|\leqslant 2$). Первое уравнение перепишем так: $\sqrt{8-2x^2}=\frac{x}{2}$; решая его, получим $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, а так как $-2<\frac{4\sqrt{2}}{3}<2$, то $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ — корень данного уравнения. Итак, данное уравнение имеет два корня: $\frac{2}{3}$ и $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.* **16.** Перепишем данное уравнение так: $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2}$. Возводя обе части в квадрат и присоединяя к уравнению соответствующие неравенства, получим две следующие смешанные системы, эквивалентные данному уравнению:

$$2x^2-1-2\sqrt{2x^2-1}\sqrt{x^2-x+2}+x^2-x+2=$$
$$=2x^2+2x+3-2\sqrt{2x^2+2x+3}\sqrt{x^2-3x-2}+x^2-3x-2,$$
$$2x^2-1\geqslant x^2-x+2\geqslant 0,\quad 2x^2+2x+3\geqslant x^2-3x-2\geqslant 0$$

---

* Отметим, что в книге «Сборник алгебраических задач» Е. Пржевальского (Учпедгиз, 1941, в решении этой задачи, помещенном на стр. 157, задача дана под № 235), сказано, что $x=\frac{2}{3}$ не является корнем данного уравнения, а что $x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}$ и $x=\frac{4}{9}(-2\pm\sqrt{-14})$ — корни.

и

$$2x^2-1-2\sqrt{2x^2-1}\sqrt{x^2-x+2}+x^2-x+2=$$
$$=2x^2+2x+3-2\sqrt{2x^2+2x+3}\sqrt{x^2-3x-2}+x^2-3x-2,$$
$$x^2-x+2\geqslant 2x^2-1\geqslant 0,\quad x^2-3x-2\geqslant 2x^2+2x+3\geqslant 0,$$

или

$$\sqrt{2x^2-1}\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}\sqrt{x^2-3x-2},$$
$$x^2+x-3\geqslant 0, \quad (1)$$
$$x^2+5x+5\geqslant 0,$$
$$x^2-3x-2\geqslant 0$$

и

$$\sqrt{2x^2-1}\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}\sqrt{x^2-3x-2},$$
$$x^2+x-3\leqslant 0,$$
$$2x^2-1\geqslant 0, \quad (2)$$
$$x^2+5x+5\leqslant 0.$$

Исследуем систему (1). Эта система эквивалентна следующей:

$$(2x^2-1)(x^2-x+2)=(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2),$$
$$2x^2-1\geqslant 0,$$
$$x^2+x-3\geqslant 0, \quad (1')$$
$$x^2+5x+5\geqslant 0,$$
$$x^2-3x-2\geqslant 0.$$

Упрощая уравнение, получим $x^3+5x^2+7x+2=0$, откуда $x=-2$, $x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$. Значение $x=-2$ не удовлетворяет условию $x^2+x-3\geqslant 0$, значение $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ не удовлетворяет условию $2x^2-1\geqslant 0$, значение $x=-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ не удовлетворяет условию $x^2+5x+5\geqslant 0$. Значит, смешанная система (1) не имеет решений. Исследуем теперь систему (2); система (2) эквивалентна следующей:

$$(2x^2-1)(x^2-x+2)=(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2),$$
$$x^2+x-3\leqslant 0,$$
$$2x^2-1\geqslant 0, \quad (2')$$
$$x^2+5x+5\leqslant 0,$$
$$x^2-3x-2\geqslant 0.$$

Корни уравнения, входящего в эту смешанную систему: $x=-2$, $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. Исследуя значения $x=-2$, $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$, являющиеся корнями первого из уравнений смешанной системы (2'), убедимся в том, что $x=-2$ удовлетворяет всем условиям $x^2+x-3\leqslant 0$, $2x^2-1\geqslant 0$, $x^2+5x+5\leqslant 0$, $x^2-3x-2\geqslant 0$; $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ не удовлетворяет условию $2x^2-1\geqslant 0$, а $x=-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ не удовлетворяет неравенству $x^2+x-3\leqslant 0$. Значит, данное уравнение имеет только один корень $x=-2$ *. **17.** Переписывая данное уравнение в виде

$$(1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1} \quad (1)$$

---

* Этот пример заимствован из книги Е. Пржевальского «Сборник алгебраических задач» (Учпедгиз, 1941, задача № 213); в решении, данном на стр. 150, говорится, что уравнение имеет три корня: -2 и $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

и возводя обе части этого уравнения в квадрат, получим смешанную систему

$$\begin{gathered}(1-x)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)-2(1-x)\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+1)}+x+1=3x-1,\\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+1}\geqslant 0,\\ 1+\frac{3}{x}\geqslant 0,\quad x+1\geqslant 0,\quad 3x-1\geqslant 0,\end{gathered}\tag{2}$$

эквивалентную данному уравнению. Совокупность соотношений $1+\frac{3}{x}\geqslant 0$, $x+1\geqslant 0$, $3x-1\geqslant 0$ эквивалентна одному соотношению $3x-1\geqslant 0$, поэтому смешанная система (2) эквивалентна такой:

$$\begin{gathered}(1-x)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)-2(1-x)\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+1)}+x+1=3x-1,\\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+1}\geqslant 0,\\ 3x-1\geqslant 0,\end{gathered}\tag{3}$$

или

$$\begin{gathered}(1-x)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)-2(1-x)\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+1)}+2(1-x)=0,\\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+1}\geqslant 0,\\ 3x-1\geqslant 0.\end{gathered}\tag{4}$$

Корень $x=1$ уравнения, входящего в систему (4), не удовлетворяет соотношению $(1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+1}\geqslant 0$, поэтому смешанная система (4) эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}(1-x)\left(1+\frac{3}{x}\right)-2\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+1)}+2=0,\\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+1}\geqslant 0,\\ 3x-1\geqslant 0,\end{gathered}$$

или

$$\frac{3}{x}-x=2\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+1)},\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+x}\geqslant 0,\ 3x-1\geqslant 0,$$

или

$$\left(\frac{3}{x}-x\right)^2=4\left(1+\frac{3}{x}\right)(x+1),\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+x}\geqslant 0,\ \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3},$$

или

$$\begin{gathered}\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{3}{x}\right)-28=0,\\ (1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+x}\geqslant 0,\ \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}.\end{gathered}\tag{5}$$

Решая уравнение $\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{3}{x}\right)-28=0$, получим $x+\frac{3}{x}=2\pm 4\sqrt{2}$. Так как должно быть $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$, то остается только $x+\frac{3}{x}=2+4\sqrt{2}$, или $x^2-2(1+2\sqrt{2})x+3=0$, откуда $x_1=3(1+\sqrt{2})$, $x_2=\sqrt{2}-1$. Так как $1-x_1<0$, то условие $(1-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1+x}\geqslant 0$ при $x=x_1$ не выполняется. Значение же $x=\sqrt{2}-1$ удовлетворяет всем условиям (5). Итак, данное уравнение

имеет только один корень $x=\sqrt{2}-1$*. 18. Указание. $\sqrt[4]{629-x}=a$, $\sqrt[4]{77+x}=b$, $a^4+b^4=706$, $a+b=8$. Ответ: 4 и 548. 19. 16 и 81. 20. 0. 21. 81. 22. $\sqrt{x^2+2}=a>0, \sqrt{x^2+2x+3}=b>0, b^2-a^2+\frac{b^2-a^2-1}{2}a+\frac{b^2-a^2+1}{2}b=0, b-a=0$, откуда $x=-\frac{1}{2}$, остается $b+a+\frac{(b+a)^2}{2}+\frac{1}{3}>0$ в силу того, что $a>0$ и $b>0$ (больше корней нет). 23. $\pm 3\sqrt{21}$. 24. 6, —3. 25. 2, $\frac{4}{3}$. 26. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. 27. 3, $\frac{9}{8}(9-\sqrt{97})$. 28. $\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=1, \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}=a>0, \sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=b>0, a-b=1, a^4+b^4=2$; отсюда находим ab, а затем легко находится и x. Интересно отметить, что полученное для x значение немного больше 1 (условие $x>1$ является необходимым ограничением на корни данного уравнения). Ответ: $\frac{2}{15}\sqrt{27+12\sqrt{6}}$. 29. $\frac{25}{16}$. 30. 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 31. 11. 32. 3. 33. 0 и 2. 34. $\frac{1}{4}$. 35. 1. 36. $\frac{16}{25}$. 37. 2. 38. $\pm\sqrt{3}$. 39. $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. 40. $\sqrt[3]{2-x}=a, \sqrt{x-1}=b, a=1-b, a^3+b^2=1, (1-b)^3+b^2=1$ и т. д. Ответ: 1, 2, 10. 41. 8. 42. ± 2. 43. 3, $-\frac{1}{3}$. 44. После возведения в квадрат можно определить $\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, затем $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ как корни квадратного уравнения; учесть, что должно быть $|x|<1$. Ответ: $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$. 45. Ясно, что корни $x>0$. Подстановка $x=\frac{1}{z}$ приводит к предыдущему уравнению. Ответ: $\frac{5}{3}, \frac{5}{4}$. 46. $\pm 13, \pm 3\sqrt{21}$. 47. 4, 11, $\frac{15}{2}\pm\frac{7}{4}\sqrt{\frac{47}{3}}$. 48. $\pm\frac{2}{\sqrt{1+2\sqrt[3]{4}}}$. 49. $\pm\frac{1}{2}$. 50. Корнями являются все числа x такие, что $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$. 51. $\frac{12}{127}$. 52. 4416. 53. Корней нет. 54. 78. 55. $(3-x)^{\frac{5}{3}}+(x-1)^{\frac{5}{3}}=2(x-1)^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$. Возводя в куб по формуле $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ и учитывая это уравнение, получим $(3-x)^5+(x-1)^5+6(x-1)^2(3-x)^2=8(x-1)(3-x)$. Полагая $3-x=a$, $x-1=b$ будем иметь $a+b=2$, $a^5+b^5+6a^2b^2=8ab$. Отсюда найдем ab. Ответ: $x=2$. 56. $\pm\frac{27}{14}, \pm\frac{7}{6}$. 57. $x=39$ не является корнем данного уравнения, поэтому данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}}-(x-6)}{1-\sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}}}=30.$$

Положим $\sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}}=u$; получим систему $\frac{(39-x)(u-u^5)}{1-u}=30, u^5=\frac{x-6}{39-x}$. Из второго уравнения находим ($u^5\neq -1$):

$$x=\frac{39u^5+6}{1+u^5}, \quad 39-x=\frac{33}{1+u^5}$$

и первое уравнение системы принимает вид $\frac{33u(1-u^4)}{(1+u^5)(1-u)}=30$, или $\frac{3(u+1)(10u^4-21u^3+10u^2-21u+10)}{1+u^5}=0$. Для определения u имеем возвратное

* Этот пример заимствован из книги «Сборник алгебраических задач» Е. Пржевальского (Учпедгиз, 1941, задача № 275). Решение задачи дано на стр. 171 и 172. В ответе даны четыре корня: $3\pm 3\sqrt{2}$ и $-1\pm\sqrt{2}$.

уравнение $10u^4-21u^3+10u^2-21u+10=0$. Решая его подстановкой $z=u+\frac{1}{u}$ и ограничиваясь лишь действительными корнями (так как в данном случае для мнимых значений u и x будет мнимое), будем иметь $u_1=2$, $u_2=\frac{1}{2}$ и соответственно этому $x_1=38$, $x_2=7.58.\ 9.\ 59.\ 2$, $-\frac{1}{511}$. **60.** Корнем является любое число $x\geqslant 2$. **61.** Корнем является любое число $x\geqslant 1$. **62.** Должно быть $2-x^3\geqslant 0$, $x\leqslant\sqrt[3]{2}$. Так как справа стоит неотрицательное число, то $x^2-2\geqslant 0$, откуда или $x\geqslant\sqrt{2}$ или $x\leqslant-\sqrt{2}$; условие $x\geqslant\sqrt{2}$ противоречит условию $x\leqslant\sqrt[3]{2}$, значит остается $x\leqslant-\sqrt{2}$; при выполнении этого условия будет $2-x^3>0$ и $x^2-2\geqslant 0$. Теперь находим $(x^2-2)^2=(2-x^3)^3$, или $x^9-6x^6+x^4+12x^3-4x^2+4=0$, или $x^4(1+x^5)-6x^6+12x^3+4(1-x^2)=0$. Так как $x\leqslant-\sqrt{2}$, то $x^4(1+x^5)<0$, $-6x^6<0$, $12x^3<0$, $4(1-x^2)<0$ — данное уравнение корней не имеет. **63.** $-\frac{1}{2}$, 2. **64.** 2 и 11. **65.** Уравнение не имеет корней. **66.** $\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}$, $\frac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}$. **67.** Полагая $\sqrt{x}=y$ и $\frac{2}{3}-\sqrt{x}=z$, сводим уравнение к системе $y^4+z^4=1$, $y+z=\frac{2}{3}$, решая которую, находим единственный (действительный) корень данного уравнения $x=\frac{1}{9}\left(1+\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}}-3}\right)^2$.

§ 11. Иррациональные уравнения с одним неизвестным, содержащие параметры

1. Данное уравнение имеет один корень $\frac{a(a-4)}{2(2a+1)}$ тогда и только тогда, когда или $a\leqslant-2$ или $-\frac{1}{2}<a\leqslant 0$. **2.** $\sqrt{x-3}=y$, $\sqrt{x-7}=z$, $y+z=a$, $y^2-z^2=4$. Очевидно, должно быть $a>0$ (если $a\leqslant 0$, уравнение не имеет корней). При $a>0$, $y-z=\frac{4}{a}$, $y=\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(a-\frac{4}{a}\right)$; так как $z\geqslant 0$, то $a\geqslant 2$. Итак, при $a\geqslant 2$ уравнение имеет корень $x=3+y^2=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}$. **3.** Если $a<0$, то уравнение имеет корень $x=-2a$; если $a>0$, уравнение корней не имеет; если $a=0$, уравнению удовлетворяет любое положительное число. **4.** Если $a>2$, то уравнение имеет два корня: $\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2-1}}$. Если $a<2$, уравнение корней не имеет. Если $a=2$, то уравнение имеет один корень $x=0$. **5.** Уравнение имеет один корень $\pm\sqrt[8]{\frac{2}{a^2(4-a^2)}}$ только в случае $2\leqslant a^2<4$; знак корня такой же, как и у a. **6.** $x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=a\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=a$, $\sqrt{x}=y$, $\sqrt{x-1}=z$, $y-z=a$, $y^2-z^2=1$, $y+z=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqslant 0$, откуда $a>0$, $z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-a\right)\geqslant 0$, при $a>0$ это дает $a\leqslant 1$. Итак, при $0<a\leqslant 1$ данное уравнение имеет один корень $\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$. **7.** При $a>0$ это уравнение имеет два корня: 0 и $\frac{64a}{1025}$; при $a=0$ — один: $x=0$; при $a<0$ — ни одного. **8.** Если $a<-2$, то имеется два корня: 0 и $\frac{1}{(2+a)^2}$, если $a\geqslant-2$, то один корень 0. **9.** Возводя обе части уравнения в куб, получим: $a+x-a+x+3\sqrt[3]{a^2-x^2}(\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{a+x})=\sqrt{a^2-x^2}$, $2x+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\times\times\left(-\sqrt[6]{a^2-x^2}\right)=\sqrt{a^2-x^2}$, $2x-3\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-x^2}$, $x=2\sqrt{a^2-x^2}$, откуда $x=\pm\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Проверка: для $x=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ имеем $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a+\frac{2a}{\sqrt{5}}}-$

$$-\sqrt[3]{a-\frac{2a}{\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{a}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3}\right]=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=$$

$=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{5}}$. Правая часть: $\sqrt[6]{a^2-x^2}=\sqrt[6]{a^2-\frac{4a^2}{5}}=\frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{5}}=\frac{|\sqrt[3]{a}|}{\sqrt[6]{5}}$. Если $a>0$, то $x=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ — корень данного уравнения, а если $a<0$, то $x=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ — не корень данного уравнения. Аналогично убеждаемся в том, что если $a>0$, то $x=\frac{-2a}{\sqrt{5}}$ — не корень данного уравнения, а если $a<0$, то $x=-\frac{2a}{\sqrt{5}}$ — корень данного уравнения. **10.** Перепишем данное уравнение так:

$$x-a=\sqrt{a+\sqrt{x}}. \tag{1}$$

Данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе:

$$(x-a)^2=a+\sqrt{x},\quad x-a>0. \tag{2}$$

В самом деле, если выполнено равенство (1), то будет выполнено и равенство $(x-a)^2=a+\sqrt{x}$. Далее, из равенства (1) следует, что $x-a>0$ (так как $x-a=\sqrt{a+\sqrt{x}}$, а $\sqrt{a+\sqrt{x}}>0$). Таким образом, из равенства (1) следуют оба соотношения (2); обратно: если выполнены соотношения (2), то в силу условия $a>1$ имеем $a+\sqrt{x}>0$, а из равенства $(x-a)^2=a+\sqrt{x}$ следует $\sqrt{(x-a)^2}=\sqrt{a+\sqrt{x}}$, $|x-a|=\sqrt{a+\sqrt{x}}$, но $x-a>0$; значит, $|x-a|=x-a$, а потому $x-a=\sqrt{a+\sqrt{x}}$, т. е. мы получили равенство (1). Таким образом, любое значение x, удовлетворяющее равенству (1), будет удовлетворять и системе (2), а любое значение, удовлетворяющее соотношениям (2), будет удовлетворять и равенству (1). Значит, уравнение (1) эквивалентно смешанной системе (2). Смешанную систему (2) перепишем так: $(x-a)^2-(\sqrt{x})^2+x-\sqrt{x}-a=0$, $x-a>0$, или

$(x-a-\sqrt{x})(x-a+\sqrt{x})+x-\sqrt{x}-a=0$, $x-a>0$,

или

$$(x-\sqrt{x}-a)(x+\sqrt{x}-a+1)=0,\quad x-a>0. \tag{2'}$$

Решая уравнение $x-\sqrt{x}-a=0$, находим $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$ (так как $\sqrt{x}>0$, а $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})<0$, то равенство $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})$ не имеет места ни при каком действительном значении x). Далее находим $x=\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2$, или $x=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$ — это значение x удовлетворяет и второму соотношению смешанной системы (2); в самом деле, $x-a=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}-a=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>0$. Значит найденное значение $x=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$ есть корень данного уравнения. Далее решаем уравнение $x+\sqrt{x}+1-a=0$. Так как $1-a<0$, то это квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$ имеет действительные корни различных знаков, а так как $\sqrt{x}\geqslant 0$, то $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1-4(1-a)}}{2}=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$, откуда $x=\frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$. Отсюда находим $x-a=\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}<0$, что противоречит неравенству $x-a>0$, входящему в смешанную систему (2'), эквивалентную данной. Таким образом, $x=\frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ не есть корень данного уравнения.

Итак, данное уравнение имеет только один корень $x=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$. **11.** Пусть x — действительный корень данного уравнения. Тогда $0\leqslant x\leqslant 1$, ибо в данное уравнение входят радикалы $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x^2}$. Полагая $\sqrt{x}=y$, $a-\sqrt{x}=z$, будем иметь: $\sqrt{1-y^4}=z^2$, $y+z=a$, $0\leqslant y\leqslant 1$, откуда $y^4+z^4=1$, $y+z=a$, $0\leqslant y\leqslant 1$ (2). Итак, если x — любой действительный корень данного уравнения, то $0\leqslant x\leqslant 1$ и числа $y=\sqrt{x}$, $z=a-\sqrt{x}$ образуют решение смешанной системы (2). Обратно:

если y и z — два действительных числа, образующих решение смешанной системы (2), то $x=y^2$ есть действительный корень данного уравнения. В самом деле, если y и z — действительные числа, такие, что: $y^4+z^4=1$, $y+z=a$, $0\leqslant y\leqslant 1$ и $x=y^2$, т. е. $y=\sqrt{x}$, то $z=a-y=a-\sqrt{x}$, $1-y^4=z^4$, $1-x^2=(a-\sqrt{x})^4$, и так как $0\leqslant x\leqslant 1$ (это следует из того, что $0\leqslant y\leqslant 1$ и $y=\sqrt{x}$), то $1-x^2\geqslant 0$; значит, из равенства $1-x^2=(a-\sqrt{x})^4$ следует $\sqrt{1-x^2}=(a-\sqrt{x})^2$. Итак, вопрос сводится к отысканию действительных решений смешанной системы:

$$y^4+z^4=1,\ y+z=a,\ 0\leqslant y\leqslant 1. \tag{2}$$

Если все такие решения будут найдены, то, выбирая из этих решений значения y_1, y_2, y_3, ..., мы получим все решения данного уравнения: $x_1=y_1^2$, $x_2=y_1^2$, ... Итак, будем решать смешанную систему (2). Замечая, что $y^4+z^4=(y^2+z^2)^2-2(yz)^2=[(y+z)^2-2yz]^2-2(yz)^2$, будем иметь $[(y+z)^2-2yz]^2-2(yz)^2=1$, $y+z=a$, $0\leqslant y\leqslant 1$ (2). Эта система эквивалентна следующей:

$$y+z=a,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1,\ \ (a^2-2yz)^2-2(yz)^2=1. \tag{3}$$

В самом деле, из соотношений (2) следуют соотношения (3), а из соотношений (3) следуют соотношения (2). Из первого уравнения системы (3) находим $2(yz)^2-4a^2(yz)+a^4-1=0$, откуда $yz=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}$, так что система (3) эквивалентна следующей:

$$yz=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+1}{2}},\qquad y+z=a,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{4}$$

или такой

$$y(a-y)=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+1}{2}},\ y+z=a,\ 0\leqslant y\leqslant 1. \tag{5}$$

Первое уравнение этой системы дает $y^2-ay+a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}=0$. Уравнение $y^2-ay+a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}=0$ имеет мнимые корни. Решаем поэтому только уравнение $y^2-ay+a^2-\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}=0$; получаем $y_{1,2}=\frac{a}{2}\left(1\pm\sqrt{4\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^4}}-3}\right)$. Так как $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$, то $4\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^4}}-3\geqslant 4\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{4^4}{2\cdot 3^4}}-3=\frac{2}{3^2}\sqrt{2\cdot 3^4+2\cdot 4^4}-3=\frac{2\sqrt{674}}{3^2}-3\geqslant\frac{2\cdot 25}{9}-3=\frac{50}{9}-3>0$, поэтому y_1 и y_2 действительны, а так как

$$y_1y_2=a^2-\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}=\frac{a^4-\frac{a^4+1}{2}}{a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}}=\frac{a^4-1}{2\left(a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}\right)}<0,$$

то эти корни y_1 и y_2 разных знаков. Так как $0\leqslant y\leqslant 1$, то следует взять только

$$y=\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{4\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^4}}-3}\right).$$

Далее,

$$1-y=1-\frac{a}{2}-\sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(a-1)^4}{\left[1-\frac{a}{2}\sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}}\right]\left[1-a+a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}\right]}>0.$$

Значит, данное уравнение имеет только один действительный корень

$$x=y^2=\frac{a^2}{4}\left(1+\sqrt{4\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^4}}-3}\right)^2.$$

12. Если $a=b\neq 0$, то данное уравнение не имеет корней; если $a=b=0$, то корнем является любое число x, такое, что $x\leqslant 0$; если $a\neq b$, но $b(b-2a)(b-a)>0$, то корней нет; если $a\neq b$, $b(b-2a)(b-a)\geqslant 0$, то имеется один корень $x=\dfrac{b^2}{2(b-a)}$. **13.** Если $a>b$, то $x=b$; если $a<b$, то $x=a$; если $a=b$, то $x=a$.

14. Если $a>b>0$, то $x=\dfrac{(a-b)^2}{4b}$; если $a=0$, $b\neq 0$ или $a\neq 0$, $b=0$, то уравнение не имеет корней; если $a=b=0$, то корнем служит любое число, $x\geqslant 0$; если $a<b$ или $a<0$ или $b<0$, то корней нет. **15.** Если $2a+b>0$, $a+2b>0$, то уравнение имеет один корень $x=2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$; если $2a+b<0$, $a+2b<0$, то один корень $x=-2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$. Если $2a+b$ и $a+2b$ разных знаков, то корней нет. Если $b=-2a\neq 0$, то уравнение имеет один корень $x=-2a$; если $a=-2b\neq 0$, то один корень $x=-2b$; если $a=b=0$, то уравнение обращается в тождество. **16.** Если $b\geqslant a+2$, то уравнение имеет корень $\dfrac{1}{4}[(b-a)^2+4(b+a)+4]$; если $b<a+2$, то корней нет. **17.** Если $a>0$, $|b|\geqslant a$, то $x=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$; в противном случае корней нет. **18.** Если $a=0$, $b\neq 0$, то корень $x=0$; если $a=0$, $b=0$, то корнем является любое число $x\geqslant 0$. При $a>0$ корней нет. При $a<0$ и $a^2-b^2\leqslant 0$ — корни $x=0$ и $x=\dfrac{5a^2-b^2}{4a}$; если $a<0$, $a^2-b^2>0$, то корней нет.

19. Положим $\sqrt{a-x}=\alpha$, $\sqrt{b-x}=\beta$, $\sqrt{c-x}=\gamma$; тогда $x=a-\alpha^2=b-\beta^2=c-\gamma^2=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta$, откуда

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=a,\ (\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=b,\ (\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)=c. \tag{A}$$

Отсюда

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\sqrt{abc},$$

$$\alpha+\beta=\frac{1}{c}\sqrt{abc},\ \beta+\gamma=\frac{1}{a}\sqrt{abc},\ \gamma+\alpha=\frac{1}{b}\sqrt{abc},$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sqrt{abc},\ \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sqrt{abc},$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\sqrt{abc}. \tag{B}$$

Так как α, β, γ — действительные неотрицательные числа, то ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ — по условию) $abc>0$, $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$. Из $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ следует, что $c>0$ и аналогично $b>0$, $a>0$; следовательно, $abc>0$. Итак, уравнение имеет корень лишь в случае

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a},\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}>\frac{1}{b},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}. \tag{C}$$

Если эти неравенства выполнены, то числа α, β и γ, определяемые соотношениями (B), будут положительны и будут удовлетворять системе (A), из которой следуют соотношения

$$a-\alpha^2=b-\beta^2=c-\gamma^2=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta. \tag{D}$$

Полагая $a-\alpha^2=b-\beta^2=c-\gamma^2=x\ (>0)$, получим $\alpha=\sqrt{a-x}$, $\beta=\sqrt{b-x}$, $\gamma=\sqrt{c-x}$ и, подставляя это в (D), будем иметь $x=\sqrt{b-x}\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\sqrt{a-x}+\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}$. Итак, уравнение имеет в случае выполнения условий (C) один корень: $x=a-\dfrac{1}{4}abc\left(-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2$. **20.** Если $b\geqslant a$, уравнение имеет единственный корень $2\sqrt{ab}$; если $b<a$, то корней нет. **21.** Если $b<a$, то уравнение имеет один корень $x=0$; если $b\geqslant a$, то уравнение имеет корни 0 и $\dfrac{(\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}$. **22.** $\left(\dfrac{n}{b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$. **23.** $\dfrac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$. **24.** Если $a<1$, то

корней нет, если $a \geqslant 1$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. **25.** Если $a \neq 0$, то уравнение не имеет корней; если $a = 0$, то уравнение имеет один корень $x = 0$. **26.** $x = -a$. **27.** $\pm a$. **28.** $x_1 = 0$, $x_2 = a$. **29.** 0. **30.** Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет; если $a > 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{4a}{3}$. **31.** Полагая $\sqrt[4]{a+x} = u$, $\sqrt[4]{a-x} = v$, получим $(u+v)^2(u^2+v^2) = a(u^4-v^4)$, $u^4+v^4 = 2a$, или, так как $u+v \neq 0$, $u^2+v^2 \neq 0$, то $u+v = a(u-v)$, $u^4+v^4 = 2a$. Отсюда следует, что при $a < 0$ уравнение не имеет корней; если $a > 0$, то, полагая далее $u-v = \lambda$, $u+v = \mu$, найдем $\mu = a\lambda$ и затем найдем

$$\lambda = \frac{2\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^4+6a^2+1}}, \quad \mu = \frac{2a\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^4+6a^2+1}},$$

а так как $\mu - \lambda = 2v > 0$, то $a \geqslant 1$; значит, при $a < 1$ уравнение не имеет корней. Если же $a \geqslant 1$, то

$$x = \frac{4a^2(a+1)}{a^4+6a^2+1} \left(v = \frac{(a-1)\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^4+6a^2+1}} \right).$$

Проверкой убеждаемся, что это корень (следовательно, и единственный корень) данного уравнения. **32.** a. **33.** Умножая обе части уравнения на $\sqrt{1+x}+1$, находим один из корней $x_1 = 0$. Далее надо решить уравнение $\sqrt{1-x}+1 = a(\sqrt{1+x}+1)$. Полагая $\sqrt{1-x}+1 = \lambda$, $\sqrt{1+x}+1 = \mu$, находим $(\lambda-1)^2+(\mu-1)^2 = 2$, $\lambda = a\mu$. Отсюда $\mu = \frac{2(a+1)}{a^2+1}$, $\lambda = \frac{2a(a+1)}{a^2+1}$. Из условия $\lambda \geqslant 1$, $\mu \geqslant 1$ находим $\sqrt{2}-1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}+1$. При этих условиях данное уравнение имеет еще корень $x = \frac{4a(1-a^2)}{(a^2+1)^2}$. Если же $a < \sqrt{2}-1$ или $a > \sqrt{2}+1$, то данное уравнение имеет только корень $x = 0$. Полезно убедиться непосредственной подстановкой в уравнение $\sqrt{1-x}+1 = a(\sqrt{1+x}+1)$, что в случае $\sqrt{2}-1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}+1$ значение $x = \frac{4a(1-a^2)}{(a^2+1)^2}$ есть корень этого уравнения. **34.** При $a \leqslant 1$ уравнение имеет корень $x = \frac{a+1}{2}$, при $a > 1$ уравнение корней не имеет. **35.** $a\frac{a+\sqrt{1+a^2}}{2}$ **63.** Положим $x^2+2ax+\frac{1}{16} = y$, тогда $y = -a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$, $y+a = \sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$. При $y+a \geqslant 0$ это соотношение эквивалентно такому $(y+a)^2 = a^2+x-\frac{1}{16}$ или $x = y^2+2ay+\frac{1}{16}$. Итак, корнями данного уравнения будут значения x, входящие в решения смешанной системы:

$$\begin{gathered} y = x^2+2ax+\frac{1}{16}, \\ x = y^2+2ay+\frac{1}{16}, \\ y+a \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Из (1) находим

$$y-x = x^2-y^2+2a(x-y),$$

или

$$(x-y)(x+y+2a+1) = 0. \tag{A}$$

Пусть $x-y = 0$, т. е. $x = y$. Тогда $y = y^2+2ay+\frac{1}{16}$, или $y+a = (y+a)^2-a^2+a+\frac{1}{16}$, $y+a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}$. Отсюда следует, что система (1) не имеет решений, если $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$; если же $a \geqslant \frac{3}{4}$ или $a \leqslant \frac{1}{4}$, то значения для $y+a$ будут действительны. Одно из этих значений

$\frac{1}{2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}$ положительно. Поэтому при $a \geqslant \frac{3}{4}$ или $a \leqslant \frac{1}{4}$ данное уравнение всегда имеет корень

$$x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}. \qquad (2)$$

Исследуем второе значение для $y+a$:

$$y+a = \frac{1}{2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}.$$

Условие $y+a \geqslant 0$ дает $\frac{1}{4} \geqslant \left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)$, откуда

$$\frac{2-\sqrt{5}}{4} \leqslant a \leqslant \frac{2+\sqrt{5}}{4}. \qquad (3)$$

Значит, если $a < \frac{2-\sqrt{5}}{4}$ или $a > \frac{2+\sqrt{5}}{4}$, то $x_2 = -a+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}$ — не корень данного уравнения. Если же $\frac{2-\sqrt{5}}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$ или $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant \frac{2+\sqrt{5}}{4}$, то данное уравнение имеет еще корень

$$x_2 = -a+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)}. \qquad (4)$$

Из соотношения (А) далее следует, что $x+y+2a+1=0$, откуда $x=-y-2a-1$, а значит, $-y-2a-1=y^2+2ay+\frac{1}{16}$ или $(y+a)^2+y+a-a^2+a+\frac{17}{16}=0$, откуда $y+a=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}$. Перед корнем следует взять только знак $+$: $y+a=-\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}$, и это значение для $y+a$ будет не отрицательно, если или $a \leqslant \frac{2-\sqrt{21}}{4}$, или $a \geqslant \frac{2+\sqrt{21}}{4}$; оно будет отрицательно, если $\frac{2-\sqrt{21}}{4} < a < \frac{2+\sqrt{21}}{4}$. Итак, если $a \leqslant \frac{2-\sqrt{21}}{4}$ или $a \geqslant \frac{2+\sqrt{21}}{4}$, то уравнение имеет корень $x_3 = -a-\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}$. Итак, если $-\infty < a \leqslant \frac{2-\sqrt{21}}{4}$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}$, $x_3 = -a-\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}$; если $\frac{2-\sqrt{21}}{4} < a \leqslant \frac{2-\sqrt{5}}{4}$, то уравнение имеет только один корень: $x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a+\frac{13}{16}}$; если $\frac{2-\sqrt{5}}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}$, $x_2 = -a+\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}$; если $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$, то уравнение не имеет корней; если $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant \frac{2+\sqrt{5}}{4}$, то уравнение имеет корни $x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}$, $x_2 = -a+\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}$; если $\frac{2+\sqrt{5}}{4} < a < \frac{2+\sqrt{21}}{4}$, то уравнение имеет один корень $x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}$; наконец, если $a \geqslant \frac{2+\sqrt{21}}{4}$, то данное уравнение имеет два корня: $x_1 = -a+\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}$, $x_3 = -a-\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}$. Геометрическая интерпретация: система $y = x^2+2ax+\frac{1}{16}$, $y = -a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$

или $y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16}$, $x = y^2 + 2ay + \frac{1}{16}$, $y + a \geqslant 0$ представляет собою две линии: парабола $y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16}$ и «верхняя» часть дуги параболы $x = y^2 + 2ay + \frac{1}{16}$. Эти линии, как показано аналитически, могут пересекаться в двух, в одной точке или вовсе не пересекаться. Рекомендуется построить эти линии для следующих значений параметра: I. $a = -1$. II. $a = -\frac{1}{4}$. III. $a = \frac{1}{8}$. IV. $a = \frac{1}{2}$. V. $a = 1$. VI. $a = \frac{3}{2}$. VII. $a = 2$. **37.** При $a = b$ данное уравнение — тождество. Если $a \neq b$, $ab < 0$, $a + b \neq 0$, то уравнение имеет три корня: 0, $\pm\sqrt{ab}$. Если $a \neq b$, но или $ab \geqslant 0$, или $a + b = 0$, то уравнение имеет только один корень $x = 0$. **38.** Если $|c| < 2$, то уравнение не имеет корней. Если $c = 1$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{a-b}{2}$. Если $c = -1$, то уравнение не имеет корней. Если $|c| > 2$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{2a - b(c + \sqrt{c^2-4})}{2 + c + \sqrt{c^2-4}}$, $x_2 = \frac{2a - b(c - \sqrt{c^2-4})}{2 + c - \sqrt{c^2-4}}$ (в случае $|c| > 2$ знаменатели этих выражений отличны от нуля). **39.** Решение: данное уравнение эквивалентно двум смешанным системам:

$$\left.\begin{gathered}(a^2x^2 - b^2)(1 - x^2) + (1 + x^2)(a - cx)^2 - \\ - 2x(a - cx)\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - x^2) + (a - cx)^2} = 0, \\ |x| < 1\end{gathered}\right\} \quad \text{(I)}$$

и

$$\left.\begin{gathered}(a^2x^2 - b^2)(1 - x^2) + (1 + x^2)(a - cx)^2 + \\ + 2x(a - cx)\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - x^2) + (a - cx)^2} = 0, \\ |x| > 1\end{gathered}\right\} \quad \text{(II)}$$

Будем решать смешанную систему (I). Уравнение, входящее в эту систему, можно переписать так:

$$(a^2 - x^2)(1 - x^2) + (a - cx)^2 - 2x(a - cx)\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - x^2) + (a - cx)^2} + \\ + x^2(a - cx)^2 = a^2(1 - x^2)^2, \quad |x| < 1,$$

или $\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - x^2) + (a - cx)^2} - x(a - cx) = \pm a(1 - x^2)$, $|x| < 1$. Эта смешанная система эквивалентна системе $(a^2 - b^2)(1 - x^2) + (a - cx)^2 = [x(a - cx) \pm a(1 - x^2)]^2$, $|x| < 1$, $x(a - cx) \pm a(1 - x^2) \geqslant 0$. Упрощая уравнение, получим (можно в силу $|x| < 1$ сократить на $1 - x^2$):

$$(a - cx)^2 \mp 2ax(a - cx) + a^2x^2 = b^2,$$
$$|x| < 1, \quad x(a - cx) \pm a(1 - x^2) \geqslant 0$$

или

$$\left.\begin{gathered}a - cx + ax = b, \\ |x| < 1, \\ x(a - cx) - a(1 - x^2) \geqslant 0;\end{gathered}\right\} \quad \text{(A)}$$

$$\left.\begin{gathered}a - cx + ax = -b, \\ |x| < 1, \\ x(a - cx) - a(1 - x^2) \geqslant 0;\end{gathered}\right\} \quad \text{(B)}$$

$$\left.\begin{gathered}a - cx - ax = b, \\ |x| < 1, \\ x(a - cx) + a(1 - x^2) \geqslant 0;\end{gathered}\right\} \quad \text{(C)}$$

$$\left.\begin{gathered}a - cx - ax = -b, \\ |x| < 1, \\ x(a - cx) + a(1 - x^2) \geqslant 0.\end{gathered}\right\} \quad \text{(D)}$$

Исследуем систему (A): если $a = c$, то она не имеет решений; если $a \neq c$, то уравнение, входящее в систему (A), имеет решение $x = \frac{b-a}{a-c}$. Это значение x будет

корнем данного уравнения, если $\left|\frac{b-a}{a-c}\right|<1$ и если

$$\frac{b-a}{a-c}\left(a-c\frac{b-a}{a-c}\right)-a\left[1-\frac{(b-a)^2}{(a-c)^2}\right]\geqslant 0;$$

если же хотя бы одно из этих неравенств не выполнено, система (A) не имеет решений. Система (B) не имеет решения в случае $a=c$. Если $a\neq c$, то из уравнения системы (B) находим $x=\frac{a+b}{c-a}$; это значение x будет корнем данного уравнения, если

$$\left|\frac{a+b}{c-a}\right|<1 \text{ и } \frac{a+b}{c-a}\left(a-c\frac{a+b}{c-a}\right)-a\left[1-\frac{(a+b)^2}{(c-a)^2}\right]\geqslant 0;$$

если же не выполнено хотя бы одно из этих неравенств, система (B) не имеет решений. Система (C) не имеет решений, если $a=-c$. Если же $a\neq -c$, то $x=\frac{a-b}{a+c}$ будет решением данного уравнения, при условии, что $\left|\frac{a-b}{a+c}\right|<1$ и

$$\frac{a-b}{a+c}\left(a-c\frac{a-b}{a+c}\right)+a\left[1-\frac{(a-b)^2}{(a+c)^2}\right]\geqslant 0.$$

Если не выполнено хотя бы одно из этих соотношений, то система (C) не имеет решений. Система (D) несовместна, если $a+c=0$; если же $a+c\neq 0$, то $x=\frac{a+b}{a+c}$ будет решением данного уравнения, при условии, что $\left|\frac{a+b}{a+c}\right|<1$ и

$$\frac{a+b}{a+c}\left(a-c\frac{a+b}{a+c}\right)+a\left[1-\frac{(a+b)^2}{(a+c)^2}\right]\geqslant 0.$$

Если не выполнено хотя бы одно из этих неравенств, система (D) не имеет решений. Исследуем систему (II). Исследование этой системы приводит, аналогично предыдущему, к исследованию следующих систем:

$$\left.\begin{array}{c} a-cx+ax=b,\\ |x|>1,\\ -x(a-cx)+a(1-x^2)\geqslant 0;\end{array}\right\} \quad (A')$$

$$\left.\begin{array}{c} a-cx+ax=-b,\\ |x|>1,\\ -x(a-cx)+a(1-x^2)\geqslant 0;\end{array}\right\} \quad (B')$$

$$\left.\begin{array}{c} a-cx-ax=b,\\ |x|>1,\\ -x(a-cx)-a(1-x^2)\geqslant 0;\end{array}\right\} \quad (C')$$

$$\left.\begin{array}{c} a-cx-ax=-b,\\ |x|>1,\\ -x(a-cx)-a(1-x^2)\geqslant 0.\end{array}\right\} \quad (D')$$

Система (A') имеет решение $x=\frac{b-a}{a-c}$ только в случае

$$a\neq c,\left|\frac{b-a}{a-c}\right|>1,\ -\frac{b-a}{a-c}\left(a-c\frac{b-a}{a-c}\right)+a\left[1-\frac{(b-a)^2}{(a-c)^2}\right]\geqslant 0.$$

Система (B') имеет решение $x=\frac{a+b}{c-a}$ только в случае

$$a\neq c,\ \left|\frac{a+b}{c-a}\right|>1,\ -\frac{a+b}{c-a}\left(a-c\frac{a+b}{c-a}\right)+a\left[1-\frac{(a+b)^2}{(c-a)^2}\right]\geqslant 0.$$

Система (C') имеет решение $x=\frac{a-b}{a+c}$ только в случае

$$a+c\neq 0,\ \left|\frac{a-b}{a+c}\right|>1,\ -\frac{a-b}{a+c}\left(a-c\frac{a-b}{a+c}\right)-a\left[1-\frac{(a-b)^2}{(a+c)^2}\right]\geqslant 0.$$

Наконец, система (D′) имеет решение $x=\frac{a+b}{a+c}$ только в случае

$$a+c\neq 0,\ \left|\frac{a+b}{a+c}\right|>1,\ -\frac{a+b}{a+c}\left(a-c\frac{a+b}{c+a}\right)-a\left[1-\frac{(a+b)^2}{(a+c)^2}\right]\geqslant 0.$$

Данное уравнение имеет, таким образом, не более четырех корней: $\frac{b-a}{a-c}$, $\frac{a+b}{c-a}$, $\frac{a-b}{a+c}$, $\frac{a+b}{a+c}$, при этом первое число будет корнем, если оно является решением или системы (A), или системы (A′), второе число будет корнем данного уравнения, если оно является или решением системы (B), или (B′) и т. д. **40.** Возвести обе части уравнения в квадрат; $x_1=0$; в случае $b^2\geqslant c^2$ уравнение имеет еще корень $x_2=\frac{a}{2}\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$. В случае $b^2<c^2$ это значение x не является корнем данного уравнения. **41.** Указание: $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{b}\,u$, $\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}\,v$; отсюда $u+v=1$, $u^4+v^4=\frac{a}{b}$ и $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$. Ответ: если $a<\frac{b}{8}$, то корней нет. Если $\frac{b}{8}\leqslant a\leqslant b$, то уравнение имеет два корня: $x_1=b\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\sqrt{\frac{a+b}{2b}-\frac{3}{4}}}\right)^4$, $x_2=b\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\sqrt{\frac{a+b}{2b}-\frac{3}{4}}}\right)^4$; если $a>b$, то уравнение имеет только один корень $x=x_1$. **42.** Если $a\geqslant b$, то $x=b$; если $a\leqslant b$, то $x=a$. **43.** Если $a=b$, то уравнение обращается в тождество. Если $a\neq b$ и $ab<0$, то уравнение не имеет корней. Если $a\neq b$, $a<0$, $b<0$, то уравнение имеет корни $x=0$, $x=\sqrt{ab}$; если $a\neq b$, $a>0$, $b>0$, то корни уравнения $x=0$ и $x=-\sqrt{ab}$. **44.** Если $a-b\leqslant 0$, то уравнение не имеет корней. Если $a-b>0$, то уравнение имеет корень $x=\frac{a+b}{2}$.

§ 12. Системы, содержащие иррациональные уравнения

1. (4, 9), (9, 4). **2.** (1, 8), (8, 1). **3.** $\left(\frac{128}{13}, \frac{2}{13}\right)$, $\left(\frac{2}{13}, \frac{128}{13}\right)$. **4.** $\left(\frac{24}{23}, 24\right)$, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$. **5.** (5, 3), $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{109}+3)}, -\sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{109}-3)}\right]$. **6.** (4, 4). **7.** $(10+\sqrt{99}, 10-\sqrt{99})$, $(16, 4)$, $(10-\sqrt{99}, 10+\sqrt{99})$, (4, 16). **8.** (3, 4), (0, −11). **9.** Положить $y=kx$. Ответ: (8, 1), (8, −1), (−8, 1), (−8, −1). **10.** Положить $\sqrt[3]{x+y}=\sqrt[5]{x+9y}=a$ и т. д. Ответ: (0, 0), (5, 3), (−5, −3), $\left(\frac{10}{243}, -\frac{1}{243}\right)$, $\left(-\frac{10}{243}, \frac{1}{243}\right)$. **11.** (18, 8). **12.** $\sqrt{\frac{x+y}{2}}=u$, $\sqrt{\frac{x-y}{2}}=v$ и т. д. Ответ: (5, 3). **13.** (0, 0), (4, 3). **14.** (8, 27), (8, −27), (−8, 27), (−8, −27). **15.** (81, 16), (16, 81), (−81, −16), (−16, −81). **16.** Из уравнения $5x-4=25y^2$ следует, что $x>0$, а потому первое уравнение можно переписать в виде $(\sqrt{x}-9y^2-4y\sqrt{x})^2=0$. Ответ: $\left(1, \frac{1}{5}\right)$. **17.** (8, 4), $(152-64\sqrt{6}, 40-16\sqrt{6})$. **18.** (5, 3), $\left(\frac{25-\sqrt{19968}}{29}, -\frac{21}{29}\frac{25-\sqrt{19968}}{29}\right)$. **19.** Указание. Из первого уравнения находим $\sqrt{x^2-12y+1}=4$, откуда $x^2-12y=15$; второе уравнение ($y\neq 0$) можно переписать так: $\frac{x^2}{16y^2}-\frac{1}{2y}\sqrt{x^2\left(\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}\right)}+\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}=0$, или $\frac{|x|^2}{(4y)^2}-\frac{|x|}{2y}\sqrt{\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}}+\left(\sqrt{\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}}\right)^2=0$, откуда $\frac{|x|}{4y}=\sqrt{\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}}$. Отсюда следует, что всегда $y>0$. Ответ: $\left(5, \frac{5}{6}\right)$, $(-9-4\sqrt{6}, \frac{27}{2}+6\sqrt{6})$. **20.** (5, 4), (−5, −4), (15, −12), (−15, 12). **21.** $\left(\frac{2}{\sqrt{65}}, \frac{1}{\sqrt{65}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{2}{\sqrt{65}}\right)$. **22.** Указание. Первое из данных уравнений приводится к виду $y^2(1+x^4)=2x^2(1+\sqrt{1+y^4})$; отсюда следует, что если $x=0$, то $y=0$, а если $y=0$, то $x=0$; однако (0, 0) —

не есть решение данной системы (см. второе уравнение). Данная система эквивалентна такой:

$$y^2\left[\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+2\right]=2\left(1+\sqrt{1+y^4}\right),\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)=2\sqrt{2},$$

или

$$y^2\left[\frac{8}{\left(\frac{1}{y}-y\right)^2}+2\right]=2\left(1+\sqrt{1+y^4}\right),\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)=2\sqrt{2},$$

или

$$\frac{y^2(1+y^2)^2}{(y^2-1)^2}=1+\sqrt{1+y^4},\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)=2\sqrt{2},$$

или

$$y^6+y^4+3y^2-1=\sqrt{1+y^4}\,(y^2-1)^2,\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)=2\sqrt{2}.$$

Эта же система эквивалентна следующей смешанной системе:

$$(y^6+y^4+3y^2-1)^2=(1+y^4)(y^4-2y^2+1)^2,$$
$$y^6+y^4+3y^2-1\geqslant 0,\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)=2\sqrt{2},$$

или

$$y^8+2y^4-\frac{1}{3}=0,\ y^6+y^4+3y^2-1\geqslant 0,\ \left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\frac{1}{y}-y\right)=2\sqrt{2};$$

отсюда находим $y=\pm\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}$, а затем и все решения системы

$$\left(\frac{\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\sqrt{2}+\sqrt[8]{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}-1},\ \sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\sqrt{2}-\sqrt[8]{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}-1},\ \sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}+1}\sqrt{2}+\sqrt[8]{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}-1},\ -\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\sqrt{2}-\sqrt[8]{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}-1},\ -\sqrt[4]{\sqrt{\frac{4}{3}}-1}\right).$$

23. Решение:

$$(2y-1)\sqrt{x^4+4x+3}-(2x-1)\sqrt{y^4+4y+3}=x^2-y^2-2x^2y+2xy^2+4x-4y,$$
$$(2y-1)\sqrt{x^4+4x+3}-(2x-1)\sqrt{y^4+4y+3}=(2x-1)y^2-(2y-1)x^2+4x-4y,$$
$$(2y-1)\sqrt{x^4+4x+3}-(2x-1)\sqrt{y^4+4y+3}=$$
$$=(2x-1)y^2-(2y-1)x^2+2(2x-1)-2(2y-1),$$
$$(2y-1)(x^2+2+\sqrt{x^4+4x+3})=(2x-1)(y^2+2+\sqrt{y^4+4y+3}),$$

$$(2y-1)\left[2+x^2+\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)}\right]=$$
$$=(2x-1)\left[2+y^2+\sqrt{(y^2+2y+1)(y^2-2y+3)}\right],$$
$$(2y-1)\left[2x^2+4+2\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)}\right]=$$
$$=(2x-1)\left[2y^2+4+2\sqrt{(y^2+2y+1)(y^2-2y+3)}\right],$$
$$(4y-2)\left[x^2+2x+1+2\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)}+x^2-2x+3\right]=$$
$$=(4x-2)\left[y^2+2y+1+2\sqrt{(y^2+2y+1)(y^2-2y+3)}+y^2-2y+3\right],$$
$$\left[(y^2+2y+1)-(y^2-2y+3)\right]\left[x^2+2x+1+2\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)}+x^2-2x+3\right]=$$
$$=\left[(x^2+2x+1)-(x^2-2x+3)\right]\left[y^2+2y+1+2\sqrt{(y^2+2y+1)(y^2-2y+3)}+y^2-2y+3\right],$$

а так как

$$x^2+2x+1\geqslant 0,\quad y^2+2y+1\geqslant 0,\quad x^2-2x+3>0,\quad y^2-2y+3>0,$$

то

$$\left[(y^2+2y+1)-(y^2-2y+3)\right]\left(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+3}\right)^2=$$
$$=\left[(x^2+2x+1)-(x^2-2x+3)\right]\left(\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+3}\right)^2,$$

а так как

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+3}>0,\ \sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+3}>0,$$

то

$$\left(\sqrt{y^2+2y+1}-\sqrt{y^2-2y+3}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+3}\right)=$$
$$=\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)\left(\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+3}\right).$$

Раскрывая скобки и производя упрощения, получим $(x-y)(2xy-x-y-4)=0$. Если $x=y$, то из второго уравнения найдем $x=y=\frac{5}{4}$. Если $2xy-x-y-4=0$, то $y=\frac{x+4}{2x-1}$ и второе уравнение принимает вид $\sqrt{\frac{3}{x+1}}-\frac{3}{|2x-1|}=\frac{3}{2x-1}$. Если $2x-1<0$, то $\sqrt{\frac{3}{x+1}}=0$—это уравнение не имеет корней; если $2x-1>0$, то $\sqrt{\frac{3}{x+1}}=\frac{6}{2x-1}$, откуда находим лишь одно значение x, удовлетворяющее условию $2x-1>0$, а из формулы $y=\frac{x+4}{2x-1}$ соответствующее значение y. Итак, система имеет два решения: $\left(\frac{5}{4},\ \frac{5}{4}\right)$, $\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$. **24.** (4, 3), $\left(4\sqrt[3]{\frac{59}{5}},\ -3\sqrt[3]{\frac{59}{5}}\right)$. **25.** Указание. $\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt{x-y}=v$. Ответ: (5, 4). **26.** $x=u^{\frac{2}{3}}$, $y=v^{\frac{2}{3}}$, $z=w^{\frac{2}{3}}$. Ответ: (1, 4, 9). **27.** Этот пример заимствован из книги Е. Пржевальского «Сборник алгебраических задач» (Учпедгиз, 1941, задача № 412, стр. 33 и стр. 230). Вот какое решение приводит сам автор: «Из первого уравнения (разделив обе части на $\sqrt{\frac{4x}{y^2+x}}$) получим $\frac{y^2}{4x}+\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}=\frac{y^2}{4}$, или $\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{y^2}{4}$, откуда

$$\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=\pm\frac{y}{2}\ \text{и}\ x=\frac{y^2}{(y\pm 1)^2}. \qquad \text{(I)}$$

Из второго уравнения $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}}=y+1$, или $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y-1}}=\frac{y+2}{y}$, или $\frac{x}{x-y-1}=\frac{(y+2)^2}{y^2}$, или $\frac{y+1}{x}=\frac{4(y+1)}{(y+2)^2}$, откуда

$$y+1=0\ \text{и}\ x=\frac{(y+2)^2}{4}. \qquad \text{(II)}$$

Комбинируя уравнения (I) и (II), найдем несколько значений x и y, из которых удовлетворяют уравнениям $x=4$, $y=2$». Здесь мы имеем типичный пример «манипуляций», проводимых без всякого анализа эквивалентности цепи промежуточных систем. Словом «или», повторяемым три раза подряд, автор разделяет четыре уравнения, каждое из которых не эквивалентно предыдущему, а именно — каждое из уравнений

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}}=y+1, \tag{A}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y-1}}=\frac{y+2}{y}, \tag{B}$$

$$\frac{x}{x-y-1}=\frac{(y+2)^2}{y^2}, \tag{C}$$

$$\frac{y+1}{x}=\frac{4(y+1)}{(y+2)^2} \tag{D}$$

не эквивалентно предыдущему, а последнее уравнение не эквивалентно совокупности уравнений (II)

$$y+1=0,\quad x=\frac{(y+2)^2}{4}. \tag{E}$$

Действительно, уравнение (A) имеет, например, такое решение: $x=1$, $y=0$, которое не является решением уравнения (B). Уравнение (C) имеет, например, такое решение: $x=-1$, $y=-1$, которое не является решением уравнения (B). Далее, уравнение (C) имеет решение $x=0$, $y=-2$; но эта совокупность чисел не является решением уравнения (D). Наконец, одно из уравнений (E) имеет в качестве решения пару чисел $x=0$, $y=-2$, которая не является решением уравнения (D). Далеко не благополучно обстоит дело и с преобразованием первого уравнения данной системы; оно, т. е. уравнение

$$\sqrt{\frac{y^2+x}{4x}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+x}}=\frac{y^2}{4}\sqrt{\frac{4x}{y^2+x}}, \tag{F}$$

заменяется не эквивалентным уравнением

$$x=\frac{y^2}{(y\pm 1)^2}. \tag{G}$$

В самом деле, для последнего уравнения (G), числа $x=0$, $y=0$ образуют решение, а для первого уравнения (F) эта пара чисел не является решением. Таким образом, в цитированном выше решении автор заменяет первое уравнение системы ему неэквивалентным и второе уравнение системы тоже. Неудивительно, что в результате приходится производить проверкой отбор решений. Автор приводит ответ: $x=4$, $y=2$. Эта пара чисел есть решение данной системы, что может быть установлено проверкой. Но где гарантия того, что это есть единственное решение? Метод автора, конечно, не может дать ответа на этот вопрос: ведь автор заменил данную систему уравнений несколькими системами, совокупность которых не эквивалентна данной системе, а потому среди решений данной системы часть могла и не попасть в число решений совокупности систем (I) и (II). Таким образом, при решении системы «произвольными манипуляциями» мы можем лишь в итоге установить проверкой появление посторонних решений, но не всегда можем установить, есть утерянные решения или нет. Покажем, как можно изменить рассуждения для того, чтобы быть уверенным в том, что в итоге не будут утеряны решения и не появятся посторонние решения. Прежде всего отметим, что если какое-нибудь уравнение системы заменить уравнением, ему эквивалентным, то получим новую систему, эквивалентную данной. Поэтому будем, как это делает и сам автор, преобразовывать отдельно каждое из уравнений системы, учитывая, однако, возможные нарушения эквивалентности. Уравнение

$$\sqrt{\frac{y^2+x}{4x}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+x}}=\frac{y^2}{4}\sqrt{\frac{4x}{y^2+x}} \tag{1}$$

эквивалентно такому

$$\sqrt{\frac{y^2+x}{4x}}\left(\sqrt{\frac{y^2+x}{4x}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+x}}\right)=\frac{y^2}{4}\sqrt{\frac{4x}{y^2+x}}\sqrt{\frac{y^2+x}{4x}} \tag{2}$$

или $\frac{y^2+x}{4x}+\frac{y}{\sqrt{4x}}=\frac{y^2}{4}$ (3). В самом деле, если выполнено равенство (1), то $y^2+x>0$, $x>0$; значит, будет выполнено и равенство (2), а значит — и равенство (3). Обратно, если выполнено равенство (3), то $x>0$, а тогда и $y^2+x>0$; значит, будет выполнено равенство (2), а значит, — и (1). Итак, уравнения (1) и (3) эквивалентны. Далее, уравнение (3) перепишем так: $\frac{y^2}{4x}+\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}=\frac{y^2}{4}$ (3′), или

$$\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{y^2}{4}\ (3''),\ \text{или}\ \frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=\pm\frac{y}{2}. \tag{4}$$

Совокупность двух уравнений (4) эквивалентна уравнению (3″), или (3), так как, если выполнено равенство (3), то будет выполнено одно из равенств (4), и обратно, если выполнено одно из равенств (4): $\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=\frac{y}{2}$ или $\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=-\frac{y}{2}$, то будет выполнено и равенство (3″) или (3′), или (3). Теперь перепишем уравнение (4) так:

$$\frac{y}{\sqrt{x}}+1=\pm y, \tag{4′}$$

или

$$\frac{y}{\sqrt{x}}=-1\pm y, \tag{4″}$$

отсюда

$$\sqrt{x}=\frac{y}{-1\pm y}. \tag{5}$$

Это уравнение не эквивалентно уравнению (4″), но, если к нему добавить условие $x\neq 0$, то эквивалентность будет восстановлена. Итак, совокупность смешанных систем

$$\sqrt{x}=\frac{y}{-1+y},\ x\neq 0 \qquad \text{и} \qquad \sqrt{x}=\frac{y}{-1-y},\ x\neq 0 \tag{6}$$

эквивалентна уравнению (4″), следовательно, и исходному уравнению. В самом деле, если выполнено равенство (4″), то $x\neq 0$ и из (4″) следует $y=\sqrt{x}(-1+y)$, или $y=\sqrt{x}(-1-y)$. В первом случае $y\neq 1$, во втором случае $y\neq -1$ (если предположить, что в случае $y=\sqrt{x}(-1+y)$, $y=1$, то получим $y=0$, а это противоречит условию; аналогично доказывается, что во втором случае $y\neq -1$), а потому $\sqrt{x}=\frac{y}{-1+y}$ или $\sqrt{x}=\frac{y}{-1-y}$. Обратно, если выполнена одна из смешанных систем (6), то будет выполнено и одно из уравнений (4″). Далее, первая из смешанных систем (6) эквивалентна следующей:

$$x=\left(\frac{y}{y-1}\right)^2,\ x>0,\ \frac{y}{y-1}>0, \tag{7′}$$

а вторая — следующей:

$$x=\left(\frac{y}{-y-1}\right)^2,\ x>0,\ \frac{y}{-1-y}>0. \tag{7″}$$

В самом деле, если (в поле действительных чисел) выполнены условия $\sqrt{x}=\frac{y}{-1+y}$, $x\neq 0$, то будут выполнены и равенства (7′); обратно: из условий (7′) следуют соотношения $\sqrt{x}=\frac{y}{-1+y}$, $x\neq 0$. Аналогично доказывается эквивалентность смешанной системы $\sqrt{x}=\frac{y}{-1-y}$, $x\neq 0$ и системы (7″). Итак, первое из уравнений данной системы эквивалентно совокупности двух смешанных систем: (7′) и (7″), в том смысле, что любое решение одного только первого уравнения данной системы является решением одной из систем (7′) или (7″); обратно, всякое решение любой из смешанных систем (7′) или (7″) является решением первого урав-

нения данной системы. Преобразуем теперь второе уравнение данной системы $\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}=(y+1)(\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1})$ следующим образом:

$$x+\sqrt{x-y-1}=y\sqrt{x}+\sqrt{x}-y\sqrt{x-y-1}-\sqrt{x-y-1},$$

или

$$(y+2)\sqrt{x-y-1}=y\sqrt{x}. \tag{8}$$

Итак, второе уравнение данной системы эквивалентно уравнению (8). Таким образом, данная система эквивалентна совокупности двух смешанных систем:

$$\left.\begin{array}{l} x=\left(\dfrac{y}{y-1}\right)^2,\ x>0,\ \dfrac{y}{y-1}>0, \\ (y+2)\sqrt{x-y-1}=y\sqrt{x} \end{array}\right. \quad (9')$$

$$\text{или} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\left(\dfrac{y}{-1-y}\right)^2,\ x>0,\ \dfrac{y}{-y-1}>0, \\ (y+2)\sqrt{x-y-1}=y\sqrt{x} \end{array}\right. \quad (9'')$$

т. е. все решения смешанной системы (9′) и все решения смешанной системы (9″) будут всеми решениями данной системы. Будем решать смешанную систему (9′). Докажем, что эта система эквивалентна такой:

$$\left.\begin{array}{c} x=\left(\dfrac{y}{y-1}\right)^2,\ x>0,\ \dfrac{y}{y-1}>0, \\ y(y+2)>0,\quad x-y-1>0, \\ (y+2)^2(x-y-1)=y^2x. \end{array}\right. \tag{10'}$$

В самом деле, из равенств (9′) следует, что $y\neq 0$ $\left(\text{так как } \dfrac{y}{y-1}>0\right)$ и $y\neq -2$ (в противном случае $y\sqrt{x}=0$, откуда или $y=0$, или $x=0$, чего не может быть), а значит y и $y+2$ — числа одного знака (это следует из $y\sqrt{x}=(y+2)\sqrt{x-y-1}$), т. е. $y(y+2)>0$. Обратно из соотношений (10′) следуют соотношения (9′). Уравнение $(y+2)^2(x-y-1)=y^2x$ можно переписать так: $(y+1)[4x-(y+2)^2]=0$. Если $y=-1$, то $y(y+2)<0$, что противоречит условию $y(y+2)>0$, входящему в систему (10′). Значит, остается $4x-(y+2)^2=0$. Решая систему $x=\left(\dfrac{y}{y-1}\right)^2$, $4x-(y+2)^2=0$, находим: $\dfrac{4y^2}{(y-1)^2}=(y+2)^2$, $\dfrac{2y}{y-1}=\pm(y+2)$, $y_1=-1$, $y_2=2$, $y_3=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$, $y_4=\dfrac{-\sqrt{17}-3}{2}$. Значение $y_1=-1$ не удовлетворяет условию $y(y+2)>0$, значение $y_2=2$, следовательно, $x_2=4$ удовлетворяет условиям системы (10′). Значение $y_3=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ не удовлетворяет условию $\dfrac{y}{y-1}>0$. Если $y_4=\dfrac{-\sqrt{17}-3}{2}$, то $x_4=\left(\dfrac{y_4}{y_4-1}\right)^2=\dfrac{9-\sqrt{17}}{8}$. Значения x_4 и y_4 удовлетворяют всем условиям системы (10′). Исследуем систему (9″). Эта система эквивалентна такой:

$$\left.\begin{array}{c} x=\left(\dfrac{y}{-1-y}\right)^2,\ x>0,\ \dfrac{y}{-1-y}>0,\ y(y+2)>0, \\ x-y-1>0,\ y^2x=(y+2)^2(x-y-1). \end{array}\right. \tag{10''}$$

Преобразуя уравнение $y^2x=(y+2)^2(x-y-1)$, как и выше, получим уравнение $4x=(y+2)^2$. Решая систему $x=\left(\dfrac{y}{-1-y}\right)^2$, $4x=(y+2)^2$, получим: $4\left(\dfrac{y}{-1-y}\right)^2=$ $=(y+2)^2$, $\pm\dfrac{2y}{1+y}=y+2$, откуда $y_1=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}$, $y_2=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$. Значение y_1 не удовлетворяет условию $\dfrac{y}{-1-y}>0$, а значение y_2 не удовлетворяет условию

$y(y+2)>0$. Значит, система (10″) не имеет решений. Итак, данная система имеет два решения (4,2) и $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{8}, \frac{-\sqrt{17}-3}{2}\right)$.

28. (3, 2), $\left(\frac{45}{2}, -\frac{135}{4}\right)$. **29.** (2, 1), (1, 2).

§ 13. Системы, содержащие иррациональные уравнения с параметрами

1. Если $a \geqslant 2$ или $a < -2$, то два решения:

$$\left[\frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3 b}{1+\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3}, \frac{b}{1+\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3}\right],$$

$$\left[\frac{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3 b}{1+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3}, \frac{b}{1+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3}\right].$$

Если $a=-2$ и $b \neq 0$, то система несовместна. Если $-2 < a < 2$, то система несовместна. Если $a=-2$, $b=0$, то все решения $(\lambda, -\lambda)$, где λ — любое отличное от нуля число. **2.** Если $a=b=0$, то решением является $x=y=0$; если $b=0$, $a \neq 0$, то система несовместна; если $b \neq 0$, $a=b$, то решения системы $(0, a)$ и $(a, 0)$; если $b \neq 0$ и $b=-a$, то решения системы $(0, -a)$ и $(-a, 0)$; если $b(b^2-a^2)<0$, то система не имеет решений; если $b(b^2-a^2)>0$ и $(3a^2-b^2)(3b^2-a^2) \geqslant 0$, то решения системы $\left[\frac{a^2+b^2 \pm \sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4b}, \frac{a^2+b^2 \mp \sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4b}\right]$. Если $b(b^2-a^2)>0$, но $(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)<0$, то система не имеет решений. **3.** $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}a, \pm\sqrt{1+\frac{11}{18}\sqrt{3}}\,a\right], \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}a, \pm\sqrt{1-\frac{11}{18}\sqrt{3}}\,a\right]$. **4.** Указание. В силу второго уравнения $xy+ay-ax=0$, а потому $(x-y+a)^2=x^2+y^2+a^2$. Полезно далее еще заметить, что из $(x-y+a)^2-4xy=0$ следует $(x-y+a)^2-4(ax-ay)=0$, $(x-y-a)^2=0$, $x-y-a=0$. Ответ: $\left[\frac{a}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{a}{2}(-1+\sqrt{5})\right]$, $\left[\frac{a}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{a}{2}(-1-\sqrt{5})\right]$. **5.** Если $ab \geqslant 0$, то система имеет два решения: (a, b) и (b, a); если $ab<0$, то система не имеет решений. **6.** Если $a=|b|$, то $(0, b)$ и $(b, 0)$ — решения системы; если $a \neq |b|$, то $(0, b)$ и $(b, 0)$ — не решения; если $a=0$, $b \neq 0$, то решений нет; если $a=b=0$, то система имеет единственное решение $(0, 0)$; если $a<0$, то решений нет. Пусть $a>0$, тогда первое уравнение системы будет эквивалентно уравнению

$$\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}\right)^2=a^2,$$

или

$$\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}=\frac{a^2-x^2-y^2}{3}. \tag{1}$$

Это же уравнение будет эквивалентно уравнению

$$\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^3=\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{3}\right)^3,$$

или

$$x^4y^2+x^2y^4+3x^2y^2\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)=\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{3}\right)^3. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что $x^4y^2+x^2y^4+3x^2y^2\frac{a^2-x^2-y^2}{3}=\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{3}\right)^3$, или $a^2x^2y^2=\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{3}\right)^3$, или

$$3\sqrt[3]{a^2x^2y^2}=a^2-x^2-y^2. \tag{3}$$

Можно сказать, что это уравнение следует из одного лишь уравнения (1), так как (1) и (2) — эквивалентные уравнения. Рассмотрим тождество $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3 = x^2+y^2+3\sqrt[3]{x^2y^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)$. Отсюда и из (3) следует, что $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3 = a^2-3\sqrt[3]{a^2x^2y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3-a^2=3\sqrt[3]{x^2y^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)\left[\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)+\sqrt[3]{a^4}\right]=0$, а так как второй множитель положителен при любых значениях x и y, то

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение (4) есть следствие уравнения (1). Обратно: если выполнено уравнение (4), то, возводя обе части уравнения в куб, получим (3), а затем из тождества $\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^3 = x^4y^2+x^2y^4+3x^2y^2\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)$, или $\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^3 = x^2y^2\left[x^2+y^2+3\sqrt[3]{x^2y^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)\right]$, учитывая (4), получим $\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^3 = x^2y^2\left(x^2+y^2+3\sqrt[3]{a^2x^2y^2}\right)$. Затем, учитывая (3), получим $\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^3 = a^2x^2y^2$ и, снова учитывая (3), получим $\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^3 = \left(\frac{a^2-x^2-y^2}{3}\right)^3$; следовательно, $\sqrt[3]{x^4y^2}=\sqrt[3]{x^2y^4}=\frac{a^2-x^2-y^2}{3}$, т. е. мы приходим к уравнению (1). Таким образом, первое из уравнений системы эквивалентно уравнению $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. Будем решать систему $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, $x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b$. Произведем замену переменных: $\sqrt[3]{x}=u\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{y}=v\sqrt[3]{a}$. Получим: $u^2+v^2=1$, $u^3+v^3+3cuv=c^3$, где $c=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, или $(u+v)^2-2uv=1$, $(u+v)\left[(u+v)^2-3uv\right]+3cuv=c^3$, или $\lambda^2-2\mu=1$, $\lambda^3-3\lambda\mu+3c\mu=c^3$, где $\lambda=u+v$, $\mu=uv$. Исключая μ, получим: $\lambda_1=c$, $\lambda_2=c+\sqrt{3}\sqrt{c^2+1}$, $\lambda_3=c-\sqrt{3}\sqrt{c^2+1}$, $\mu_1=\frac{\lambda_1^2-1}{2}$, $\mu_2=\frac{\lambda_2^2-1}{2}$, $\mu_3=\frac{\lambda_3^2-1}{2}$. Теперь u и v найдутся как корни уравнения $z^2-\lambda z+\frac{\lambda^2-1}{2}=0$, отсюда

$$z_{1,2}=\frac{\lambda\pm\sqrt{2-\lambda^2}}{2}.$$

Так как система решается над полем действительных чисел, то при $2-\lambda^2\geqslant 0$; z_1 и z_2 будут равны u и v, а $x=au^3$, $y=av^3$, т. е. система будет иметь решения

$$\left[a\left(\frac{\lambda+\sqrt{2-\lambda^2}}{2}\right)^3,\ a\left(\frac{\lambda-\sqrt{2-\lambda^2}}{2}\right)^3\right],\ \left[a\left(\frac{\lambda-\sqrt{2-\lambda^2}}{2}\right)^3,\ a\left(\frac{\lambda+\sqrt{2-\lambda^2}}{2}\right)^3\right].$$

Таким образом, 1) $\lambda=\lambda_1=c$. Если $2-\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\geqslant 0$, то система имеет следующие решения: $\left[a\left(\frac{c+\sqrt{2-c^2}}{2}\right)^3, a\left(\frac{c-\sqrt{2-c^2}}{2}\right)^3\right], \left[a\left(\frac{c-\sqrt{2-c^2}}{2}\right)^3, a\left(\frac{c+\sqrt{2-c^2}}{2}\right)^3\right]$. Если же $2-\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}<0$, то ни одна из этих пар чисел не есть решение. 2) $\lambda=\lambda_2=c+\sqrt{3}\sqrt{c^2+1}$. Если $2-\lambda_2^2=2-(c+\sqrt{3}\sqrt{c^2+1})^2\geqslant 0$, т. е. $-2\sqrt{3}c\sqrt{c^2+1}>4c^2+1$, то система имеет еще два решения (см. ниже). Условие $4c^2+1<-2\sqrt{3}c\sqrt{c^2+1}$ не будет выполнено, если $c\geqslant 0$, т. е. $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\geqslant 0$, т. е. если $b\geqslant 0$ (ибо сейчас мы предполагаем, что $a>0$). Если $b<0$, то $c<0$, и это условие может быть выполнено; однако оно в случае $c<0$ эквивалентно следующему $12c^2(c^2+1)\geqslant 16c^4+8c^2+1$ или $4c^4-4c^2+1\leqslant 0$, $(2c^2-1)^2\leqslant 0$, откуда $c^2=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Итак, только при $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ система имеет следующее решение (соответствующее $\lambda=\lambda_2=\sqrt{2}$): $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$. 3) $\lambda=\lambda_3=c-\sqrt{3}\sqrt{c^2+1}$. Рассуждая

как и выше, найдем $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda=-\sqrt{2}$, решение: $\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}, -\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$. **7.** а) если m и n — нечетные числа, то вместе с решением (x, y, z) система имеет решение $(-x, -y, -z)$. В случае, если m и n — нечетные числа, то данная система эквивалентна следующей:

$$\frac{x+y}{\sqrt[mn]{x+y+z}}=\sqrt[m]{c},\quad \frac{y+z}{\sqrt[mn]{x+y+z}}=\sqrt[m]{a},\quad \frac{z+x}{\sqrt[mn]{x+y+z}}=\sqrt[m]{b}.$$

Складывая, получим $(x+y+z)^{\frac{mn-1}{mn}}=\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}$*, откуда в силу того, что $mn-1$ — четное число:

$$\sqrt[mn]{x+y+z}=\pm\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}}=\lambda.$$

Значит $y+z=\lambda\sqrt[m]{a}$, $z+x=\lambda\sqrt[m]{b}$, $x+y=\lambda\sqrt[m]{c}$. Следовательно,

$$x+y+z=\lambda\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2};$$

отсюда находим x, y, z; система имеет, следовательно, два решения:

$$\left[\frac{-\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}}, \frac{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}};\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}-\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}}\right], \tag{1}$$

$$\left[-\frac{-\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}},\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}}, -\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}-\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}+\sqrt[m]{c}}{2}}\right], \tag{2}$$

б) если m — нечетное, а n — четное, то $mn-1$ — нечетное число, а поэтому система имеет в этом случае одно решение (1), в) если m — четное и n — четное, то данная система эквивалентна совокупности следующих систем:

$$\frac{x+y}{\sqrt[mn]{x+y+z}}=\varepsilon_3\sqrt[m]{c},\quad \frac{y+z}{\sqrt[mn]{x+y+z}}=\varepsilon_1\sqrt[m]{a},\quad \frac{z+x}{\sqrt[mn]{x+y+z}}=\varepsilon_2\sqrt[m]{b},$$

где ε_1, ε_2, ε_3, независимо друг от друга, принимают значения $+1$ и -1. Складывая, получим $(x+y+z)^{\frac{mn-1}{mn}}=\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}$. Так как $mn-1$ — нечетное число, то $(x+y+z)^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn-1]{\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}}$. Так как mn — четное число, то решение здесь существует лишь в случае $x+y+z>0$ и значит для

---

* Отметим, что если p — нечетное число, то при целых p и q:

$$\sqrt[q]{a^p}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\left(=a^{\frac{p}{q}}\right).$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ допустимы лишь такие наборы из $+1$ и -1, для которых $\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}>0$. Так, например, следует отбросить набор значений $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=-1$ и далее; если, например, $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=1$ дает положительное значение для суммы $\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}$, то при $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=-1$ эта сумма будет отрицательна и набор значений $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=-1$ следует опустить. Итак, для наборов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ из значений $+1$ и -1, для которых $\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}>0$, найдем $x+y=\varepsilon_3\sqrt[m]{c}\,\lambda$, $y+z=\varepsilon_1\sqrt[m]{a}\,\lambda$, $z+x=\varepsilon_2\sqrt[m]{b}\,\lambda$, где $\lambda=\sqrt[mn-1]{\dfrac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}}$. Таким образом, решения системы следующие:

$$x=\frac{-\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}},$$

$$y=\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}-\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}},$$

$$z=\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}-\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}\sqrt[mn-1]{\frac{\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}}{2}},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ принимают значения $+1$ и -1 независимо друг от друга, но допустимы лишь такие наборы, для которых $\varepsilon_1\sqrt[m]{a}+\varepsilon_2\sqrt[m]{b}+\varepsilon_3\sqrt[m]{c}>0$, г) пусть, наконец, m — четное, а n — нечетное. Тогда всякое решение (x, y, z) данной системы таково, что $x+y+z>0$; рассуждая как и выше, приходим снова к тем же решениям, что и выше, в случае четных m и n, с теми же ограничениями на наборы знаков для ε_1, ε_2 и ε_3 (для радикала четной степени $mn-1$ следует брать в силу $x+y+z>0$ лишь положительное значение). 8. Система имеет всегда решение $(0, 0, 0)$. Ниже говорится о решениях, отличных от этого. Если $a+b+c=0$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<0$, решение $\left[-a\sqrt[3]{\dfrac{bc(b+c)}{(bc+ca+ab)^2}},\ -b\sqrt[3]{\dfrac{ac(a+c)}{(bc+ca+ab)^2}},\right.$ $\left.-c\sqrt[3]{\dfrac{ab(a+b)}{(bc+ca+ab)^2}}\right]$. Если $a+b+c=0$, но $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$, то решений нет. Если $a+b+c\neq 0$, $\dfrac{abc}{a+b+c}>0$, $\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c}<0$ и $(bc+ca+ab)^2\geqslant 4abc(a+b+c)$, то решения

$$\left[\sqrt[3]{\lambda(\lambda+a)},\ \sqrt[3]{\lambda(\lambda+b)},\ \sqrt[3]{\lambda(\lambda+c)}\right], \tag{1}$$

где λ — любое из двух *положительных* чисел:

$$\lambda=\frac{-(bc+ca+ab)\pm\sqrt{(bc+ca+ab)^2-4abc(a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

Если $a+b+c\neq 0$, $\dfrac{abc}{a+b+c}<0$, $\dfrac{bc+ca+ab}{a+b+c}>0$, то одно решение (1), где λ — действительное число, определяемое соотношением

$$\lambda=\frac{-(bc+ca+ab)+\sqrt{(bc+ca+ab)^2-4abc(a+b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

Если $a+b+c\neq 0$, $\dfrac{abc}{a+b+c}<0$, $\dfrac{bc+ca+ab}{a+b+c}<0$, то решений нет. Если $a+b+c\neq 0$, $\dfrac{abc}{a+b+c}>0$, $\dfrac{bc+ca+ab}{a+b+c}>0$, то решений нет. 9. Из данных уравнений следует, что для всякого решения (x, y, z) будем иметь $x>0$, $y>0$, $z>0$. В самом деле, x как сумма двух неотрицательных чисел $\sqrt{z^2-a^2}$ и $\sqrt{y^2-a^2}$ не может быть $\leqslant 0$. Если же $x=0$, то из второго уравнения: $y=\sqrt{-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}$,

что возможно лишь при $b=0$, а нам дано, что $b>0$. Данная система эквивалентна, таким образом, следующей системе:

$$x^2=z^2+y^2-2a^2+2\sqrt{(z^2-a^2)(y^2-a^2)},$$
$$y^2=x^2+z^2-2b^2+2\sqrt{(x^2-b^2)(z^2-b^2)},$$
$$z^2=x^2+y^2-2c^2+2\sqrt{(x^2-c^2)(y^2-c^2)},$$
$$x>0,\quad y>0,\quad z>0,$$

или следующей:

$$(x^2-z^2-y^2+2a^2)^2=4(z^2-a^2)(y^2-a^2),$$
$$(y^2-x^2-z^2+2b^2)^2=4(x^2-b^2)(z^2-b^2),$$
$$(z^2-x^2-y^2+2c^2)^2=4(x^2-c^2)(y^2-c^2),$$
$$x^2-z^2-y^2+2a^2\geqslant 0,$$
$$y^2-x^2-z^2+2b^2\geqslant 0,$$
$$z^2-x^2-y^2+2c^2\geqslant 0,$$
$$z^2\geqslant a^2,\ y^2\geqslant a^2,\ x^2\geqslant b^2,\ z^2\geqslant b^2,\ x^2\geqslant c^2,\ y^2\geqslant c^2,$$
$$x>0,\ y>0,\ z>0,$$

или после преобразований первых трех уравнений:

$$4a^2x^2=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),$$
$$4b^2y^2=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),$$
$$4c^2z^2=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),$$
$$x^2-z^2-y^2+2a^2\geqslant 0,$$
$$y^2-x^2-z^2+2b^2\geqslant 0$$
$$z^2-x^2-y^2+2c^2\geqslant 0,$$
$$z^2\geqslant a^2,\ y^2\geqslant a^2,\ x^2\geqslant b^2,\ z^2\geqslant b^2,\ x^2\geqslant c^2,\ y^2\geqslant c^2,$$
$$x>0,\quad y>0,\quad z>0.$$

Обозначая $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$ через $16s^2$ $(s>0)$ и учитывая, что $a>0$, $b>0$, $c>0$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, получаем:

$$\left.\begin{array}{c} ax=by=cz=2s,\\ x^2-z^2-y^2+2a^2\geqslant 0,\\ y^2-x^2-z^2+2b^2\geqslant 0,\\ z^2-x^2-y^2+2c^2\geqslant 0,\\ z^2\geqslant a^2,\ y^2\geqslant a^2,\ x^2\geqslant b^2,\ z^2\geqslant b^2,\ x^2\geqslant c^2,\ y^2\geqslant c^2,\\ x>0,\quad y>0,\quad z>0. \end{array}\right\} \quad (I)$$

Из уравнений $ax=by=cz=2s$ находим:

$$x+y+z=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$
$$-x+y+z=2s\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$
$$x-y+z=2s\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$
$$x+y-z=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$$

Обратно: из этих соотношений следует, что $ax = by = cz = 2s$. Таким образом данная система эквивалентна следующей:

$$x + y + z = 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

$$-x + y + z = 2s\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

$$x - y + z = 2s\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

$$x + y - z = 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right),$$

$$x^2 - z^2 - y^2 + 2a^2 \geqslant 0,$$

$$y^2 - x^2 - z^2 + 2b^2 \geqslant 0,$$

$$z^2 - x^2 - y^2 + 2c^2 \geqslant 0,$$

$$z^2 \geqslant a^2,\ y^2 \geqslant a^2,\ x^2 \geqslant b^2,\ z^2 \geqslant b^2,\ x^2 \geqslant c^2,\ y^2 \geqslant c^2,$$

$$x > 0,\quad y > 0,\quad z > 0.$$

Если (x, y, z) — решение данной системы, то из данной системы очевидно, что $x < y + z$, $y < z + x$, $z < x + y$, а потому должно быть еще: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$. Перемножая первые четыре уравнения последней системы, находим:

$$16s^2 = 16s^4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right),$$

откуда

$$s = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}}.$$

Теперь находим: $x = \frac{2s}{a}$, $y = \frac{2s}{b}$, $z = \frac{2s}{c}$. Остается проверить выполнение всех условий последней смешанной системы. Это сделать проще всего геометрически. Пусть выполнены неравенства: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$, $\frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (если не выполнено хотя бы одно из этих неравенств, система не имеет решений), тогда будут выполнены и неравенства $x < y + z$, $y < z + x$, $z < x + y$, а так как $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то x, y, z можно рассматривать как длины сторон треугольника, s — его площадь, а a, b и c — высоты. Условие $x^2 - z^2 - y^2 + 2a^2 \geqslant 0$ означает, что основание высоты лежит на стороне x (а не на ее продолжении), так как $\sqrt{z^2 - a^2}$ и $\sqrt{y^2 - a^2}$ — это отрезки, на которые высота a делит сторону x, и если основание высоты a лежит вне стороны x, то x равен разности этих радикалов $x = \pm(\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{y^2 - a^2})$, откуда $x^2 < z^2 - a^2 + y^2 - a^2$. Аналогично условия $y^2 - x^2 - z^2 + 2b^2 \geqslant 0$, $z^2 - x^2 - y^2 + 2c^2 \geqslant 0$ означают, что основания высот b и c лежат на сторонах y и z. Отсюда следует, что треугольник со сторонами x, y, z не тупоугольный. Легко видеть, что для такого треугольника все условия смешанной системы (I) будут выполнены. Итак, если

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c},\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a},\ \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b},\ \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},\ \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \tag{II}$$

то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\frac{2}{a}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}},$$

$$y=\frac{\frac{2}{b}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}},$$

$$z=\frac{\frac{2}{c}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}}.$$

Если же хотя бы одно из неравенств (II) не выполнено, то система не имеет решений. 10. Если $x=0$, то $y=z=0$; если $y=0$, то $x=z=0$; если $z=0$, то $x=y=0$; таким образом, система имеет решение (0, 0, 0), и для всякого другого решения (x, y, z) будем иметь $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Будем искать только такие решения. Если (x, y, z) решение такое, что $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, то должно быть $yz>0$, $zx>0$, $xy>0$, $x+z>y$, $y+z>x$, $x+y>z$, откуда следует, что $x>0$, $y>0$, $z>0$ и значит x, y, z можно рассматривать как длины сторон треугольника. Отсюда также следует, что данная система не имеет никаких решений, кроме (0, 0, 0), если хотя бы одно из чисел a, b, c отрицательно или равно 0. Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$. Полагая $x+y+z=2p$, можно данную систему записать в виде $2a\sin\frac{A}{2}=x$, $2b\sin\frac{B}{2}=y$, $2c\sin\frac{C}{2}=z$. Но $x=2R\sin A$, $y=2R\sin B$, $z=2R\sin C$, где R — радиус описанного круга; значит,

$$2a\sin\frac{A}{2}=2R\sin A,\quad 2b\sin\frac{B}{2}=2R\sin B,\quad 2c\sin\frac{C}{2}=2R\sin C,$$

или

$$R\cos\frac{A}{2}=a,\quad R\cos\frac{B}{2}=b,\quad R\cos\frac{C}{2}=c.$$

Отсюда

$$b\cos\frac{A}{2}-a\cos\frac{B}{2}=0,\quad c\cos\frac{A}{2}-a\cos\frac{C}{2}=0,$$

или

$$c\cos\frac{A}{2}-a\cos\frac{C}{2}=c\cos\frac{A}{2}-a\sin\frac{A+B}{2}=$$

$$=c\cos\frac{A}{2}-a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-a\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=0;$$

но $\cos\frac{B}{2}=\frac{b}{a}\cos\frac{A}{2}$. Следовательно, $c\cos\frac{A}{2}-b\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}-a\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=0$, и так как $\cos\frac{A}{2}\neq 0$, то $b\sin\frac{A}{2}+a\sin\frac{B}{2}=c$. Отсюда и из уравнения $b\cos\frac{A}{2}-$ $-a\cos\frac{B}{2}=0$ находим

$$\left(b\sin\frac{A}{2}+a\sin\frac{B}{2}\right)^2+\left(b\cos\frac{A}{2}-a\cos\frac{B}{2}\right)^2=c^2$$

или

$$a^2+b^2-2ab\cos\frac{A+B}{2}=c^2,\quad a^2+b^2-2ab\sin\frac{C}{2}=c^2,$$

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

и значит $z=c\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Аналогично находим

$$x=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc},\quad y=\frac{b(c^2+a^2-b^2)}{2bc}.$$

Таким образом, данная система не имеет решения, отличного от (0, 0, 0), если хотя бы одно из чисел $a^2+b^2-c^2$, $b^2+c^2-a^2$, $c^2+a^2-b^2$ отрицательно или равно 0. Если же $b^2+c^2-a^2>0$, $c^2+a^2-b^2>0$, $a^2+b^2-c^2>0$, то, кроме (0, 0, 0), система имеет еще решение $\left(\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc},\ \frac{b(c^2+a^2-b^2)}{2ac},\ \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}\right)$;

это необходимо еще проверить подстановкой, так как нами здесь значения для x, y и z получены как *следствие* из данной системы. 11. Если $a=0$, то система имеет решение (0, 0); если $a\neq 0$, то система не имеет решений. 12. Если $a<0$, то система не имеет решений; если $a>0$, то система имеет одно решение $\left(\frac{\sqrt{153}-11}{16}a, \frac{13-\sqrt{153}}{8}a\right)$. 13. Указание.

$$\frac{1}{a}(xy-y\sqrt{x^2-y^2})=\frac{y}{2a}(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2$$

и далее умножить обе части первого уравнения на $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$. Ответ: если $b>0$, $b+\frac{\sqrt[3]{4a}}{b}\geqslant 0$, $b-\frac{\sqrt[3]{4a}}{b}\geqslant 0$, то система имеет решение

$$\left(\frac{b^8+12\sqrt[3]{2a}+4a\sqrt[3]{4a}}{16b^4}, \frac{b^4\sqrt[3]{4a}+4a}{4b^2}\right);$$

если же или $b<0$, или $b+\frac{\sqrt[3]{4a}}{b}<0$, или $b-\frac{\sqrt[3]{4a}}{b}<0$, то система не имеет решений 14.

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}b, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a\right), \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}b, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a\right),$$
$$\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}b, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a\right), \left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}b, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a\right).$$

15. Если $a<0$, то система не имеет решений; если $a>0$, то система имеет два решения:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a}, \frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4-6a^2b^2+b^4}}{2a}\right).$$

§ 14. Иррациональные неравенства

1. Область определения функции $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}$ определяется условиями $25-x^2\geqslant 0$, $x^2+7x\geqslant 0$, откуда $0\leqslant x\leqslant 5$. Данное неравенство

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3 \tag{1}$$

эквивалентно следующему:

$$(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x})^2>9. \tag{2}$$

В самом деле, если выполнено неравенство (1), то в левой части этого неравенства будет стоять положительное число; значит, квадрат этого положительного числа будет больше 9, т. е. будет выполнено неравенство (2). Обратно: если выполнено неравенство (2), то, замечая, что $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}$ — число положительное (считаем, что $0\leqslant x\leqslant 5$ и для каждого радикала берем положительное значение), после извлечения корня получим неравенство (1). Упрощая неравенство (2), получим: $25-x^2+2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x}+x^2+7x>9$, или $2\sqrt{25-x^2}\sqrt{7x+x^2}>-16-7x$. Если $0\leqslant x\leqslant 5$, то $-16-7x<0$, а так как $2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x}\geqslant 0$, то последнее неравенство, эквивалентное данному, будет выполнено при всех x таких, что $0\leqslant x\leqslant 5$. Но так как $0\leqslant x\leqslant 5$ есть область определения функции, стоящей в левой части данного неравенства (1), то сегмент [0, 5] и дает все решения неравенства (1). 2. Пусть выполнено данное неравенство (1), тогда $\sqrt{(x+2)(x-5)}$ есть действительное число, а потому $(x+2)(x-5)\geqslant 0$, откуда $x\leqslant -2$ или $x\geqslant 5$. Кроме того, число $\sqrt{(x+2)(x-5)}$ положительное или равно нулю (так как для квадратного радикала из положительного числа мы берем лишь положительное значение), а так как $8-x>\sqrt{(x+2)(x-5)}$, то и число $8-x>0$, откуда $x<8$. Значит, если выполнено неравенство (1), то $x\leqslant -2$ или $5\leqslant x<8$. Кроме того, из неравенства (1) следует, что $(x+2)(x-5)<(8-x)^2$, так как если неравенство (1) выполнено, то $\sqrt{(x+2)(x-5)}\geqslant 0$ и $8-x>0$. Итак, из данного неравенства следует, что $x\leqslant -2$ или $5\leqslant x<8$ и $(x+2)(x-5)<(8-x)^2$. Обратно: если выполнены неравенства $(x+2)(x-5)<(8-x)^2$, $x\leqslant -2$ (2′) или неравенства

$(x+2)(x-5)<(8-x)^2$, $5\leqslant x<8$ $(2'')$ и $(x+2)(x-5)\geqslant 0$, $8-x>0$, то значит будет выполнено неравенство (1). Итак, неравенство (1) эквивалентно совокупности двух систем неравенства (2′) и (2″), или

$$x\leqslant -2, \quad x<\frac{74}{13}\ (2'_1) \quad \text{и} \quad 5\leqslant x<8, \quad x<\frac{74}{13}\ (2''_2);$$

отсюда и находим все решения данного неравенства: $x\leqslant -2$, $5\leqslant x<\frac{74}{13}$. **3.** Если неравенство (1) выполнено, то $1-x\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, т. е. $0\leqslant x\leqslant 1$ и $\sqrt{1-x}>\sqrt{x}$, т. е. $1-x>x$, т. е. $x<\frac{1}{2}$. Таким образом, $0\leqslant x<\frac{1}{2}$. Далее,

$$(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})^2>\frac{1}{3}.$$

Итак, если выполнено неравенство (1), то

$$0\leqslant x<\frac{1}{2}, \quad (\sqrt{1-x}-\sqrt{x})^2>\frac{1}{3}. \tag{2}$$

Обратно: если выполнены неравенства (2), то $\sqrt{1-x}$ и $\sqrt{x}$ — действительные числа, причем $\sqrt{1-x}>\sqrt{x}$, а потому из неравенства $(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})^2>\frac{1}{3}$ следует, что $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}$. Итак, неравенство (1) эквивалентно системе неравенств (2) или $1-x-2\sqrt{1-x}\sqrt{x}+x>\frac{1}{3}$, $0\leqslant x<\frac{1}{2}$, или $\sqrt{x}\sqrt{1-x}<\frac{1}{3}$, $0\leqslant x<\frac{1}{2}$. (2′). Из неравенств (2′) следует, что

$$x(1-x)<\frac{1}{9}, \quad 0\leqslant x<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Обратно: если выполнены неравенства (3), то $x>0$, $1-x>0$, а потому из неравенства $x(1-x)<\frac{1}{9}$ следует, что $\sqrt{x}\sqrt{1-x}<\frac{1}{3}$. Значит, система неравенств (3) эквивалентна системе неравенств (2), следовательно и неравенству (1). Решая неравенство $x(1-x)<\frac{1}{9}$ или $x^2-x+\frac{1}{9}>0$, находим или $x<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}$ или $x>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}$. Итак, данное нам неравенство эквивалентно двум следующим системам неравенств:

$$x<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}, \quad 0\leqslant x<\frac{1}{2} \tag{4_1}$$

и

$$x>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}, \quad 0\leqslant x<\frac{1}{2}. \tag{4_2}$$

Система неравенств (4_1) эквивалентна следующей системе $0\leqslant x<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}$, а система неравенств (4_2) не имеет решений. Итак, все решения данного неравенства: $0\leqslant x<\frac{3-\sqrt{5}}{6}$. Второй способ: $\sqrt{1-x}>\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}$. Считая $0\leqslant x<1$, можем утверждать, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$1-x>x+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}, \quad x+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}<0,$$

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)<0;$$

значит,

$$0\leqslant\sqrt{x}<\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, \quad 0\leqslant x<\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{6}.$$

При решении иррациональных неравенств, содержащих логарифмические и показательные функции (а также тригонометрические и обратные тригонометрические

функции), можно исходить из следующей теоремы: если элементарная функция $f(x)$ определена при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, и если при всех этих значениях x она не обращается в нуль, то при всех этих значениях x она сохраняет знак. Справедливость этой теоремы следует из непрерывности элементарной функции, которая определена при всех x из некоторого интервала (a, b), а также из свойств непрерывной функции. Это замечание позволяет свести вопрос о решении неравенств к вопросу об отыскании области определения элементарной функции $f(x)$ (что часто приводит снова к решению неравенств, только более простых), корней элементарной функции и изолированных точек, в которых она не определена. Решим задачу (3) этим способом. Перепишем данное неравенство в виде $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}>0$ и решим уравнение $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$, или $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$-x-2\sqrt{1-x}\sqrt{x}+x=\frac{1}{3},\quad -2\sqrt{x-x^2}=-\frac{2}{3},\quad \sqrt{x-x^2}=\frac{1}{3},\quad x-x^2=\frac{1}{9};$$

отсюда $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{6}$ и $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$. Из этих значений x корнем уравнения $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ является только x_1. В самом деле,

$$\sqrt{1-\frac{3-\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{12}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{12}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Выражение $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$ при подстановке в него x_2 вместо x обращается в $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; следовательно, x_2 не является корнем уравнения $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Теперь заметим, что функция $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ определена при всех x, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant x\leqslant 1$. Корень x_1 разбивает сегмент $0\leqslant x\leqslant 1$ на два полуинтервала:

$$0\leqslant x<\frac{3-\sqrt{5}}{6}, \tag{A}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{6}<x\leqslant 1. \tag{B}$$

Для какого-нибудь значения x из промежутка (A), например для $x=0$, мы имеем $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=1>\frac{1}{\sqrt{3}}$. Для какого-нибудь значения x из промежутка (B), например, для $x=1$, имеем $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=-1<\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, на основании сформулированной выше теоремы данное неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $0\leqslant x<\frac{3-\sqrt{5}}{6}$. 4. Если выполнено неравенство

$$x-4<\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}, \tag{1}$$

то $1+x\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant -1$. Далее, при тех же условиях

$$x-4<\frac{x^2(1-\sqrt{1+x})^2}{(1+\sqrt{1+x})^2(1-\sqrt{1+x})^2},$$

или $x-4<(1-\sqrt{1+x})^2$, или $\sqrt{1+x}<3$, откуда $1+x<9$, или $x<8$. Итак, если неравенство (1) выполнено, то $x\geqslant -1$, $x<8$ и обратно. Значит, все решения данного неравенства $-1\leqslant x<8$. 5. Первый способ. Области определения

функций, входящих в данное неравенство, определяются условиями (см. замечание к решению задачи 3 этого параграфа) $x>0$ и $x\geqslant\sqrt{x}$; таким образом, при $x\geqslant 1$ все функции будут определены. Решая уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$, находим единственный его корень $x=\frac{25}{16}$. Область определения $[1,+\infty)$ — этот корень разбивает на две части: $\left[1,\frac{25}{16}\right)$ и $\left(\frac{25}{16},+\infty\right)$. Если взять, например, $x=1$, то $\sqrt{1+\sqrt{1}}-\sqrt{1-\sqrt{1}}=\sqrt{2}$ будет больше, чем $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$; значит,

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

при всех x таких, что $1\leqslant x<\frac{25}{16}$. Если взять, например, $x=9$ $\left(9>\frac{25}{16}\right)$, то $\sqrt{9+\sqrt{9}}-\sqrt{9-\sqrt{9}}=\sqrt{12}-\sqrt{6}$ будет меньше, чем $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{9+\sqrt{9}}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$; значит, $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}<\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$ при всех $x>\frac{25}{16}$. Итак, все решения заданного неравенства $1\leqslant x<\frac{25}{16}$. Второй способ. Область определения функции $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$ есть $x\geqslant 1$. Далее, считаем, что $x\geqslant 1$. Система неравенств $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$, $x\geqslant 1$, или $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, $x\geqslant 1$ эквивалентна следующей: $\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}>\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, $x\geqslant 1$, или $\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}>\frac{3}{2}$, $x\geqslant 1$, или $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>\frac{1}{2}$, $x\geqslant 1$, или $\sqrt{x}>\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}$, $x\geqslant 1$, или $x>x-1+\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}$, $x\geqslant 1$, или $\sqrt{x-1}<\frac{3}{2}$, $x\geqslant 1$, или $x<\frac{25}{16}$, $x\geqslant 1$, или $1\leqslant x<\frac{25}{16}$. **6.** $(5,+\infty)$. **7.** $(-\infty,0)$. **8.** $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$, $(3,+\infty)$. **9.** $(3,11)$. **10.** $(0,5)$. **11.** $(9,10)$, $(34,35)$. **12.** $\left(-2,-\sqrt[4]{12}\right]$, $\left[\sqrt[4]{12},2\right)$. **13.** $\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$. **14.** Область определения функции, стоящей в левой части неравенства, есть сегмент $[-2,2]$;

$$\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}-2\frac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{9x^2+16}}>0,$$

$$(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})\left(1-2\frac{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}{\sqrt{9x^2+16}}\right)>0,$$

$$\frac{(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}\cdot\frac{\sqrt{9x^2+16}-2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}}>0,$$

$$(6x-4)[\sqrt{9x^2+16}-2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})]>0, \qquad (1)$$

так как $\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}>0$, $\sqrt{9x^2+16}>0$. Последнее неравенство (1) эквивалентно следующему: $(6x-4)[\sqrt{9x^2+16}-2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})][\sqrt{9x^2+16}+2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{1-x})]>0$, так как последний множитель положителен при всех x таких, что $-2\leqslant x\leqslant 2$. Итак,

$$(3x-2)[9x^2+16-4(12-2x)+4\sqrt{8-2x^2}]>0,$$

или

$$(3x-2)(9x^2+8x-32-16\sqrt{8-2x^2})>0,$$
$$(3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})(2\sqrt{8-2x^2}+8+x)>0,$$

или $(3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})>0$, так как $2\sqrt{8-2x^2}+8+x>0$, если $-2\leqslant x\leqslant 2$. При $x<0$ это неравенство выполняется. Будем считать, что $x\geqslant 0$. Если $x\geqslant 0$, то второй множитель $x-2\sqrt{8-2x^2}$ будет положителен тогда и только тогда, когда $x>2\sqrt{8-2x^2}$, $x^2>4(8-2x^2)$, $x>\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Первый же множитель будет положителен, если $x>\frac{2}{3}$, и отрицателен, если $x<\frac{2}{3}$. Отсюда ответ: $\left[-2, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, 2\right]$. 15. $\left(1, \frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$. 16. $[-1, 1]$. 17. $\left[0, \left(\frac{29}{12}\right)^2\right]$. 18. $(1, +\infty)$. 19. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. 20. $\left(\frac{3}{4}, 2\right)$. 21. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right)$, $(0, 2)$.

§ 15. Составление нелинейных уравнений

П. 1. Составление квадратных уравнений с одним неизвестным

1. 31 и 41. 2. 10 л. 3. 36. 4. 8 л., затем 7 л. 5. $\frac{2}{5}$ или $\frac{7}{15}$. 6. 5. 7. 105 *м*. 8. 9. 9. 10 час., 15 час. 10. 12 *кг*, 15 *кг*. 11. 8 *км/час*, 10 *км/час*. 12. 53 и 147. 13. $\frac{7}{10}$. 14. Поезд прибывает на станцию B в 9 час., на станцию C — в 10 час. 3 мин, на станцию D — в 11 час. 6 мин., на станцию E — в 12 час. 9 мин. 15. 4,5%. 16. 12 час.; 15 час.; 17. 20 *м*. 18. 15. 19. 10 час. 20. 3 *км/час*. 21. $\frac{1}{2c}(\sqrt{c^2b^2+4abc}-cb)$. 22. $m-\frac{n}{2}+\sqrt{m^2+\frac{n^2}{4}}$ час. и $m+\frac{n}{2}+\sqrt{m^2+\frac{n^2}{4}}$ час. 23. К концу 15 октября. 24. $\frac{-cb+\sqrt{c^2b^2+2abc}}{2c}$ и $\frac{cb+\sqrt{c^2b^2+2abc}}{2c}$. 25. $\frac{-mn+\sqrt{m^2n^2+4amn}}{2n}$, $\frac{mn+\sqrt{m^2n^2+4amn}}{2n}$. 26. $\sqrt{a^2-\frac{2as}{m}}$. 27. $a-\sqrt{ab}$. 28. $\frac{m+\sqrt{m^2+8mn}}{2}$, $\frac{-m+\sqrt{m^2+8mn}}{2}$. 29. $\frac{\sqrt{c^2b^2+4abc}-bc}{2}$. 30. $\frac{-a+\sqrt{a^2+2as}}{2}$, $\frac{a+\sqrt{a^2+2as}}{2}$. 31. $b+\sqrt{b^2-ab}$, $b-a+\sqrt{b^2-ab}$. 32. $\frac{3a+2mc+\sqrt{4m^2c^2-4amc+9a^2}}{4m}$. Указание. Для того чтобы легко выбрать нужный корень квадратного уравнения, следует принять за неизвестное разность между скоростью катера и скоростью реки. 33. По железной дороге за s руб. можно перевезти $\frac{-bk+\sqrt{b^2k^2+400bsk}}{2b}$ тонн, а водным путем $\frac{bk+\sqrt{b^2k^2+400bsk}}{2b}$ тонны. 34. $\frac{v}{g}(v+gt-\sqrt{v^2+2vgt})$. 35. $\frac{1}{2}(c+b-\sqrt{(c-b)^2+4hc})$. 36. Решение. Будем искать решение рекуррентного соотношения $x_n=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$ в виде $x_n=z^n$. Имеем $z^n=\frac{z^{n-2}+z^{n-1}}{2}$ или $2z^2-z-1=0$, откуда $z=1$ и $z=-\frac{1}{2}$. Имеем два решения: $x_n=1$ и $x_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$. Решением будет и их линейная комбинация $x_n=C_1+C_2\frac{(-1)^n}{2^n}$, где C_1 и C_2 — произвольные числа. Выберем их так, чтобы удовлетворялись «начальные» условия $x_1=C_1-\frac{C_2}{2}=a$, $x_2=C_1+\frac{C_2}{4}=b$; отсюда $C_1=\frac{a+2b}{3}$, $C_2=\frac{4}{3}(b-a)$, и окончательно $x_n=\frac{a+2b}{3}+\frac{4(b-a)}{3\cdot 2^n}(-1)^n$. 37. n — число девятиклассников. Между собой они сыграли $\frac{n(n-1)}{2}$ партий и набрали, следовательно, столько же очков. Десятиклассники между собой сыграли $\frac{10n(10n-1)}{2}$

партий и набрали столько же очков. Девятиклассники с десятиклассниками сыграли $n \cdot 10n = 10n^2$ партий. Пусть из этих партий девятиклассники набрали $\frac{k}{2}$ очков (k — целое), тогда десятиклассники $10n^2 - \frac{k}{2}$ очков. По условию

$$\frac{\frac{10n(10n-1)}{2} + 10n^2 - \frac{k}{2}}{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k}{2}} = \frac{9}{2},$$

или $k = 21n^2 - n$. Так как $10n^2 - \frac{k}{2} = \frac{n - n^2}{2} \geqslant 0$, то возможно лишь $n = 1$, тогда $k = 20$, а $\frac{k}{2} = 10$ — число очков, набранное девятиклассниками.

П. 2. Составление нелинейных уравнений с одним неизвестным

1. 6 *км/час*. 2. A — 375 руб., B — 450 руб. 3. 50%. 4. $\frac{\sqrt[35]{2}}{\sqrt[35]{2}-1}$. 5. $\frac{k}{\sqrt[n]{2}-1} - 100$. 6. $n = \frac{\lg 2}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$. 7. $R = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{\delta - d}{\Delta - d}} - 1}$; $\delta > \Delta > d$ или $\delta < \Delta < d$. 8. $a\frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{c} - \sqrt{b}}$. 9. 15. 10. Решение. Пусть x — число страниц и пусть x есть k-значное число. Представим его в виде $x = 9 + 90 + 900 + \ldots + 9 \cdot 10^{k-2} + (x - 10^{k-1} + 1)$. Для нумерации понадобится число цифр, равное $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \ldots + (k-1) 9 \cdot 10^{k-2} + k(x - 10^{k-1} + 1) = nx$; отсюда $(k + 1 - n)x = k(10^{k-1} - 1) - [9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \ldots + (k-1) \cdot 9 \cdot 10^{k-2}]$ или $(k - n)x = \frac{10^k - 1}{9} - k = \underbrace{111\ldots1}_{k \text{ раз}} - k$. Так как справа стоит k-значное число, начинающееся с 1, а $k + 1 - n$ — целое число, x является k-значным числом, то для n возможно лишь одно значение, при котором $k - n$ будет равно 1; это значение $n = k - 1$. Тогда число страниц $x = \underbrace{111\ldots1}_{n+1 \text{ раз}} - (n + 1)$. Например, если $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, то число страниц $x = 111 - 3 = 108$, $x = 1111 - 4 = 1107$, $x = 11106$, $x = 111105$, $x = 1111104, \ldots$ Для нумерации же страниц в количестве 108, 1107, 11106, 111105, 1111104, ... понадобится число цифр, соответственно равное: $2 \cdot 108 = 216$, $3 \cdot 1107 = 3321$, $4 \cdot 11106 = 44424$, $5 \cdot 111105 = 555525$, $6 \cdot 1111104 = 6666624, \ldots$

П. 3. Составление систем нелинейных уравнений

1. 18 *км*, 6 *км/час*, 4 *км/час*. 2. 8 *км*. 3. 600 руб. по 4%. 4. $\frac{2c}{a-b}$, $\frac{2c}{a+b}$. 5. $v_1 = \frac{m - 2 + \sqrt{m^2+4}}{2m} s$, $v_2 = \frac{m + 2 - \sqrt{m^2+4}}{2m} s$. 6. $t + \sqrt{t^2 - 2tm}$ и $t - \sqrt{t^2 - 2tm}$. 7. В 17 час. 8. 4 *м*. 9. 4 *км/час*. и 20 *км/час*. 10. 8 *л/сек*, 10 *л/сек* или $\frac{128}{21}$ *л/сек*, $\frac{170}{21}$ *л/сек*. 11. В 12 час. 12. 5 час. и 7 час. 30 мин. 13. 80 *м/мин* и 220 *м/мин*. 14. 136 раз. 15. 23 и 32. 16. 100 руб. и 64 руб. или 102 руб. 50 коп. и 61 руб. 50 коп. 17. 24 или 42. 18. 50 *км/час*, 30 *км/час*. 19. 15. 20. 40 рабочих, 15 ящиков в час. 21. 72. 22. Или обоим по 12 час., или первому 10 час., второму 15 час. 23. 63. 24. 4 *км/час* и 6 *км/час*. 25. 54. 26. 30 дней, 60 дней. 27. 21 *км*. 28. 6 сыновей, 5 дочерей. 29. 28. 30. 9 и 4. 31. 6 час., 3 час. 32. Наполняет за 5 мин., опорожняет за 4 мин. 33. 60 *км/час*, 84 *км/час*. 34. 6 час. и 9 час. 35. 3762. 36. 3 час. 51 мин. 37. 421. 38. —3, —6, —12, —24. 39. $AB = 840$ *км*, $v_1 = 80$ *км/час*, $v_2 = 70$ *км/час*. 40. 972 и 314. Первый ученик уменьшил на единицу число сотен, второй уменьшил на две единицы число тысяч, третий уменьшил на единицу число десятков тысяч. 41. A — 240 ведер в час, B — 200 ведер в час; втекает 120 ведер в час; в начальный момент было 1200 ведер. 42. 452. 43. $AB = 10$ *км*, $BC = 24$ *км*, $AC = 26$ *км*. Скорость пешехода 3 *км/час*. Скорость велосипедиста 9 *км/час*.

44. 20 000 руб. на 1 год и 30 000 руб. на 8 месяцев. **45.** 7 *км/час*, $9\frac{1}{3}$ *км/час*. $CD = 56$ *км*. **46.** 15 ведер в мин. и 10 ведер в мин. **47.** 30 *км*, 36 *км*. **48.** 60 *км/час*. **49.** $p = 5\%$, $q = 4\%$ (точные значения); второе решение: $p = 3{,}888\%$ (с недостатком), $q = 4{,}888\%$ (с избытком). **50.** 24 и 90. Указание. $\frac{360}{x} = k$ и $\frac{360}{y} = s$ взаимно просты. Далее $\frac{360}{x} - \frac{360}{y} = 66$ и т. д. **51.** $v_1 = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} + 1\right)$, $v_2 = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} - 1\right)$. **52.**

$$v_1 = \frac{d(k-1)}{2ak} - \frac{d}{2t}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{t^2(k-1)^2}{a^2k^2}}\right),$$

$$v_2 = \frac{d(k-1)}{2ak} + \frac{d}{2t}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{t^2(k-1)^2}{a^2k^2}}\right).$$

В выражении для v_2 радикал следует взять отрицательным, так как $v_2 - \frac{d}{2t} > 0$.

53. $m\frac{\sqrt{q} + \sqrt{p}}{\sqrt{q} - \sqrt{p}}$. **54.** $\frac{2ac + a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4abc^2}}{2(c+1)}$,

$\frac{2bc + b - a + \sqrt{(a-b)^2 + 4abc^2}}{2(c+1)}$, $\frac{c\left[-a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4abc^2}\right]}{2(c+1)}$.

55. $v_1 = \frac{qs - 2mt + \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}$, $v_2 = \frac{qs + 2mt - \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}$.

56. $\frac{qm - pn}{m - n}$ руб., $\frac{p - q}{qm - pn}$ 1200% в год. **57.** $AB = 3p - q$, $v_1 = 2\frac{2p - q}{t}$, $v_2 = \frac{2p}{t}$. **58.** $\frac{a}{2}\left(2 + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 4}\right)$ и $\frac{a}{2}\left(2 + \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - 4}\right)$. **59.** $a + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$ час. и $a - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$ час. **60.** $\frac{a^2}{8(a-2b)} + a + 2r$. **61.** 167 и 334; пятизначное число 27889. Указание. $\frac{1000x + y}{z} = 3\frac{xy}{z}$. Отсюда следует, что y делится на x, а так как y и x — трехзначные числа, то частное может быть целым числом от 1 до 9; из $1000x + y = 3xy$ следует, что $1000x + y$ делится на 3. Значит, возможно лишь $y = 2x$, $y = 5x$, $y = 8x$. Возможно лишь $y = 2x$. Отсюда $x = 167$, $y = 334$. Остается еще заметить, что 167 — простое число, так что z может быть или $167^2 = 27809$, или $2 \cdot 167^2$ — это число не подходит. **62.** Два семиклассника, играя между собой, получили одно очко, а значит, еще 7 очков они получили с восьмиклассников. С восьмиклассниками они сыграли $2x$ партий, где x — число восьмиклассников. От этих партий восьмиклассники получили $2x - 7$ очков, да еще $\frac{x(x-1)}{2}$ очков, играя друг с другом. Итого: $\frac{x^2 + 3x - 14}{2}$ и это по условию равно $\frac{k}{2} \cdot x$, где $\frac{k}{2}$ — число очков, полученных каждым восьмиклассником. Имеем: $k = x + 3 - \frac{14}{x}$. Так как k и x — целые положительные числа, то $x = 7$ или $x = 14$.

63. Скорость A $2a$ *м/мин*, скорость B $3a$ *м/мин*. Если часы у B идут верно, то часы у A отстают на 10 мин. в час., а если часы у A идут верно, то часы у B идут вперед на 12 мин. в час.

§ 16. Составление неравенств

П. 1. Составление неравенств второй степени с одним неизвестным

1. $3 < v \leqslant 5$. **2.** $10 < v \leqslant 40$. **3.** $0 < v \leqslant 20$ *км/час*. **4.** Пусть x — собственная скорость лодки, тогда

$$\frac{a}{x+v} + \frac{b}{x-v} \leqslant t, \quad \text{или} \quad \frac{tx^2 - (a+b)x + v(a-b) - tv^2}{(x+v)(x-v)} \geqslant 0,$$

или (так как $x + v > 0$, $x - v > 0$)

$$f(x) = tx^2 - (a+b)x + v(a-b) - tv^2 \geqslant 0.$$

Корни этого трехчлена действительны и различны, так как дискриминант положителен: $\Delta = (a+b)^2 - 4t\,[v(a-b) - tv^2] = (a+b-2vt)^2 + 8bvt > 0$. Число v заключено между корнями $f(x)$: $x_1 < v < x_2$, так как $f(v) = -2bv < 0$ [$f(x) = t(x-x_1)(x-x_2)$]. Из условия задачи следует, что $x > v$; неравенство же $f(x) \geqslant 0$ выполняется при $x \leqslant x_1$ или $x \geqslant x_2$. Условие $x \leqslant x_1$ не может иметь места, ибо тогда $x < v$, значит x должно быть больше или равно наибольшему из корней $f(x)$, т. е.

$$x \geqslant \frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2 - 4t\,[v(a-b) - tv^2]}}{2t},$$

или

$$x \geqslant \frac{a+b+\sqrt{(a+b-2vt)^2 + 8bvt}}{2t}.$$

5. Между $\frac{1}{3}$ или $\frac{7}{16}$. 6. Длина забора вдоль реки 50 *м*, расстояние забора до реки 25 *м*. 7. 36 *см*, 1,84 сек. 8. $1{,}5 \leqslant v \leqslant 42$ *м/сек*. 9. Первый пришел раньше второго.

П. 2. Составление нелинейных неравенств

1. $\frac{3}{8}$, или $\frac{4}{15}$, или $\frac{5}{24}$. 2.

$$n \geqslant \frac{\lg\left(\frac{3Ap}{100} - B\right) - \lg\left(\frac{Ap}{100} - B\right)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}, \quad \frac{Ap}{100} > B.$$

3. $n \geqslant \dfrac{\lg \frac{r(100-k)}{k(100-r)}}{\lg \frac{100-q}{100-p}}$. 4. Если x — число процентов примесей газа перед поступлением в первый фильтр, то $x \leqslant \dfrac{(a+b)r - bq}{a\left[\left(1 - \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \frac{r}{100}\right]}$, при этом $(a+b)r > bq$. 5. $n \geqslant \dfrac{\lg \frac{p}{p-q}}{\lg \frac{A+a}{A}}$. 6. Количество бактерий в колбе будет превышать их начальное количество в 2 раза через число часов $m \geqslant \dfrac{\lg \frac{2Np - 100n}{Np - 100n}}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$.

Условие возможности решения: $Np - 100n > 0$.

Глава VII. Показательная и логарифмическая функция над полем действительных чисел

§ 1. Доказательство различных равенств, содержащих показательную и логарифмическую функции

2. $\lg 2 = 0{,}3010275$, $\lg 5 = 0{,}6989725$. 3. $z = \dfrac{(y+1)^4 + (y-1)^4}{(y+1)^4 - (y-1)^4}$, $y = \dfrac{\sqrt[4]{\frac{z+1}{z-1}} + 1}{\sqrt[4]{\frac{z+1}{z-1}} - 1}$.

9. $\dfrac{1+ab}{a(8-5b)}$. 10. $3(1-a-b)$. 11. $\dfrac{1+a}{2b}$. 13. м) функция, обратная для $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ $(-\infty < x < +\infty)$, будет $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$; функция, обратная на полуинтервале $[0, +\infty)$ для $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$, будет $y = \log_a(x + \sqrt{x^2-1})$, если $a > 1$, и $y = \log_a(x - \sqrt{x^2-1})$, если $0 < a < 1$; обе эти функции определены на

полуинтервале $[1, +\infty)$; функцией, обратной на полуинтервале $(-\infty, 0]$ для функции $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$, будет $y=\log_a(x-\sqrt{x^2-1})$, если $a>1$ и $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$, если $0<a<1$. Обе функции определены на полуинтервале $[1, +\infty)$. Функцией обратной для $y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$, будет $y=\frac{1}{2}\log_a\frac{1+x}{1-x}$. Эта функция определена в интервале $(-1, 1)$.

§ 2. Логарифмические и показательные уравнения с одним неизвестным

1. a. **2.** b, $\frac{1}{b}$. **3.** 1; 4. **4.** $\frac{1}{10}$, 100. **5.** $\frac{1}{100}$, 100. **6.** $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. **7.** $\frac{9}{2}$. **8.** Если $a<10^b$, то уравнение не имеет корней. Если $a\geqslant 10^b$, то $x=\lg_{10}a\pm\sqrt{\lg_{10}^2 a-b^2}$. **9.** 1, ac. **10.** Если $0<n<10\,000$ и $n\neq 1000$, то два корня $2\pm\sqrt{4-\lg_{10}n}$; если $n=10\,000$, то $x=2$; если $n=1000$, то $x=3$; если $n>10\,000$, то корней нет. **11.** Если $a>1$, то $x_1=a^{a^2}$; $x_2=a^{a^{-2}}$. Если $0<a<1$, то уравнение не имеет корней. **12.** 2. **13.** 5, $\sqrt[5]{5}$. **14.** $\frac{1}{9}$. **15.** 10; 100 000. **16.** Если или $p\leqslant 0$, или $q\leqslant 0$, решений нет. Если $p>0$, $q>0$, то уравнение имеет два корня: $\frac{p-q}{2}\pm\sqrt{pq}$. **17.** $\frac{1}{5}$. **18.** $2^{\sqrt{2}}$, $2^{-\sqrt{2}}$. **19.** 2; 3. **20.** Корней нет. **21.** $\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$. **22.** 1, a, $a^{-1,3}$. **23.** 3. **24.** 2, -2. **25.** 100, $\frac{1}{10}$. **26.** $\sqrt{26}$. **27.** 7; -1. **28.** $-\frac{9}{10}$. **29.** 1; 2. **30.** 10, $\frac{1}{10}$. **31.** $\frac{3}{2}$. **32.** 4; 2. **33.** 2; 4. **34.** Если $|a|<\sqrt{2}$, то уравнение имеет корень $x=1-a^2$. Если $|a|\geqslant\sqrt{2}$, то уравнение не имеет корней. **35.** 1, a. **36.** 2. **37.** $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$. **38.** $4-\sqrt{2}$. **39.** 5, $\frac{1}{25}$. **40.** $\sqrt[4]{10}$. **41.** $\frac{1}{2}\left(\log_3 2\pm\sqrt{\log_3^2 2-4\log_3\frac{56}{153}}\right)$. **42.** 37. **43.** 2, $-1-\log_5 2$. **44.** $\frac{\lg 13-\lg 31}{\lg 5-\lg 3}$. **45.** Если $m\leqslant 2$, то уравнение не имеет корней. Если $m>2$, то уравнение имеет два корня: $\frac{\lg\frac{a}{b}}{\lg\frac{m\pm\sqrt{m^2-4}}{2}}$.

46. $\frac{\lg 19-\lg 3}{\lg 19+\lg 3-\lg 37}$, $\frac{\lg 3-\lg 19}{\lg 19+\lg 3-\lg 37}$. **47.** Корней нет. **48.** 0. **49.** 4. **50.** 8; 4. **52.** $a^{\frac{-11\pm\sqrt{41}}{10}}$. **53.** $10^{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}}$. **54.** 2; $2^{\frac{-\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}}$. **55.** $\frac{3}{2}$. **56.** 4. **57.** 8. **58.** $2+\frac{\lg 7-\lg 57}{\lg 7-\lg 2}$. **59.** Указание. Построив графики функций $y=2^x$ и $y=x+3$, видим, что они пересекаются в точках с абсциссами, заключенными в интервалах $(-3, -2)$ и $(2, 3)$. При этом $2^{-3}-(-3)-3>0$, $2^{-2,9}-(-2,9)-3=2^{-2,9}-0,1>\frac{1}{2^3}-0,1>0$, $2^{-2,8}-(-2,8)-3=2^{-2,8}-0,2=2\left(\frac{1}{2^{3,8}}-\frac{1}{10}\right)$; вычисляя $\frac{1}{2^{38}}-\frac{1}{10^{10}}$, получим $\frac{1}{1024\cdot 1024\cdot 1024\cdot 128}-\frac{1}{10^{10}}<\frac{1}{10^{11}}-\frac{1}{10^{10}}<0$; значит, один из корней заключен между $-2,9$ и $-2,8$. Далее, исследуем интервал $(2, 3)$, имеем: $2^2-2-3=-1<0$, $2^{2,1}-2,1-3=2^{2,1}-5,1$; вычисляя $2^{21}-5,1^{10}$, будем иметь: $2^{21}=2\,097\,152$; $5,1^2=26,01$; $5,1^4=676,5201$; $5,1^8>676,5^2=455852,25$; $5,1^{10}>455852\cdot 26=11852152$; $2^{21}-5,1^{10}<0$; отсюда видно, что, значит, и $2^{2,1}-5,1<0$. Далее, $2^{2,2}-5,1<0$, ибо $2^{22}=4194304<5,1^{10}$ и тем более $2^{22}<5,2^{10}$. Далее, $2^{2,3}-5,3<0$, ибо $2^{23}=8388608<5,1^{10}$ и тем более $2^{23}<5,3^{10}$. Далее, $2^{2,4}-5,4<0$, ибо $2^{24}=16777216$, в то время как $5,4^2=29,16$; $5,4^4=850,3056$; $5,4^8>850^2=722500$; $5,4^{10}>722500\cdot 25>18000000$; значит, $2^{24}-5,4^{10}<0$, а потому и $2^{2,4}-5,4<0$. Наконец, $2^{2,5}-5,5>0$, ибо $2^{25}-5,5^{10}>33\,000000-5,5^{10}$, и так как $5,5^2=30,25$; $5,5^4=915,0625<915,1$; $5,5^8<837409$; $5,5^{10}<837409\cdot 30,25<840000\cdot 31=26040000$, то $2^{25}-5,5^{10}>33000000-26040000>0$, значит, и $2^{2,5}-5,5>0$. Итак, второй корень заключен между 2,4 и 2,5.

60. $\lg(kx)=2\lg(x+1)$, $x^2+(2-k)x+1=0$, $x=\frac{k}{2}-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}$. Для того чтобы хотя бы один корень был действительным, нужно, чтобы или $k<0$, или $k\geqslant 1$. Пусть $k\leqslant 0$, тогда $x_1x_2=1$, $x_1+x_2=k-2<0$, т. е. оба корня отрицательны; но $x_{1,2}+1=\frac{k}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}$ и при $k<0$ только $x_1+1=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}>0$, а так как $x_1<0$, $kx_1>0$, то при $k<0$ данное уравнение имеет только один корень $x=\frac{k}{2}-1+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k}$. Если $k>4$, то оба корня положительны. Наконец, если $k=4$, то данное уравнение имеет только один корень $x=1$. Итак, данное уравнение имеет только один корень, если $k<0$ или $k=4$. **61.** Переписать уравнение в виде $\lg x=\frac{1}{3x-1}$ и построить графики функций $y=\lg x$ и $y=\frac{1}{3x-1}$. Данное уравнение имеет два корня. Один из них заключен между 0 и 1, другой — между 1 и 2.

§ 3. Системы логарифмических и показательных уравнений

1. $\left(c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}, c^{\frac{b}{b-a}}\right)$. **2.** (1, 1), (−1, 1), $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9}\right)$. **3.** (1, 1), $\left(\frac{\lg b}{\lg a}, \frac{\lg a}{\lg b}\right)$. **4.** $\left(|a|^3, \frac{1}{|a|}\right)$, $\left(\frac{1}{|a|}, |a|^3\right)$. **5.** (1, 1, 2), $\left[\left(\sqrt{\frac{21}{20}}-\frac{1}{2}\right)^4, \left(\sqrt{\frac{21}{20}}-\frac{1}{2}\right)^2, \frac{4}{5}\right]$. **6.** $(\log_2 100, 1)$, $(\log_{10^2}100, 101)$. **7.** $\left(2^{\frac{1}{q}}, 2^{-\frac{1}{p}}\right)$ **8.** (1, 1, 2), $\left[\frac{1}{256}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^8, \frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^4, \frac{4}{3}\right]$. **9.** $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. **10.** $\left(\frac{4}{\lg_{10}(1+\sqrt{1000001})}, \sqrt{1000001}\right)$, $(\log_2 10000, 1)$. **11.** $[(\log_3 15)^{\log_3 15}(\log_3 15)^{\log_3 3}]$. **12.** $\left(-\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (3, 4). **13.** Если $\frac{\lg q}{\lg p}>0$, то $x=\left(\frac{\lg q}{\lg p}\right)^{\frac{\lg q}{\lg q-\lg p}}$, $y=\left(\frac{\lg q}{\lg p}\right)^{\frac{\lg p}{\lg q-\lg p}}$; если $\frac{\lg q}{\lg p}<0$, то система не имеет решений. **14.** (1, 1); если $\frac{p}{q}>0$, то система имеет еще решение $\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}, \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]$. **15.** (2, 6). **16.** (2, 32), (32, 2), (−2, −32), (−32, −2). **17.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$. **18.** (12, 10), (−10, −12). **19.** Если $ba^q\neq 1$ и $ab^p\neq 1$, то система имеет решение $\left[(ba^q)^{\frac{1}{pq-1}}, (ab^p)^{\frac{1}{pq-1}}\right]$; если или $ba^q=1$, или $ab^p=1$, то система не имеет решений. **20.** $(a^{2(2m-3n)}, a^{6(m-2n)})$. **21.** Если $m^2\neq n^2$, то $x=a^{\frac{nm^2}{m^2-n^2}}$, $y=a^{\frac{mn^2}{n^2-m^2}}$. Если $m^2=n^2$, то система не имеет решений. **22.** $\left(10^{\frac{\lg b\lg c}{\lg b-\lg a}}, 10^{\frac{\lg a\lg c}{\lg a-\lg b}}\right)$. **23.** (4, 2), (1, 1), (1, −1), (9, −3). Замечание. Одна из систем $x+y=-6$, $xy^2=1$, которая здесь получается, не имеет, очевидно, решений (x, y) с положительными значениями для x и y. Эта система имеет одно решение (x, y) с действительными значениями для x и y, которое находится так: $(-y-6)y^2=1$, $y^3+6y^2+1=0$, $y=\frac{1}{z}$, $z^3+6z+1=0$, $z=u+v$, $z^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$, $u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)+1=0$. Положим $uv=-2$, тогда $u^3+v^3=-1$, $u^3v^3=-8$, $\lambda^2+\lambda-8=0$, $u^3=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$, $v^3=\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$, $x=\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}-1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}+1}{2}}\right)^2$, $y=\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}-1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{33}+1}{2}}\right)^{-1}$; так как значение для y иррационально и отрицательно, то эта пара значений для x и y не образует решения данной системы. **24.** (−4, 10), (−3, 9), (5, 1), (7, 1).

25. (7, 5). 26. (10, 4), (4, 10). 27. (2, 2, 1). 28. (8, 2), $\left(\frac{1}{4}, 64\right)$, $(-8, -2)$, $\left(-\frac{1}{4}, 64\right)$. 29. $\left(\frac{1}{10}, 2\right)$, $(100, -1)$. 30. $\left(\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{16}\right)$. 31. $\left(10, \sqrt[4]{10}\right)$, $\left(\sqrt[4]{10}, 10\right)$. 32. $\left(\frac{1}{1000}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1000, -\frac{1}{2}\right)$. 33. (1, 1) и $\left(\frac{27}{8}, \frac{9}{4}\right)$. 34. (34, 30) и (20, 16). 35. (1, 1), (2, 4), $(-2, 4)$. 36. (1, 1). 37. (128, 2) и (2, 128). 38. (3, 2). Указание.

$$\sqrt{x^2+x+y+2}-\sqrt{x^2+4x+3y-2}=\sqrt{x^2+2y+3}-\sqrt{x^2+5x+2y-3}. \quad (1)$$

Возвести в квадрат. После упрощений получится уравнение $4x^2-3xy-y^2-9x+4y+5=0$, или $(x-y-1)(4x+y-5)=0$. Уравнение $x-y-1=0$ дает решение (3, 2). Для решения системы $x^{x-y}=2y-1$, $y=5-4x$ заметим, что она эквивалентна следующей: $x^{5x-5}=9-8x$, $y=5-4x$. Далее, необходимое условие выполнения равенства (1) таково:

$$\begin{cases} x^2+x+y+2 \geqslant x^2+3y+4x-2, \\ x^2+2y+3 \geqslant x^2+5x+2y-3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2+x+y+2 \leqslant x^2+3y+4x-2, \\ x^2+2y+3 \leqslant x^2+5x+2y-3. \end{cases}$$

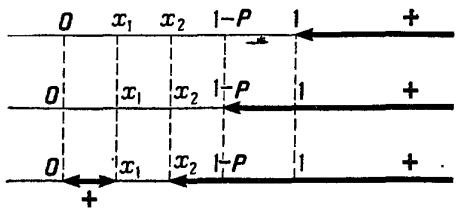
Упрощая первую систему неравенств, получим: $3x+2y\leqslant 4$, $x\leqslant\frac{6}{5}$ (или соответственно $3x+2y\geqslant 4$, $x\geqslant\frac{6}{5}$). Для уравнения $x^{5x-5}=9-8x$ мы должны найти положительные решения; значит, $x<\frac{9}{8}$. Следовательно, предположения $3x+2y\geqslant 4$ $x\geqslant\frac{6}{5}$ отпадают и остается $3x+4y\leqslant 4$, $x\leqslant\frac{6}{5}$. Однако система $x^{5x-5}=9-8x$, $y=5-4x$ не имеет решений, удовлетворяющих условию $3x+4y\leqslant 4$, $x\leqslant\frac{6}{5}$, ибо из $y=5-4x$, $3x+2y\leqslant 4$ находим: $3x+10-8\leqslant 4$, $5x\geqslant 6$, $x\geqslant\frac{6}{5}$, что противоречит условию $x<\frac{6}{5}$. Итак, данная система имеет только одно решение (3, 2). 39. $\left(10^{1+\sqrt{2,5}}, 10^{-1+\sqrt{2,5}}\right)$, $\left(10^{1-\sqrt{2,5}}, 10^{-1-\sqrt{2,5}}\right)$. 40. (1, 1), $\left(\frac{16}{81}, \frac{4}{9}\right)$.

41. $x=3^{2\frac{\lg_3\frac{2}{3}}{\lg_3\frac{4}{3}}}$, $y=\frac{5}{2}\frac{\lg_3\frac{4}{3}}{\lg_3\frac{2}{3}}$.

§ 4. Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функцию

1. $0<x<a^2$ или $1<x<\frac{1}{a^3}$. 2. $2<x<3$. 3. $0<x<2-\lg_2 3$, $x>1$. 4. $1<x<10$. 5. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, $\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}\right)$, $(1, +\infty)$. 6. $1<x<2$. 7. $-1<x<1$ или $3<x<5$. 8. $\lg_{x+p}2<\lg_x 4$, $0<p<\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\lg_2(x+p)}<\frac{2}{\lg_2 x}$, $\frac{2}{\lg_2 x}-\frac{1}{\lg_2(x+p)}>0$, $\frac{2\lg_2(x+p)-\lg_2 x}{\lg_2 x\lg_2(x+p)}>0$, $\frac{\lg_2\frac{(x+p)^2}{x}}{\lg_2 x\lg_2(x+p)}>0$. Прежде всего должно быть $x>0$. Далее: а) $\lg_2 x>0$, если $x>1$, и $\lg_2 x<0$, если $0<x<1$; б) $\lg_2(x+p)>0$, если $x+p>1$, т. е. $x>1-p$ и $\lg_2(x+p)<0$, если $0<x+p<1$, т. е. $0<x<1-p$; в) $\lg\frac{(x+p)^2}{x}>0$, если $\frac{(x+p)^2}{x}>1$; так как $x>0$, то это неравенство эквивалентно следующему: $(x+p)^2>x$, $x^2+(2p-1)x+p^2>0$. Корни

этого трехчлена $x_{1,2}=\frac{1}{2}-p\pm\sqrt{\frac{1}{4}-p}$ действительны и различны $\left(0<p<\frac{1}{4}\right)$. Далее, $x_1x_2=p^2$, $x_1+x_2=1-2p$; так как $x_1+x_2>0$ и $x_1x_2>0$, то оба корня положительны. Докажем, что оба они меньше, чем $1-p$. В самом деле, $x_1+x_2=1-2p=1-p-p<1-p$. Значит, оба корня меньше чем $1-p$. Пусть x_1 — меньший корень, а x_2 — больший. Тогда $\lg_2\frac{(x+p)^2}{x}>0$, если $0<x<x_1$ или $x>x_2$; $\lg_2\frac{(x+p)^2}{x}<0$, если $x_1<x<x_2$. Знаки $\lg_2 x$, $\lg_2(x+p)$, $\lg_2\frac{(x+p)^2}{x}$ нанесены на черт. 85. Так как меньший корень равен $x_1=\frac{1}{2}-p-\sqrt{\frac{1}{4}-p}$, а больший $x_2=\frac{1}{2}-p+\sqrt{\frac{1}{4}-p}$, то данное в условии задачи неравенство будет выполнено, если $0<x<\frac{1}{2}-p-\sqrt{\frac{1}{4}-p}$ или $\frac{1}{2}-p+\sqrt{\frac{1}{4}-p}<x<1-p$ или $x>1$.

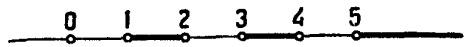


Черт. 85.

Глава VIII. Исследование элементарных функций

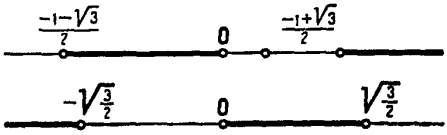
§ 1. Область определения

1. Выпишем корни подкоренного выражения в порядке их возрастания: 1, 2, 3, 4, 5. Если $x<1$, то все разности $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$, $x-5$ отрицательны и под корнем находится отрицательное число. Если $1\leqslant x\leqslant 2$, то $x-1\geqslant 0$, в то время как $x-2\leqslant 0$, $x-3<0$, $x-4<0$, $x-5<0$, так что под корнем находится неотрицательное число. Точно так же убеждаемся в том, что, если $2<x<3$, то подкоренное выражение отрицательно; если $3\leqslant x\leqslant 4$, то оно $\geqslant 0$; если $4<x<5$, то подкоренное выражение отрицательно, и, наконец, если $x\geqslant 5$, то оно $\geqslant 0$. Таким образом, область определения данной функции состоит из множества всех чисел, удовлетворяющих одному из неравенств: $1\leqslant x\leqslant 2$, $3\leqslant x\leqslant 4$, $x\geqslant 5$. Это множество чисел графически изображено на черт. 86. Утолщенными линиями отмечены промежутки, соответствующие числам, входящим в область определения данной функции. Можно сказать и так: область определения данной функции состоит из двух сегментов и одного полуинтервала: [1, 2], [3, 4], [5, $+\infty$]. 2. $-1\leqslant 4x^3-6x+1\leqslant 1$. Отсюда $4x^3-6x+2\geqslant 0$, $4x^3-6x\leqslant 0$ или $A=4(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\geqslant 0$, $B=4x\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\times\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\leqslant 0$. Корни функции A, расположенные в порядке их возрастания, будут $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, 1. Отсюда следует, что если $x<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $A<0$; если $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, то $A\geqslant 0$; если $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}<x<1$, то $A<0$; если $x\geqslant 1$, то $A\geqslant 0$. Итак, $A\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ или $x\geqslant 1$. Теперь решим неравенство $B\leqslant 0$. Корни функции B, расположенные в порядке их возрастания, будут $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Отсюда и из выражения для B следует, что если $x\leqslant-\sqrt{\frac{3}{2}}$, то $B\leqslant 0$; если $-\sqrt{\frac{3}{2}}<x<0$, то $B>0$; если $0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}$, то $B\leqslant 0$; если $x>\sqrt{\frac{3}{2}}$, то

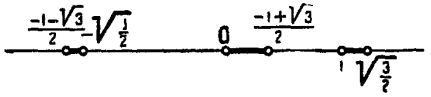


Черт. 86.

$B>0$. Таким образом, неравенству $B\leqslant 0$ удовлетворяют те и только те значения x, для которых $x\leqslant -\sqrt{\frac{3}{2}}$ или $0\leqslant x\leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$. Изобразим графически полученные результаты на двух параллельных осях (черт. 87). Отсюда ясно, что



Черт. 87.



Черт. 88.

соотношения $A\geqslant 0$, $B\leqslant 0$ одновременно выполняются тогда и только тогда когда $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant -\sqrt{\frac{3}{2}}$, или $0\leqslant x\leqslant \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, или $1\leqslant x\leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$. Эти три сегмента $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, $\left[0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$, $\left[1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ и образуют область определения данной функции (черт. 88). **3.** $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. **4.** 0. **5.** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. **6.** $(-\infty, +\infty)$. **7.** $[-1, 1]$. **8.** $(0, 2)$, $(3, +\infty)$. **9.** $(-\infty, 0)$, $(0, 2]$, $[3, +\infty)$. **10.** $(-5, 0)$, $(3, +\infty)$. **11.** $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$. **12.** $(-\infty, +\infty)$. **13.** $(-\infty, +\infty)$. **14.** $x>1$.

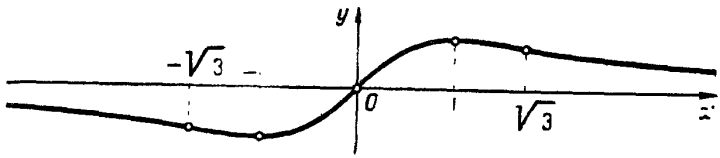
§ 2. Возрастание, убывание, выпуклость вверх и вниз

1. Составим разность $\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}=\frac{x_2+x_2x_1^2-x_1-x_1x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$.

Числа x_2-x_1, $1+x_1^2$, $1+x_2^2$ положительные. Остается доказать, что $1-x_1x_2>0$. В силу данных нам условий $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ имеем $1+x_1\geqslant 0$, $1-x_2\geqslant 0$. Отсюда $(1+x_1)(1-x_2)\geqslant 0$ или $1-x_1x_2\geqslant x_2-x_1$. Но $x_2-x_1>0$, значит, и $1-x_1x_2>0$. Итак, неравенство $\frac{x_1}{1+x_1^2}<\frac{x_2}{1+x_2^2}$ доказано. **2.** Как и выше, находим

$$\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Здесь по-прежнему $x_2-x_1>0$, $1+x_1^2>0$, $1+x_2^2>0$. Однако, $1-x_1x_2<0$. В самом деле, так как по условию $x_1<x_2\leqslant -1$, то $-x_1>1$, $-x_2\geqslant 1$, откуда



Черт. 89.

(перемножая) получаем $x_1x_2>1$. Следовательно, $1-x_1x_2<0$. Таким образом, теперь $\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}<0$ или $\frac{x_1}{1+x_1^2}>\frac{x_2}{1+x_2^2}$. График функции $y=\frac{x}{1+x^2}$ изображен на черт. 89. **3.** Пусть $-\sqrt{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant\sqrt{2}$. Надо доказать, что $x_1^3-6x_1>x_2^3-6x_2$. Составим разность

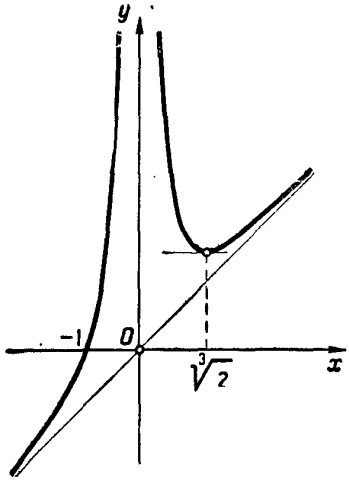
$$x_2^3-6x_2-(x_1^3-6x_1)=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6).$$

В силу неравенства $x_1<x_2$ имеем $x_2-x_1>0$. Докажем, что $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6<0$. В самом деле, из соотношений $-\sqrt{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant\sqrt{2}$ имеем $x_1+\sqrt{2}\geqslant 0$, $x_1-\sqrt{2}<0$, откуда (перемножая), получим $x_1^2-2\leqslant 0$, $x_1^2\leqslant 2$. Точно так же

докажем, что $x_2^2 \leqslant 2$. Теперь из неравенств $x_1 + \sqrt{2} \geqslant 0$, $\sqrt{2} - x_2 \geqslant 0$, перемножая, получим $(x_1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - x_2) \geqslant 0$ или $2 - x_1 x_2 \geqslant (x_2 - x_1)\sqrt{2}$, а так как $x_2 - x_1 > 0$, то и $2 - x_1 x_2 > 0$, откуда $x_1 x_2 < 2$. Складывая неравенства $x_1^2 \leqslant 2$, $x_1 x_2 < 2$, $x_2^2 \leqslant 2$, получим $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 < 6$. Таким образом, $x_2^3 - 6x_2 - \left(x_1^3 - 6x_1\right) < 0$, откуда $x_2^3 - 6x_2 < x_1^3 - 6x_1$. 4. Составим разность

$$A = x_2 + \frac{1}{x_2^2} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\left(x_1 x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right).$$

Теперь последовательно имеем: а) в силу неравенств $x_1 < x_2 < 0$ находим $x_2 - x_1 > 0$, $-\frac{1}{x_1} > 0$, $-\frac{1}{x_2} > 0$, $x_1 x_2 > 0$, так что $A > 0$, откуда $x_1 + \frac{1}{x_1^2} < x_2 + \frac{1}{x_2^2}$; б) в случае $0 < x_1 < x_2 \leqslant \sqrt[3]{2}$ имеем опять $x_2 - x_1 > 0$; кроме того, $x_1 x_2 > 0$ и остается только исследовать выражение $x_1 x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$. В силу данных неравенств находим $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{1}{x_2} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, откуда $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \sqrt[3]{4}$. ($\alpha$). Из условий же $0 < x_1 < \sqrt[3]{2}$, $0 < x_2 \leqslant \sqrt[3]{2}$ следует, что $x_1 x_2 < \sqrt[3]{4}$. (β). Из (α) и (β) выводим $x_1 x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < 0$, так что теперь $A < 0$, т. е. $x_1 + \frac{1}{x_1^2} > x_2 + \frac{1}{x_2^2}$; в) пусть, наконец, $\sqrt[3]{2} < x_1 < x_2$. Тогда $x_1 x_2 > \sqrt[3]{4}$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \sqrt[3]{4}$; значит, $x_1 x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} > 0$, откуда $A > 0$, т. е. $x_1 + \frac{1}{x_1^2} < x_2 + \frac{1}{x_2^2}$. График данной функции изображен на черт. 90. 5. $\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - 2x}{2(1+x^2)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0$, откуда $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$, причем знак равенства имеет место только при $x = 1$.



Черт. 90.

Итак, данная функция принимает наибольшее значение, равное $\frac{1}{2}$ при $x = 1$. Точно так же доказывается, что данная функция принимает наименьшее значение, равное $-\frac{1}{2}$, при $x = -1$ (черт. 89). Можно также сделать тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg}\varphi$; тогда данная функция обратится в $\frac{1}{2}\sin 2\varphi$ *. 6. Это сразу следует из результатов задачи 4: а) на полуинтервале $\left(0, \sqrt[3]{2}\right]$ данная функция убывает; б) на полуинтервале $\left[\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$ она возрастает. Значит, если рассматривать интервал $(0, +\infty)$, т. е. все положительные числа, то при $x = \sqrt[3]{2}$ функция имеет наименьшее значение. Это наименьшее значение равно $y = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. 7. Из данного выражения для y следует, что $y > 0$ и что $y^2 = 2x + 2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. Отсюда следует, что наименьшее значение y^2, а следовательно

* Сообщено С. И. Новоселовым.

и y, имеет при $x=0$*. 8. Составим разность:

$$A=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{1+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}\right)=$$

$$=(x_1+x_2)\left[\frac{2}{4+(x_1+x_2)^2}-\frac{1+x_1x_2}{2(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\right]=$$

$$=\frac{(x_1+x_2)\left[4(1+x_1^2)(1+x_2^2)-[4+(x_1+x_2)^2](1+x_1x_2)\right.}{2(1+x_1^2)(1+x_2^2)[4+(x_1+x_2)^2]}=$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(3x_1^2+3x_2^2+2x_1^2x_2^2-6x_1x_2-x_1^3x_2-x_2^3x_1)}{2(1+x_1^2)(1+x_2^2)[4+(x_1+x_2)^2]}.$$

Выражение, стоящее в числителе, обращается в нуль при $x_2=x_1$; следовательно, оно делится на x_2-x_1; поэтому $A=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2(3-x_1x_2)}{2(1+x_1^2)(1+x_2^2)[4+(x_1+x_2)^2]}=$ $=P(x_1+x_2)(3-x_1x_2)$, где $P=\frac{(x_2-x_1)^2}{2(1+x_1^2)(1+x_2^2)[4+(x_1+x_2)^2]}$ — число положительное (так как $x_1\neq x_2$). Теперь будем исследовать указанные выше случаи: а) $x_1<x_2\leqslant-\sqrt{3}$. Тогда $x_1+x_2<0$, $3-x_1x_2<0$; следовательно, $A>0$, т. е. функция выпукла вверх; б) $-\sqrt{3}\leqslant x_1<x_2\leqslant\sqrt{3}$. Тогда $x_1+x_2<0$, $3-x_1x_2>0$, $A<0$ — функция выпукла вниз; в) $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\sqrt{3}$. Тогда $x_1+x_2>0$, $3-x_1x_2>0$, $A>0$ — функция выпукла вверх; г) $\sqrt{3}\leqslant x_1<x_2$, тогда $x_1+x_2>0$, $3-x_1x_2<0$, $A<0$ — функция выпукла вниз (черт. 89). 9. Составим разность

$$A=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1^2}+x_2+\frac{1}{x_2^2}\right)=$$

$$=\frac{x_1^2x_2^2[(x_1+x_2)^3+8]-(x_1+x_2)^2(x_1^2+x_2^2+x_1^3x_2^2+x_1^2x_2^3)}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=$$

$$=\frac{6x_1^2x_2^2-x_1^4-2x_1x_2^3-2x_1^3x_2-x_2^4}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}=-\frac{(x_2-x_1)^2[(x_1+x_2)^2+2x_1x_2]}{2x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}.$$

Если $0<x_1<x_2$, то это выражение отрицательно, $A<0$, откуда $\frac{x_1+x_2}{2}+$ $+\frac{1}{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}<\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1^2}+x_2+\frac{1}{x_2^2}\right)$ — данная функция выпукла вниз. Если же $x_1<x_2<0$, то опять $A<0$ (черт. 90). 10. Составим разность

$$A=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3+a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\frac{x_1+x_2}{2}+c-$$

$$-\frac{1}{2}(x_1^3+ax_1^2+bx_1+c+x_2^3+ax_2^2+bx_2+c)=$$

$$=-\frac{1}{8}(x_2-x_1)^2(3x_1+3x_2+2a).$$

Отсюда следует, что: а) если $x_1<x_2\leqslant-\frac{a}{3}$, то $3x_1+a<0$, $3x_2+a<0$; значит, $3x_1+3x_2+2a<0$, откуда $A>0$, т. е. функция выпукла вверх; б) если же $-\frac{a}{3}\leqslant x_1<x_2$, то $A<0$ и данная функция выпукла вниз. 11. Предполагая, что $-a\leqslant x_1<x_2\leqslant a$, составим разность

$$A=\sqrt{a^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}(\sqrt{a^2-x_1^2}+\sqrt{a^2-x_2^2}).$$

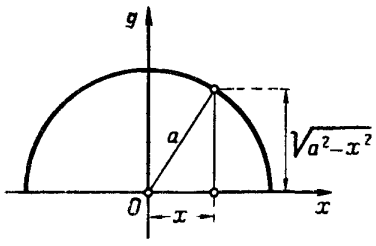
* Это решение дал Л. М. Лоповок.

Надо доказать, что эта разность положительна; преобразуем ее следующим образом:

$$A=\frac{a^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left[a^2-x_1^2+2\sqrt{(a^2-x_1^2)(a^2-x_2^2)}+a^2-x_2^2\right]}{\sqrt{a^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x_1^2}+\sqrt{a^2-x_2^2}\right)}=$$

$$=\frac{a^2-x_1x_2-\sqrt{(a^2-x_1^2)(a^2-x_2^2)}}{2\sqrt{a^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}+\sqrt{a^2-x_1^2}+\sqrt{a^2-x_2^2}}.$$

Умножая числитель и знаменатель на $a^2-x_1x_2+\sqrt{(a^2-x_1^2)(a^2-x_2^2)}$, получим $\frac{a^2(x_2-x_1)^2}{P}$, где $P=AB$, $A=2\sqrt{a^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}+\sqrt{a^2-x_1^2}+\sqrt{a^2-x_2^2}$, $B=a^2-x_1x_2+\sqrt{(a^2-x_1^2)(a^2-x_2^2)}$. Так как $-a\leqslant x_1<x_2\leqslant a$, то $x_1+a\geqslant 0$, $a-x_2\geqslant 0$, откуда (перемножая) получим $a^2-x_1x_2-ax_2+ax_1\geqslant 0$, $a^2-x_1x_2\geqslant a(x_2-x_1)$, и так как $x_2-x_1>0$, $a>0$, то $a^2-x_1x_2>0$. Поэтому знаменатель последней дроби положителен, числитель также положителен ($x_1\neq x_2$) и, следовательно, $A>0$, т. е. данная функция выпукла вверх. Замечание. Графиком данной функции является полуокружность (черт. 91) и геометрически выпуклость вверх не вызывает сомнений. **13.** а) На полуинтервале $(-\infty, 0]$ убывает, на полуинтервале $[0, +\infty)$ возрастает; б) возрастает. **14.** На интервале $(-\infty, 0)$ убывает, на интервале $(0, +\infty)$ убывает. **15.** Если $a>0$, то на полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ убывает, а на полуинтервале $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ возрастает. При $a<0$ — наоборот.



Черт. 91.

16. Если $-1\leqslant\cos x\leqslant-\frac{1}{\sqrt{3}}$, то данная функция возрастает; если $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$, то убывает; если же $\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\cos x\leqslant 1$, то возрастает. Отсюда нетрудно выделить соответствующие промежутки изменения x. **18.** 1°. Выпукла вниз. 2°. На полуинтервале $(-\infty, 0]$ выпукла вверх, а на полуинтервале $[0, +\infty)$ — вниз. 3°. На интервале $(-\infty, 0)$ выпукла вверх, а на интервале $(0, +\infty)$ — вниз. **20.** Указание. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\equiv$ $\equiv\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)]$. **21.** 1° и 2°. Ничего нельзя сказать. 3°. Если $k>0$, то функции $f(x)$ и $kf(x)$ имеют одинаковую выпуклость, а если $k<0$, то — противоположную. **24.** 1°. Функция определена на полуинтервале $[0, +\infty)$. На этом полуинтервале она возрастает и выпукла вверх. 2°. Функция возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$. На полуинтервале $(-\infty, 0]$ она выпукла вниз, а на полуинтервале $[0, +\infty)$ — вверх. 3°. Функция определена в интервале $(0, +\infty)$. Она на этом интервале убывает и выпукла вниз. **25.** Решение. Сведем решение этой задачи к задаче № 12. С этой целью произведем замену $x=z+\lambda$ и выберем λ так, чтобы преобразованное выражение для y, т. е. $y=a(z+\lambda)^3+b(z+\lambda)^2+c(z+\lambda)+d$, не содержало бы z^2. Это дает $\lambda=-\frac{b}{3a}$. Подставляя это значение λ в предыдущее выражение, будем иметь

$$y=a\left(z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z+q\right),$$

где

$$q=\frac{d}{a}+\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{cb}{3a^2}$$

и задача сведена к №·12. **28.** Найдем число p такое, чтобы в разности

$$\frac{12x(x-a)}{x^2+36}-p=\frac{(12-p)x^2-12ax-36p}{x^2+36}$$

корни трехчлена, стоящего в числителе, были бы равны между собой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $36a^2+36p(12-p)=0$ или $p^2-12p-a^2=0$, $p=6\pm\sqrt{36+a^2}$. В случае $p=6+\sqrt{36+a^2}$ (и $a\neq 0$, коэффициент при x^2 в числителе отрицателен; значит

$$\frac{12x(x-a)}{x^2+36}-(6+\sqrt{36+a^2})\leqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только при

$$x=\frac{6a}{12-p}=\frac{6a}{6-\sqrt{36+a^2}}=-\frac{6}{a}(6+\sqrt{36+a^2}).$$

В случае $p=6-\sqrt{36+a^2}$ будем иметь $12-p>0$, и значит

$$\frac{12x(x-a)}{x^2+36}-(6-\sqrt{36+a^2})\geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только при $x=\frac{6a}{12-p}=\frac{6a}{6+\sqrt{36+a^2}}=$ $=\frac{6}{a}(\sqrt{36+a^2}-6)$. Итак

$$6-\sqrt{36+a^2}\leqslant\frac{12x(x-a)}{x^2+36}\leqslant 6+\sqrt{36+a^2},$$

причем наименьшее значение $y=6-\sqrt{36+a^2}$ функция принимает при $x=$ $=\frac{6}{a}(\sqrt{36+a^2}-6)$, а наибольшее $y=6+\sqrt{36+a^2}$ — при $x=-\frac{6}{a}(\sqrt{36+a^2}+6)$. При целом a ($\neq 0$) наименьшее и наибольшее значения будут целыми, если $36+a^2$ есть точный квадрат: $36+a^2=b^2$, откуда $(b+a)(b-a)=36$; отсюда $b+a$ и $b-a$ как целые числа, произведение которых равно 36, могут принимать значения:

$b+a$	1	36	−1	−36	2	18	−2	−18	3	12	−3	−12	4	9	−4	−9	6	−6
$b-a$	36	1	−36	−1	18	2	−18	−2	12	3	−12	−3	9	4	−9	−4	6	−6

Но $(b+a)+(b-a)=2b$ — число четное, а кроме того, $a\neq 0$; значит, остается только

$b+a$	2	18	−2	−18
$b-a$	18	2	−18	−2

Отсюда $a=-8$ или $a=8$. Соответствующие наибольшее и наименьшее значения будут

$$-4\leqslant\frac{12x(x\pm 8)}{x^2+36}\leqslant 12,$$

причем наименьшее значение −4 функция принимает при $x=\frac{6}{\pm 8}(10-6)=\pm 3$, а наибольшее 16 при $x=\frac{6}{\mp 8}(6+10)=\mp 12$. **29.** При изменении x от −1 до 0 функция y возрастает от $\sqrt{2}$ до 2; при изменении x от 0 до 1, y убывает от 2 до $\sqrt{2}$. Область определения $-1\leqslant x\leqslant 1$, наименьшее значение $\sqrt{2}$, наибольшее 2.

§ 3. Наибольшие и наименьшие значения

1. Квадрат. **2.** $h=\frac{4r}{3}$. **3.** Квадрат. **4.** Квадрат. **5.** Если p — заданный периметр, то радиус окружности равен $\frac{p}{4}$, а центральный угол двум радианам. **7.** а) Радиус цилиндра равен $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса; б) радиус цилиндра равен $\frac{1}{2}$ радиуса основания конуса. **8.** а) Высота конуса равна $\frac{4r}{3}$, где r — радиус шара, б) обозначим через α угол наклона образующей конуса с основанием. Тогда полная

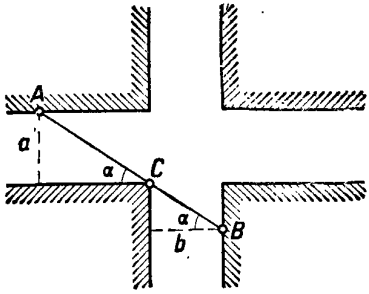
поверхность конуса будет $4r^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)\sin^2\alpha = 4r^2(-x^4-x^3+x^2+x)$, $x=\cos\alpha$. Вопрос сводится, таким образом, к отысканию наибольшего значения функции $f(x)=-x^4-x^3+x^2+x$, если $0<x<1$. Составляя разность $f(x_2)-f(x_1)$, получим:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(-x_2^3-x_1^2x_2-x_2^2x_1-x_1^3-x_1^2-x_1x_2-x_2^2+x_2+x_1+1\right).$$

Положим, что в выражении, заключенном в круглые скобки, $x_2=x_1$, получим $-4x_1^3-3x_1^2+2x_1+1$. Это выражение имеет корни $x_1=-1$, $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, $x_3=\frac{1-\sqrt{17}}{8}$, и потому оно в интервале $\left(0, \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$ положительно, а в интервале $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}, 1\right)$ отрицательно. Считая $0<x_1<x_2\leqslant\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, будем иметь $0<x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2<\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, так что

$$-4x_1^3-3x_1^2+2x_1+1>0,$$
$$-4\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3-3\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+2\frac{x_1+x_2}{2}+1>0,$$
$$-4x_2^3-3x_2^2+2x_2+1\geqslant 0.$$

Умножая среднее неравенство на 4 и складывая затем все неравенства, получим (после сокращения на 6) $-x_2^3-x_2^2x_1-x_2x_1^2-x_1^3-x_1^2-x_1x_2-x_2^2+x_2+x_1+1>0$, так что $f(x_2)-f(x_1)>0$; значит, на полуинтервале $\left(0, \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]$ функция $f(x)$ — возрастающая. Аналогично доказывается, что на полуинтервале $\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}, 1\right)$ она убывающая и, значит, конус будет иметь наибольший объем, если косинус угла наклона образующей к основанию равен $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$.



Черт. 92.

9. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, где α — угол наклона образующей конуса к основанию. При этом $\frac{v_1}{v_2}=2$. Для других значений угла α, $\frac{v_1}{v_2}>2$. **10.** Если объем палатки равен v, то наиболее экономичные размеры таковы: высота $\sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}}$, радиус основания $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}}$. **11.** 50 *м* × 100 *м*. **12.** 4 *дм* × 4 *дм* × 2 *дм*. **13.** Сторона квадрата $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. Если $a=b$, то сторона квадрата равна $\frac{a}{6}$. **14.** $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ радиан. **15.** Указание. Метод решения аналогичен методу решения задачи № 8. а) ответ: 60°. **16.** Длина AB бревна будет равна $l=AC+CB=\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\cos\alpha}$, где α — угол наклона бревна к одной из стенок канала (черт. 92). Наименьшее значение l и будет наибольшей длиной бревна, которое можно сплавить из одного канала в другой. Угол α изменяется в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Наименьшее значение l будет достигаться одновременно с наименьшим значением l^2; имеем:

$$l^2=\left(\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{(a+b\operatorname{tg}\alpha)^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Положим $\operatorname{tg}\alpha=x$, $0<x<+\infty$; тогда вопрос сводится к отысканию наименьшего значения функции $f(x)=\frac{(a+bx)^2(1+x^2)}{x^2}=b^2x^2+2abx+\frac{2ab}{x}+\frac{a^2}{x^2}+a^2+b^2$,

если $0 < x < +\infty$. Находим

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\left[b^2(x_2 + x_1) + 2ab - \frac{2ab}{x_1x_2} - \frac{a^2}{x_1x_2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)\right].$$

Определим, при каком $x_1 = x_2$ выражение в скобках обращается в нуль: $2b^2x_1 + 2ab - \frac{2ab}{x_1^2} - \frac{2a^2}{x_1^3} = 0$, $(bx_1 + a)\left(b - \frac{a}{x_1^3}\right) = 0$, и так как $0 < x_1 < +\infty$, $a > 0$, $b > 0$, то $x_1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Заметим, что если x_1 и x_2 положительны, то при их уменьшении выражение $x_1 + x_2$ уменьшится, а выражения $\frac{2ab}{x_1x_2}$ и $\frac{a^2}{x_1x_2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$ увеличатся, так что выражение в квадратных скобках уменьшится, а так как оно равно нулю при $x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, то при $x_1 < x_2 \leqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ оно будет отрицательно, а при $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \leqslant x_1 < x_2$ положительно. Значит, $f(x_2) < f(x_1)$, если $x_1 < x_2 \leqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, и $f(x_2) > f(x_1)$, если $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \leqslant x_1 < x_2$. Таким образом, функция $f(x)$ убывает на полуинтервале $\left(0, \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right]$ и возрастает на полуинтервале $\left[\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, +\infty\right)$, а потому l^2, следовательно, и l имеет наименьшее значение при $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; отсюда

$$\sin\alpha = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\alpha = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

следовательно,

$$l_{\min} = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

17. Освещенность в точке M, находящейся на расстоянии d от источника I_1 следовательно, на расстоянии $l - d$ от источника I_2, равна $J = k\left(\frac{I_1}{d^2} + \frac{I_2}{(l-d)^2}\right)$, где k — коэффициент пропорциональности. Имеем $J = \frac{k}{d^2}\left[I_1 + \left(\frac{d}{l-d}\right)^2 I_2\right]$; полагая $\frac{d}{l-d} = x$, получим $J = k\frac{(1+x)^2(I_1 + x^2I_2)}{l^2x^2}$. Вопрос сводится к отысканию наименьшего значения функции $f(x) = I_2x^2 + 2I_2x + \frac{2I_1}{x} + \frac{I_1}{x^2} + I_1 + I_2$, где $0 < x < +\infty$, ибо $x = \frac{d}{l-d}$. Исследование функции $f(x)$ на возрастание и убывание производится так же, как и в предыдущей задаче. Ответ: наименее освещенной является точка M, отношения расстояний от которой до источника света силой I_1 к расстоянию от источника света силой I_2 равно $\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}$. **18.** $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

Глава IX. Последовательности

§ 1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 или наоборот. **2.** 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, —2; —4; —6, —8; —10, —12. **3.** $\frac{(a+d)q - a}{bq^{n-1}(q-1)^2}(q^n - 1) - \frac{d(n-1)}{bq^{n-1}(q-1)}$. **4.** 3, 5, 7; 4, 5, 6 и 5, 5, 5. **5.** 4, 6, 9 и 6, 6, 6. **6.** 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. **7.** 4, 12, 36 и $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$, $\frac{100}{9}$.

8. $3:5:7$. 9. $2(\sqrt{6}-1)$. $2\sqrt{6}$, $2(\sqrt{6}+1)$. 14. $\frac{n-1}{2}\frac{b}{a}$. 16. $s=\frac{n(n^2-1)bd}{12}+\frac{s_1s_2}{n}$. 17. $2a=b(3n^2\pm n-2)$. 20. $\frac{q}{q+1}s_{n-1}s_n$. 21. Достаточность доказывается методом индукции. 23. $a_m=\sqrt{AB}$, $a_n=A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{2n}}$. 24. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 26. $\frac{3069}{256}$. 27. 2, 4, 8, 12 и $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. 28. 17, 20, 23 и $\frac{139}{5}$, 20, $\frac{61}{5}$. 29. 16, 24, 36, 54 и 54, 36, 24, 16.

33. $$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{\cos kx+i\sin kx}{\cos(k-1)x+i\sin(k-1)x}=$$

$$=\frac{(\cos kx+i\sin kx)[\cos(k-1)x-i\sin(k-1)x]}{\cos^2(k-1)x+\sin^2(k-1)x}=\cos kx\cos(k-1)x+$$

$$+\sin kx\sin(k-1)x+i[\sin kx\cos(k-1)x-\cos kx\sin(k-1)x]=\cos x+i\sin x,$$

так что действительно данная последовательность — геометрическая прогрессия. Ее сумма

$$s_n=\frac{(\cos nx+i\sin nx)(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)}{\cos x+i\sin x-1}=$$

$$=\frac{[(\cos nx+i\sin nx)(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)](\cos x-1-i\sin x)}{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\cos nx-1-\cos(n+1)x+\cos x+i[\sin nx-\sin(n+1)x+\sin x]}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}+i\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

отсюда

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

35. 3, 6, 12; 12, 6, 3; $\frac{3}{2}(9+\sqrt{65})$, -6, $-\frac{3}{2}(\sqrt{65}-9)$; $-\frac{3}{2}(\sqrt{65}-9)$, -6, $\frac{3}{2}(9+\sqrt{65})$. 36. 2, 6, 18 и 18, 6, 2. 37. $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (для $\sqrt[n]{2}$ берется n значений).

39. a, $3a$, $5a$, ... 40. $\alpha=\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{1}{b_1-b}}$. 41. $4p^2=25q$. 42. 4, 10, 16, 22, ... 43. $3:4:5$. 44. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Указание. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{3}\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n(n+1)}{2}\right]$. 45. $\frac{np(np+1)}{2}$. 47. 0. 48. 1488. 49. 510 ($a_1=2$, $q=2$) и $\frac{255}{8}$ $\left(a_1=16,\ q=\frac{1}{2}\right)$. 50. 100. 51. 100. 52. 4 или -2. 54. -2, $\frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}$. 55. $-\frac{1}{3}$, $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}$.

§ 2. Возвратные последовательности

1. $C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n$. 2. $C_1+C_2\cdot 3^n$. 3. $C_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{3}\right)^n+C_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$ или $C_1\cos\frac{2\pi n}{3}+C_2\sin\frac{2\pi n}{3}$. 4. $C_1\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-i\sqrt{19}}{2}\right)^n$. 5. $(C_1+C_2n)2^n$.

6. $(C_1+C_2n)(-1)^n$. 7. $C_1(i\sqrt{3})^n+C_2(-i\sqrt{3})^n$. 8. $C_1+C_2(-1)^n$. 9. $C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n+C_3\cdot 4^n$. 10. $C_1+C_2(-1)^n+C_3(-2)^n$. 11. $C_1i^n+C_2(-i)^n+C_3\cdot 3^n$. 12. $C_1(-1+3i)^n+C_2(-1-3i)^n+C_3\cdot 5^n$. 13. $C_1+C_2n+C_3(-2)^n$. 14. $(C_1+C_2n)+(-4)^n+C_3(-2)^n$. 15. $(C_1+C_2n+C_3n^2)2^n$. 16. $C_1+C_2n+C_3n^2$. 17. $(C_1+C_2n+C_3n^2)(-1)^n$. 18. $C_1\cos n\alpha+C_2\sin n\alpha+C_3$. 19. $5\cdot 2^n-3^{n+1}$. 20. а) 3^n; б) $a_n=2$; в) $7+3^n$. 21. $\cos\frac{2\pi(n-1)}{3}$. 22. $(1+2i)^n+(1-2i)^n$. 23. а) 2^n; б) $n2^n$; в) $(1-n)2^n$. 24. $(-1)^n$. 25. $2^n+3^n-4^n$. 26. $2\cos\frac{\pi n}{2}+3^n$. 27. $\frac{14a-b-4c}{9}+\frac{b-2a+c}{3}n+\frac{-a+2b-c}{18}(-2)^n$. 28. Положить в данном соотношении $k=1, 2, 3, \ldots, n$ и сложить полученные соотношения. Ответ:

$$s_n=\frac{(1+p)(a_1-a_{n+1})+a_2-a_{n+2}}{1+p+q}.$$

29. Решение: $a_n=C_1\cos n\alpha+C_2\sin n\alpha$; из условий $a_1=\cos\alpha$, $a_2=\sin\alpha$ находим $a_n=\cos n\alpha$. Далее, из соотношения $a_{n+2}-2\cos\alpha a_{n+1}+a_n=0$, полагая $n=1, 2, 3, \ldots, n$ и складывая, получим (см. предыдущую задачу):

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=$$

$$=\frac{(1-2\cos\alpha)[\cos\alpha-\cos(n+1)\alpha]+\cos 2\alpha-\cos(n+2)\alpha}{2-2\cos\alpha}=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

30. $C_1+C_2n+\ldots+C_kn^k$. 31. Положим $a_n=b_n+\alpha$; тогда $b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n+\alpha-5\alpha+6\alpha=4$. Выберем α так, чтобы $\alpha-5\alpha+6\alpha=4$, $\alpha=2$; тогда $b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0$ и значит $a_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n+2$ (см. задачу № 1). 32. В данном случае уравнение $x^2-6x+9=0$ имеет кратный корень. В этом случае произведем замену $a_n=b_n+\alpha n$; тогда получим: $b_{n+2}+\alpha(n+2)-6[b_{n+1}+\alpha(n+1)]+9(b_n+\alpha n)=-4$ или $b_{n+2}-6b_{n+1}+9b_n-4\alpha=-4$. Выберем α таким, чтобы $-4\alpha=-4$, т. е. $\alpha=1$; тогда $b_{n+2}-6b_{n+1}+9b_n=0$, $b_n=(C_1+C_2n)3^n$, $a_n=n+(C_1+C_2n)3^n$, $a_n=n+(1-n)3^n$. 33. Ищем «частное» решение в виде $a_n^*=\alpha n+\beta$; находим $a_n^*=\frac{n-1}{2}$. Далее делаем замену: $a_n=\frac{n-1}{2}+b_n$; тогда $b_{n+2}+b_n=0$; отсюда $b_n=C_1i^n+C_2(-i)^n$ и значит $a_n=b_n+a_n^*=\frac{n-1}{2}+C_1i^n+C_2(-i)^n$; отсюда по начальным условиям находим: $C_1=1$, $C_2=1$, так что $a_n=\frac{n-1}{2}+i^n+(-i)^n$. 34. Так как общее решение: $a_n=\frac{q}{1-p}+C_1p^n$, то последовательность будет сходиться к $\frac{q}{1-p}$ (т. е. к корню уравнения $x=px+q$) при любом начальном значении a_1, если только $|p|<1$ (это верно и для комплексного значения p). 35. При условии, что квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни, по модулю меньшие 1; предел будет равен 0 (это верно и в случае комплексных значений для p и q).

36. а) $a_n^*=\frac{\alpha}{1+p+q}n+\frac{\beta(1+p+q)-\alpha(2+p)}{(1+p+q)^2}$;

б) $a_n^*=n\left(\frac{\alpha n}{4}+\frac{4\beta-\alpha(4+p)}{4(2+p)}\right)$; в) $a_n^*=n^2\left(\frac{\alpha}{6}n+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$;

г)$_1$ $a_n=\frac{\alpha}{1+p+q}n+\frac{\beta(1+p+q)-\alpha(2+p)}{(1+p+q)^2}+C_1x_1^n+C_2x_2^n$,

где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, C_1 и C_2 — произвольные числа;

г)$_2$ $a_n=n\left(\frac{\alpha n}{4}+\frac{4\beta-\alpha(4+p)}{4(2+p)}\right)+C_1+C_2(p+1)^n$;

г)$_3$ $a_n=n^2\left(\frac{\alpha}{6}n+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+C_1+C_2n$.

37. $C_1+\frac{n(n-1)}{2}$. 38. $1+\frac{n(n-1)}{2}$. 39. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. 40. $a_n=n^3+2n^2+$ $+5n-5-2^n+3^n$. 41. $C_1+\frac{3^n}{2}$. 42. $5^n+2\cdot(-4)^n-3\cdot 2^n$. 43. $\frac{n}{12}\cdot 2^n+C_1(-4)^n+C_2 2^n$.

45. $a_{n+4}-4\lambda\cos\mu\, a_{n+3}+4\lambda^2(1+\cos^2\mu)\,a_{n+2}-4\lambda^3\cos\mu a_{n+1}+\lambda^4 a_n=0$; (1)

соответствующее характеристическое уравнение:

$$x^4-4\cos\mu x^3+4\lambda^2(1+\cos^2\mu)\,x^2-4\lambda^3\cos\mu x+\lambda^4=0,$$

или

$$[x-\lambda(\cos\mu+i\sin\mu)]^2[x-\lambda(\cos\mu-i\sin\mu)]^2=0$$

(отсюда и надо исходить). Из (1) (обозначая искомую сумму через s_n) находим: $s_n-a_1-a_2-a_3-a_4+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}-4\lambda\cos\mu\,(s_n-a_1-a_2-a_3+$ $+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})+4\lambda^2(1+\cos^2\mu)\,(s_n-a_1-a_2+a_{n+1}+a_{n+2})-4\lambda^3\cos\mu\times$ $\times(s_n-a_1+a_{n+1})+\lambda^4 s_n=0$, откуда $S_n=\frac{A}{B}$, где $A=\lambda\cos\mu+2\lambda^2\cos 2\mu+$ $+3\lambda^3\cos 3\mu+4\lambda^4\cos 4\mu-(n+1)\lambda^{n+1}\cos(n+1)\mu-(n+2)\lambda^{n+2}\cos(n+2)\mu-$ $-(n+3)\lambda^{n+3}\cos(n+3)\mu-(n+4)\lambda^{n+4}\cos(n+4)\mu-4\lambda\cos\mu[\lambda\cos\mu+2\lambda^2\cos 2\mu+$ $+3\lambda^3\cos 3\mu-(n+1)\lambda^{n+1}\cos(n+1)\mu-(n+2)\lambda^{n+2}\cos(n+2)\mu-(n+3)\lambda^{n+3}\times$ $\times\cos(n+3)\mu]+4\lambda^2(1+\cos^2\mu)[\lambda\cos\mu+\lambda^2\cos 2\mu-(n+1)\lambda^{n+1}\cos(n+1)\mu-$ $-(n+2)\lambda^{n+2}\cos(n+2)\mu]-4\lambda^3\cos\mu[\lambda\cos\mu-(n+1)\lambda^{n+1}\cos(n+1)\mu]$, $B=1-$ $-4\lambda\cos\mu+4\lambda^2(1+\cos^2\mu)-4\lambda^3\cos\mu+\lambda^4$. 46. Будем искать частное решение в виде $a_n=k_1x^n$, $b_n=k_2x^n$. Это приводит к системе:

$$\begin{aligned}(p_1-x)\,k_1+q_1k_2&=0,\\ p_2k_1+k_2(q_2-x)&=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

Для того чтобы эта система имела относительно k_1, k_2 ненулевое решение ($k_1=k_2=0$— нулевое решение приводит к тривиальному решению: $a_n=0$, $b_n=0$ при всех n), необходимо и достаточно, чтобы $\begin{vmatrix}p_1-x & q_1\\ p_2 & q_2-x\end{vmatrix}=0$ (2). I. Если это уравнение имеет простые корни x_1 и x_2, то из системы (1) при $x=x_1$ находим какое-нибудь ненулевое решение: $k_1=k_1^*$, $k_2=k_2^*$; для $x=x_2$ находим ненулевое решение $k_1=k_1^{**}$, $k_2=k_2^{**}$, которое в силу $x_1\neq x_2$ не будет пропорционально первому. Так мы найдем два частных решения:

$$a_n=k_1^*x_1^n,\quad b_n=k_2^*x_1^n;$$
$$a_n=k_1^{**}x_2^n,\quad b_n=k_2^{**}x_2^n.$$

Общее решение:

$$a_n=C_1k_1^*x_1^n+C_2k_1^{**}x_2^n,$$
$$b_n=C_1k_2^*x_1^n+C_2k_2^{**}x_2^n.$$

В самом деле, при $n=1$, получаем:

$$\begin{aligned}a_1&=C_1k_1^*x_1+C_2k_1^{**}x_2,\\ b_1&=C_1k_2^*x_1+C_2k_2^{**}x_2.\end{aligned}\qquad(3)$$

Эта система разрешима относительно C_1 и C_2, ибо ее определитель

$$\begin{vmatrix}k_1^*x_1 & k_1^{**}x_2\\ k_2^*x_1 & k_2^{**}x_2\end{vmatrix}=x_1x_2\begin{vmatrix}k_1^* & k_1^{**}\\ k_2^* & k_2^{**}\end{vmatrix}\neq 0,$$

так как $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$ в силу $\Delta\neq 0$, а

$$\begin{vmatrix}k_1^* & k_1^{**}\\ k_2^* & k_2^{**}\end{vmatrix}\neq 0$$

в силу того, что x_1 и x_2 — неравные корни уравнения (2), поэтому ненулевое решение k_1^*, k_2^* системы (1) при $x=x_1$ не пропорционально ненулевому решению k_1^{**}, k_2^{**} той же системы при $x=x_2$. Таким образом, из системы (3) находим:

$$C_1=\frac{a_1k_2^{**}-b_1k_1^{**}}{x_1\left(k_1^*k_2^{**}-k_2^*k_1^{**}\right)},\qquad C_2=\frac{b_1k_1^*-a_1k_2^*}{x_2\left(k_1^*k_2^{**}-k_2^*k_1^{**}\right)},$$

так что искомое решение в этом случае

$$a_n = k_1^* \frac{a_1 k_2^{**} - b_1 k_1^{**}}{x_1 (k_1^* k_2^{**} - k_2^* k_1^{**})} x_1^n + k_1^{**} \frac{b_1 k_1^* - a_1 k_2^*}{x_2 (k_1^* k_2^{**} - k_2^* k_1^{**})} x_2^n,$$

$$b_n = k_2^* \frac{a_1 k_2^{**} - b_1 k_1^{**}}{x_1 (k_1^* k_2^{**} - k_2^* k_1^{**})} x_1^n + k_2^{**} \frac{b_1 k_1^* - a_1 k_2^*}{x_2 (k_1^* k_2^{**} - k_2^* k_1^{**})} x_2^n.$$

II. Пусть корни уравнения (2) равны между собой. В этом случае находим, как и ранее, частное решение $a_n = k_1^* x_1^n$, $b_n = k_2^* x_1^n$, где k_1^*, k_2^* — ненулевое решение системы (1) при $x = x_1 (= x_2)$. Будем искать другое частное решение в виде $a_n = (s_1 + k_1 n) x^n$, $b_n = (s_2 + k_2 n) x^n$. Тогда мы получим две системы:

$$\begin{cases} (p_1 - x) k_1 + q_1 k_2 = 0, \\ k_1 p_2 + (q_2 - x) k_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (p_1 - x) s_1 + q_1 s_2 = k_1 x, \\ p_2 s_1 + (q_2 - x) s_2 = k_2 x. \end{cases}$$

Первая система совпадает с системой (1) и поэтому ее ненулевое решение (при $x = x_1 = x_2$) можно считать совпадающим с взятым выше ненулевым решением k_1^*, k_2^* (все ненулевые решения пропорциональны). При $x = x_1 (= x_2)$ из второй системы найдем $s_1 = s_1^*$, $s_2 = s_2^*$; так как $x_1 \neq 0$, то это решение будет ненулевым и не будет пропорционально k_1^*, k_2^*. Таким образом, мы найдем второе частное решение:

$$a_n = (s_1^* + k_1^* n) x_1^n, \quad b_n = (s_2^* + k_2^* n) x_1^n.$$

Общее решение:

$$a_n = C_1 k_1^* x_1^n + C_2 (s_1^* + k_1^* n) x_1^n,$$

$$b_n = C_1 k_2^* x_1^n + C_2 (s_2^* + k_2^* n) x_1^n.$$

Это решение является общим, потому что из него при $n = 1$ получается система, всегда совместная относительно C_1, C_2:

$$k_1^* C_1 + (k_1^* + s_1^*) C_2 = \frac{a_1}{x_1},$$

$$k_2^* C_1 + (k_2^* + s_2^*) C_2 = \frac{b_1}{x_1},$$

отсюда

$$C_1 = \frac{a_1 (k_2^* + s_2^*) - b_1 (k_1^* + s_1^*)}{x_1 (k_1^* s_2^* - k_2^* s_1^*)}, \qquad C_2 = \frac{b_1 k_1^* - a_1 k_2^*}{x_1 (k_1^* s_2^* - k_2^* s_1^*)},$$

а общее решение:

$$a_n = \left[k_1^* \frac{a_1 (k_2^* + s_2^*) - b_1 (k_1^* + s_1^*)}{x_1 (k_1^* s_2^* - k_2^* s_1^*)} + \frac{b_1 k_1^* - a_1 k_2^*}{x_1 (k_1^* s_2^* - k_2^* s_1^*)} (s_1^* + k_1^* n) \right] x_1^n,$$

$$b_n = \left[k_2^* \frac{a_1 (k_2^* + s_2^*) - b_1 (k_1^* + s_1^*)}{x_1 (k_1^* s_2^* - k_2^* s_1^*)} + \frac{b_1 k_1^* - a_1 k_2^*}{x_1 (k_1^* s_2^* - k_2^* s_1^*)} (s_2^* + k_2^* n) \right] x_1^n.$$

III. Пусть, наконец, $\Delta = 0$; тогда $p_2 = \lambda p_1$, $q_2 = \lambda q_1$; значит, $b_{n+1} = \lambda a_{n+1}$ при всех n, значит и $b_n = \lambda a_n$, а потому из $a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n$ находим $a_{n+1} - (p_1 + \lambda q_1) a_n = 0$. Если $p_1 + \lambda q_1 = 0$, то имеем только одно решение: $a_n = 0$, $b_n = 0$. Если $p_1 + \lambda q_1 \neq 0$, то $a_n = C_1 (p_1 + \lambda q_1)^n$, $b_n = \lambda C_1 (p_1 + \lambda q_1)^n$ — две геометрические прогрессии.

Числовые примеры: а) уравнение (2) имеет вид $\begin{vmatrix} -2-x & 4 \\ -5 & 7-x \end{vmatrix} = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Система (1) при $x = 2$: $-4k_1 + 4k_2 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$; при $x = 3$: $-5k_1 + 4k_2 = 0$, $k_1 = 4$, $k_2 = 5$. Частные решения: $a_n = 2^n$, $b_n = 2^n$; $a_n = 4 \cdot 3^n$, $b_n = 5 \cdot 3^n$. Общее решение: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4 \cdot 3^n$, $b_n = C_1 \cdot 2^n + 5C_2 \cdot 3^n$. Решение, соответствующее данным начальным условиям: $a_n = 2^n - 4 \cdot 3^n$, $b_n = 2^n - 5 \cdot 3^n$;

б) $\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x_1 = x_2 = 2$. Система (I) при $x = 2$ принимает вид $k_1 + k_2 = 0$, $-k_1 - k_2 = 0$, откуда, например, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $a_n = 2^n$, $b_n = -2^n$. Ищем другое частное решение в виде $a_n = (s_1 + n) 2^n$, $b_n = (s_2 - n) 2^n$.

Находим $(s_1+n+1)\,2^{n+1}=3(s_1+n)\,2^n+(s_2-n)\,2^n$, $(s_2-n-1)\,2^n=-(s_1+n)\,2^n+(s_2-n)\,2^n$, откуда $s_1=1$, $s_2=1$; значит, $a_n=(1+n)\,2^n$, $b_n=(1-n)\,2^n$. Общее решение: $a_n=[C_1+C_2(1+n)]\,2^n$, $b_n=[-C_1+C_2(1-n)]\,2^n$. Для $a_1=14$, $b_1=-6$ находим $C_1=3$, $C_2=2$, так что $a_n=(5+2n)\,2^n$, $b_n=-(2n+1)\,2^n$; в) $b_{n+1}=3a_{n+1}$, $b_n=3a_n$, $a_{n+1}=7a_n$, $a_n=C_1 7^n$, $b_n=3C_1 7^n$ — две прогрессии. **47.** Обозначим через M наибольшее из чисел $|a_1|$ и $|b_1|$, а через m — наибольшее из чисел $|p_1|+|q_1|$ и $|p_2|+|q_2|$; тогда

$$|a_2|=|a_1p_1+b_1q_1|\leqslant|a_1||p_1|+|b_1||q_1|\leqslant M(|p_1|+|q_1|)\leqslant Mm,$$
$$|b_2|=|a_1p_2+b_1q_2|\leqslant|a_1||p_2|+|b_1||q_2|\leqslant M(|p_2|+|q_2|)\leqslant Mm,$$
$$|a_3|=|a_2p_1+b_2q_1|\leqslant|a_2||p_1|+|b_2||q_1|\leqslant Mm|p_1|+Mm|q_1|\leqslant Mm^2,$$
$$|b_3|\leqslant Mm^2$$

и т. д., вообще: $|a_n|\leqslant Mm^{n-1}$, $|b_n|\leqslant Mm^{n-1}$, а так как $0<m<1$, то $\lim a_n=0$ и $\lim b_n=0$. **49.** Если $\Delta=\begin{vmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{vmatrix}\neq 0$, то необходимое и достаточное условие заключается в том, чтобы корни x_1 и x_2 уравнения $\begin{vmatrix}p_1-x & q_1\\ p_2 & q_2-x\end{vmatrix}=0$ были по модулю меньше единицы. Если $\Delta=0$, а λ — такое число, что $p_2=\lambda p_1$, $q_2=\lambda q_1$, то необходимое и достаточное условие сходимости к нулю данных последовательностей имеет вид $|p_1+\lambda q_1|<1$. **50.** Рассмотрим две новые последовательности: $u_n=x_n-x_0$, $v_n=y_n-y_0$. Тогда $x_n=u_n+x_0$, $y_n=v_n+y_0$; значит, $u_{n+1}+x_0=(a_1+1)(u_n+x_0)+b_1(v_n+y_0)+c_1$, $v_{n+1}+y_0=a_2(u_n+x_0)+(b_2+1)(v_n+y_0)+c_2$, или $u_{n+1}=(a_1+1)u_n+b_1v_n+a_1x_0+b_1y_0+c_1$, $v_{n+1}=a_2u_n+(b_2+1)v_n+a_2x_0+b_2y_0+c_2$, а так как $a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$, $a_2x_0+b_2y_0+c_2=0$, то $u_{n+1}=(a_1+1)u_n+b_1v_n$, $v_{n+1}=a_2u_n+(b_2+1)v_n$. В силу условий $|a_1+1|+|b_1|<1$, $|a_2|+|b_2+1|<1$ последовательности u_n и v_n сходятся к нулю, а значит x_n и y_n — соответственно к x_0 и y_0. **51.** Решение аналогично предыдущей задаче. **52.** $a_n=i[C_1(1+2i)^n+C_2(1-2i)^n]$, $b_n=C_1(1+2i)^n-C_2(1-2i)^n$. **53.** Первый способ: решаем систему $x=y+5$, $y=-x+3$, находим $x=4$, $y=-1$. Вводим две новые последовательности $u_n=a_n-4$, $v_n=b_n+1$. Тогда $u_{n+1}=v_n$, $v_{n+1}=-u_n$ и т. д. Ответ: $a_n=4+i[C_1i^n+C_2(-i)^n]$, $b_n=-1-C_1i^n+C_2(-i)^n$. Второй способ: $a_{n+2}=b_{n+1}+5=-a_n+8$, откуда $a_{n+2}+a_n=8$. Ищем частное решение в виде $a_n=C$ (где C постоянное), находим $C+C=8$, откуда $C=4$. Рассматриваем новую последовательность $u_n=a_n-4$; тогда $u_{n+2}+u_n=0$. Составляем характеристическое уравнение $x^2+1=0$; его корни $\pm i$. Общее решение: $u_n=C_1i^n+C_2(-i)^n$, а значит $a_n=4+C_1i^n+C_2(-i)^n$, откуда $b_n=a_{n+1}-5=-1+C_1i^n+C_2(-i)^n$, что лишь обозначениями постоянных отличается от ответа, полученного выше. **54.** Решение лишь до некоторой степени аналогично решению задачи 46. Существенной особенностью здесь явится исследование кратных корней уравнения

$$\begin{vmatrix}p_1-x & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2-x & r_2\\ p_3 & q_3 & r_3-x\end{vmatrix}=0.$$

В случае, например, двукратного корня $x=x_1=x_2$ возможны два случая: а) система

$$\begin{aligned}&(p_1-x_1)k_1+q_1k_2+r_1k_3=0,\\ &p_2k_1+(q_2-x_1)k_2+r_2k_3=0,\\ &p_3k_1+q_3k_2+(r_3-x_1)k_3=0\end{aligned}\qquad(A)$$

имеет два линейнонезависимых решения: k_1^*, k_2^*, k_3^* и k_1^{**}, k_2^{**}, k_3^{**}. Если при этом k_1^{***}, k_2^{***}, k_3^{***} — решение той же системы при $x=x_3\neq x_1$, то общее решение будет иметь такой вид, как и в случае отсутствия кратных корней:

$$a_n=C_1k_1^*x_1^n+C_2k_1^{**}x_2^n+C_3k_1^{***}x_3^n,$$
$$b_n=C_1k_2^*x_1^n+C_2k_2^{**}x_2^n+C_3k_3^{***}x_3^n,$$
$$c_n=C_1k_3^*x_1^n+C_2k_3^{**}x_2^n+C_3k_3^{***}x_3^n.$$

Если же все решения системы (A) пропорциональны, то придется еще искать частное решение в виде $a_n=(s_1+k_1n)\,x^n$, $b_n=(s_2+k_2n)\,x^n$, $c_n=(s_3+k_3n)\,x^n$.

§ 3. Произвольные последовательности

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{2}{3}$. 3. $\frac{1}{1-x}$. 4. Указание. $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$, $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}$, ..., $a_n=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$; последовательность с общим членом $\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ сходится к 1. 5. 2. 6. $\frac{3}{2}$. Указание. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{3}=2\cos\frac{\pi}{6}$. 7. $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 8. Указание. Последовательность $a_1, b_2, a_3, b_4, \ldots$ — возрастающая, ограниченная сверху; последовательность $b_1, a_2, b_3, a_4, \ldots$ — убывающая и ограничена снизу, $\lim(a_n-b_n)=0$ (это следует из тождества, которым a_n и b_n связаны с a и b, и условия $a<b<0$). 9. $1+\sqrt{1-a}$. 10. $x_2-x_1=-\frac{x_1^2}{2}=-\frac{a^2}{8}<0$, так как $a\neq 0$; значит, $x_2<x_1$; так как $x_2=\frac{a}{2}-\frac{x_1^2}{2}=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}=\frac{a(4-a)}{8}>0$, то $0<x_2<x_1$. Далее $x_3-x_2=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)>0$; значит, $x_3>x_2$, $x_3-x_1=-\frac{x_2^2}{2}$, $x_3<x_1$. Итак, $x_2<x_3<x_1$. Находим $x_4-x_3=\frac{x_2^2-x_3^2}{2}<0$; значит, $x_3>x_4$; $x_4-x_2=\frac{x_1^2-x_3^2}{2}>0$, $x_4>x_2$. Итак, $x_2<x_4<x_3$. Аналогично находим, что $x_4<x_5<x_3$ и т. д. Таким образом, последовательность $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ убывающая, а последовательность $x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ возрастающая (это следует доказать методом полной индукции). Обозначим предел последовательности $x_1, x_3, x_5, \ldots$ через A, а предел последовательности $x_2, x_4, x_6, \ldots$ — через B. Из соотношений $x_{2n+1}=\frac{a}{2}-\frac{x_{2n}^2}{2}$, $x_{2n}=\frac{a}{2}-\frac{x_{2n-1}^2}{2}$ переходим к пределу, находим: $A=\frac{a}{2}-\frac{B^2}{2}$, $B=\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}$, откуда $A-B=\frac{A^2-B^2}{2}$, или $(A-B)(2-A-B)=0$. Так как A и B положительны, причем $A\leqslant\frac{a}{2}$, $B\leqslant\frac{a}{2}$, то их сумма меньше 1 ($0<a<1$) и, значит, $2-A-B\neq 0$, поэтому $A-B=0$, откуда $A=B$. Итак, $A=\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}$, откуда: $A^2+2A-a=0$, $A=\sqrt{1+a}-1$ (второй корень этого квадратного уравнения отрицателен, следовательно не может быть равен A, так как $A>0$). 11. Доказательство. Предположим, что x_0 выбрано так, что $x_0^2>0$ или $x_0>\sqrt{a}$ *. Докажем сначала, что $x_0>x_1>\sqrt{a}$. В самом деле,

$$x_0-x_1=x_0-\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)=\frac{x_0^2-a}{2x_0}>0,$$

так как по предположению $x_0^2>a$. Далее,

$$x_1-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_0}(x_0^2-2x_0\sqrt{a}+a)=\frac{(x_0-\sqrt{a})^2}{2x_0}>0.$$

Итак, $x_0>x_1>\sqrt{a}$. Докажем теперь, что $x_0>x_1>x_2>\ldots>x_n>\sqrt{a}$. (1) Для доказательства предположим, что написанные неравенства верны; докажем, что тогда будут верны еще и такие неравенства: $x_n>x_{n+1}>\sqrt{a}$. В самом деле, $x_n-x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{x_n^2-a}{2x_n}>0$, так как по предположению $x_n^2>a$. Далее,

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2-2x_n\sqrt{a}+a)=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{a})^2>0.$$

*) Случай $x_0^2<a$ и $x_0^2=a$ предлагаются читателю исследовать самостоятельно.

Итак, $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \sqrt{a}$. Но цепь неравенств (1) доказана для $n = 1$; значит, правильность неравенств (1) доказана методом полной индукции для любого n, т. е. $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots > \sqrt{a}$. Таким образом, последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ убывающая и ограничена снизу ($x_n > \sqrt{a}$); следовательно, эта последовательность имеет предел. Так как $x_n > \sqrt{a}$, то этот предел x будет $\geqslant \sqrt{a}$ (неравенство в пределе сохраняется или переходит в равенство): $x \geqslant \sqrt{a}$, значит $x > 0$. Переходя к пределу в обеих частях равенства $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ и замечая, что $\lim x_{n+1} = x$, $\lim x_n = x$, будем иметь $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, $2x = x + \frac{a}{x}$, $x = \frac{a}{x}$, $x^2 = a$, $x = \pm\sqrt{a}$. Но мы уже доказали, что $x > 0$, значит $x = \sqrt{a}$. 12. Указание. Применить метод полной индукции.

Глава X. Суммирование

1. $(n+1)! - 1$. 2. Указание. $n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) = 4n(n+1)(n+2)$. Ответ: $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$. 3. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 4. $x\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}$. 5. $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. 6. $(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$. 7. $\frac{x^2 - x^{n+3}}{(1-x)^3} + \frac{x-(2n+3)x^{n+2}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)^2x^{n+1}}{1-x}$. 8. $\frac{2(1-x^{n+1})}{(1-x)^3} - \frac{2(n+1)x^n}{(1-x)^2} - \frac{n(n+1)x^{n-1}}{1-x}$. 9. $\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$. 10. $\frac{(n!)^3(n+1)^2(n+2)}{2^{n+1}}$. 11. $\frac{n(n^2+1)}{2}$. 12. $(n-1)^3 + n^3$. 13. $\frac{n}{2}\left[n^2 + \frac{3}{2} + (-1)^n\frac{1}{2}\right]$. 14. $\frac{1}{24}(n-1)n \times (n+1)(3n+2)$. 15. а) $\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$; б) $\frac{n(n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{14}$; в) $\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$. 16. $\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6)$. 17. $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$. 18. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. 19. $2(n-1)+2^{1-n}$. 20. $1+(n-1)3^n$. 21. $\frac{x(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1-x)(1-x^2)}$. 22. Если $x \neq 1$ и $x \neq \frac{1}{3}$, то $s = \frac{1}{1-2x-3x^2}\left\{a_1x + (a_2-2a_1)x^2 - x^{n+1}\left[\frac{a_2-3a_1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{a_2+a_1}{12}3^{n+1}\right] - 3x^{n+2}\left[\frac{a_2-3a_1}{4}(-1)^n + \frac{a_2+a_1}{12}3^{n+2}\right]\right\}$.

Указание.

$$\begin{aligned} a_3 - 2a_2 - 3a_1 &= 0,\\ a_4 - 2a_3 - 3a_2 &= 0,\\ a_5 - 2a_4 - 3a_3 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Далее умножаем первое соотношение на x^3, второе на x^4, ..., последнее на x^n и, складывая почленно получаемые равенства, получаем: $s - a_1x - a_2x^2 - 2x(s - a_1x - a_nx^n) - 3x^2(s - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n) = 0$. Отсюда находим s. Затем надо найти общее решение для заданного рекуррентного соотношения и выбрать C_1 и C_2 так, чтобы первые два члена последовательности были равны a_1 и a_2.

Глава XI. Комбинаторика

1. $\frac{r!}{(r-p)!}\frac{(n-p)!}{(n-r)!}$. 2. 72. 3. а) 240; б) 60. 4. $\frac{1}{2}n(n-1)$. 5. C_n^4. 6. 60. 7. 3^n. 8. $3m^2$. 9. $\frac{m!}{r!(m-r)!}\frac{n!}{s!(n-s)!}(s+r)!$ 10. $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} + 1$. 11. $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3} + 1$ 12. $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}$. 13. 72.

14. $\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{2m}$. 16. $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(n+p)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(m+p)+$ $+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(m+n)+mnp$. 17. 3 999 960. 18. 839 991 600. 19. 239. 20. $\frac{1}{6}n(n-4)\times$ $\times(n-5)$. 21. $2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}m+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}m^3=\frac{m^2n(n-1)}{6}(mn+n-3)$. 22. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. 23. Применить метод индукции. 25. 7. 26. а) n прямых могут разделить плоскость на $1+\frac{n(n+1)}{2}$ частей; 15 прямых на 121 часть; б) на 14 частей. 27. $x=2$. 28. 264 делителя; сумма всех делителей, включая 1 и само число, равна 319 987 040. 29. Цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 встретятся $n\cdot 10^{n-1}$ раз. Цифра 1 встретится $10^{n-1}+1$ раз. Нуль встретится $n(10^{n-1}+1)-\frac{10^n-1}{9}$ раз. 30. C_n^2. 31. $\frac{(n-1)!}{2}$. 32. $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$. 33. 1568. 34. $m(n+1)+$ $+\frac{n(n+1)}{2}+1$. 35. $\frac{32!}{(4!)^8 8!}$. 36. 57. 37. 96. 38. 480. 39. 30. 40. $4\left(C_{13}^1\right)^3 C_{13}^3+$ $+6\left(C_{13}^1\right)^2\left(C_{13}^2\right)^2=7\,682\,544$. 41. $\frac{n}{k}C_{n-ks-1}^{k-1}$; если $s=0$, то C_n^k. Задача не имеет решений при $n<k(1+s)$. При $n=k(1+s)$ число различных k-угольников равно $1+s$. 42. 64 800. 43. 64 800. 44. 55. 45. 3 265 920. 46. $\frac{n!}{h!k!}C_{n-\alpha-\beta}^{p-h-k}$. 47. $C_{n-\alpha-\beta}^{p-h-k}$. 48. 686. 49. 2880. 50. $m=3$, $n=6$. 51. $\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$. 52. $\frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$. 53. C_{p+1}^q. 54. 8. 55. 7. 56. $2^{p+k}3^{n-p-k}-1$. 57. 43 200. 58. Круг, по которому m-я плоскость пересекает шар, пересекается каждой из остальных плоскостей в двух точках и, следовательно, делится на $2(m-1)$ частей. По обе стороны каждой из этих частей находятся 2 части сферы, которые обращаются в одну, если убрать m-й круг. Следовательно, число $F(m)$ кусков шара при делении его m плоскостями на $2(m-1)$ больше $F(m-1)$ — числа делений $m-1$ плоскостями: $F(m)=$ $=2(m-1)+F(m-1)$, но $F(1)=2$, значит, $F(n)=2(1+1+2+3+\dots+n-1)=$ $=2+n(n-1)$. 63. $C_{20}^4\cdot C_{16}^4\cdot C_{12}^4\cdot C_8^4=\frac{20!}{(4!)^5}$.

Глава XII. Бином Ньютона

а) $n2^{n-1}$; б) $(n+2)2^{n-1}$; в) $1+(n-2)2^{n-1}$; г) $(n+1)2^n$; д) $1+(2n-1)2^n$; е) 0; ж) 0; з) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; и) $\frac{1+n2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$; к) $\frac{1}{n+1}$; л) 0 или $(-1)^{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}}$.

2. а) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$; б) $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. 3. а) 4200; б) 4 204 200. 5. 26.

6. Докажем, что члены разложения бинома $(p+q)^n$, где $p>0$, $q>0$, $p+q=1$, сначала растут, а затем убывают. Имеем $T_k=C_n^{k-1}q^{k-1}p^{n-k+1}$, $T_{k+1}=C_n^kq^kp^{n-k}$, отсюда $\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{(n-k+1)q}{kp}$. Решая неравенство $\frac{T_{k+1}}{T_k}\geqslant 1$, найдем $k\leqslant q(n+1)$. Итак, если $k\leqslant q(n+1)$, то $T_1<T_2<\dots<T_{k+1}$. Для $k\geqslant q(n+1)$, $T_k\geqslant T_{k+1}>\dots>T_{n+1}$. Таким образом, если $q(n+1)>1$, то наибольшим членом будет первый; если $q(n+1)>n$, то наибольшим членом будет последний. Если же $1\leqslant q(n+1)\leqslant n$, то наибольший член не будет ни первым, ни последним; если при этом $q(n+1)$ — число не целое, причем ν — наибольшее целое число, все еще меньшее, чем $q(n+1)$, т. е. $\nu<q(n+1)<\nu+1$, то номер наибольшего члена разложения равен $\nu+1$; если же $q(n+1)$ — число целое, причем $1\leqslant$ $\leqslant q(n+1)\leqslant n$, то имеются два равных между собой наибольших члена разложения, номера которых $q(n+1)$ и $q(n+1)+1$. 9. 13. 12. $C_n^1+2C_n^2+C_n^3$. 13. Первый вариант: $(1+2x+3x^2)^{10}=1+10(2x+3x^2)+45(2x+3x^2)^2+$ $+120(2x+3x^2)^3+210(2x+3x^2)^4+\dots$ (недописанные слагаемые содержат x в степени большей, чем 4). Из последнего выражения легко находим коэффициент при x^4: $45\cdot 9+$ $+120\cdot 3\cdot 4\cdot 3+210\cdot 16=8085$. Второй вариант: общий член разложения тринома $(1+2x+3x^2)^{10}$ есть $\frac{10!}{\alpha!\beta!\gamma!}1^\alpha(2x)^\beta(3x^2)^\gamma$, где $\alpha+\beta+\gamma=10$, причем α,

β, γ — целые неотрицательные числа от 0 до 10. По условию $\beta+2\gamma=4$. Если $\gamma=0$, то $\beta=4$, $\alpha=6$; если $\gamma=1$, то $\beta=2$, $\alpha=7$; если $\gamma=2$, то $\beta=0$, $\alpha=8$; γ не может быть больше чем 2, так как тогда $\beta=4-2\gamma<0$. Соответствующие указанным членам коэффициенты: $\frac{10!}{6!4!}2^4+\frac{10!}{7!2!1!}2^2\cdot 3+\frac{10!}{8!2!}3^2=8085$. **14.** Решение. Общий член разложения $(1+x^2+x^5)^{20}$ имеет вид $\frac{20!}{p!q!r!}1^p x^{2q}x^{5r}=\frac{20!}{p!q!r!}x^{2q+5r}$, где p, q, r — целые неотрицательные числа, такие, что $p+q+r=20$. Таким образом, вопрос сводится к тому, имеет ли уравнение $2q+5r=m$ (где m — любое целое неотрицательное число от 0 до 100 включительно) решение или нет. Имеем: $2q=m-5r$, $q=\frac{m-r}{2}-2r$. Положим: $\frac{m-r}{2}=s$ (s — целое число), тогда $r=m-2s$, а значит $q=s-2(m-2s)=5s-2m$. Так как $r\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, то $m-2s\geqslant 0$, $5s-2m\geqslant 0$; значит, $s\leqslant\frac{m}{2}$, или $s\geqslant\frac{2m}{5}$, или $\frac{2m}{5}\leqslant s\leqslant\frac{m}{2}$, или $4m\leqslant 10s\leqslant 5m$. Ясно, что если $m\geqslant 10$, то существует целое положительное число s, для которого эти неравенства будут выполнены (так как $5m-4m=m\geqslant 10$), а значит при том целом положительном значении s, при котором они будут выполнены, числа $r=m-2s$ и $q=5s-2m$ будут целыми неотрицательными числами, причем $2q+5r=m$. Следовательно, a_{10}, a_{11} a_{12}, ... a_{100} все отличны от нуля. Что касается значений m меньших чем 10, то проверкой убеждаемся, что уравнение $2q+5r=m$, где $m=0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ не имеет целых неотрицательных решений лишь при $m=1$ и $m=3$; значит, в указанном разложении лишь $a_1=0$ и $a_3=0$; значит, не равны нулю 99 коэффициентов a_0, a_2, a_4, a_5, a_6, ..., a_{100}. **15.** $k+1$, если $k\leqslant n-1$ и $2n-k-1$, если $k>n-1$.

Глава XIII. Индукция

1. Для $n=1$ имеем равенство $a_1^2b_1^2-(a_1b_1)^2=0$. Предположим, что соотношение, подлежащее доказательству, верно; тогда $\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2+b_{n+1}^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1})^2=\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\times\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2+a_{n+1}^2\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)+b_{n+1}^2\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)+a_{n+1}^2b_{n+1}^2-2a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)-a_{n+1}^2b_{n+1}^2=\left[\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\right]^2+(a_1b_{n+1}-b_1a_{n+1})^2+(a_2b_{n+1}-b_2a_{n+1})^2+\ldots+(a_nb_{n+1}-b_na_{n+1})^2\geqslant 0$, так как, по предположению, выражение, заключенное в квадратные скобки, положительно или равно нулю. Но так как соотношение, подлежащее доказательству, верно для $n=1$, то методом полной индукции оно доказано для любого целого положительного числа n. **2.** Для $n=1$ и $n=2$ имеем $T_1(x)=\cos(\arccos x)=x$, $T_2(x)=\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$ — полиномы первой и второй степени. Предположим теперь, что $T_1(x)$, $T_2(x)$, ..., $T_n(x)$ — полиномы, соответственно первой, второй и т. д., n-й степени. Имеем: $T_{n+1}(x)=\cos[(n+1)\arccos x]$, $T_{n-1}(x)=\cos[(n-1)\arccos x]$, откуда $T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2\cos(n\arccos x)\times\cos(\arccos x)=2xT_n(x)$; следовательно, $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$. Так как по предположению $T_{n-1}(x)$ и $T_n(x)$ — многочлены степеней соответственно $n-1$ и n, то $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$ есть многочлен $n+1$-й степени и наше положение доказано методом полной индукции. Замечание. Отметим, что рекуррентное соотношение $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$ позволяет вычислить последовательно $T_3(x)$, $T_4(x)$, ...:

$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=2x(x^2-1)-x=4x^3-3x$,

$T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$,

$T_5(x)=2xT_4(x)-T_3(x)=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x)=16x^5-20x^3+5x$,

$T_6(x)=2xT_5(x)-T_4(x)=2x(16x^5-20x^3+5x)-(8x^4-8x^2+1)=32x^6-48x^4+18x^2-1$ и т. д.

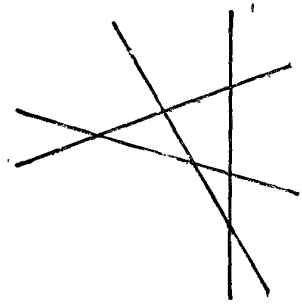
3. Если $n=2$, то положение доказывается просто; в самом деле, пусть $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1+x_2=0$, тогда ($x_1\neq x_2$):

$$x_1x_2=x_1(a-x_1)=-\left(x_1^2-ax_1\right)=-\left[\left(x_1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right]=\frac{a^2}{4}-\left(x_1-\frac{a}{2}\right)^2<\frac{a^2}{4},$$

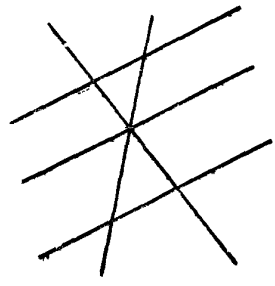
так как $x_1 - \frac{a}{2} \neq 0$ (если бы было $x_1 - \frac{a}{2} = 0$, то $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$, что противоречит условию). Предположим теперь, что высказанное предположение верно для некоторого n. Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = a$ и будем по-прежнему считать, что среди чисел $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$ есть хотя бы два различных. Тогда из этих $n+1$ чисел можно выделить n чисел, среди которых будет также, по крайней мере, два различных *). Пусть это будут, например, первые n чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$. Так как $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a - x_{n+1}$ [все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (и x_{n+1}) положительны и среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть, по крайней мере, два различных], то по допущению $x_1 x_2 \ldots x_n < \left(\frac{a - x_{n+1}}{n}\right)^n$, откуда $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} < \left(\frac{a - x_{n+1}}{n}\right)^n x_{n+1}$. Докажем, что $\left(\frac{a - x_{n+1}}{n}\right)^n x_{n+1} \leqslant \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$. Для этого, полагая $1 - \frac{x_{n+1}}{a} = \lambda$, установим, что последнее неравенство (подлежащее доказательству) эквивалентно следующему: $\lambda^n (1-\lambda) \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$, $0 < \lambda < 1$. Имеем: $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - \lambda^n (1-\lambda) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - \lambda^n (1-\lambda) + \frac{\lambda^n}{n+1} - \frac{\lambda^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \lambda^n\right] + \lambda^n\left(\lambda - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1} - \lambda\right)\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\right] + \lambda^n\left(\lambda - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1} - \lambda\right)\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1} - (n+1)\lambda^n\right]$. Если $0 < \lambda < \frac{n}{n+1}$, то, заменяя в квадратных скобках каждое слагаемое $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}, \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}\lambda, \ldots, \lambda^{n-1}$ на λ^{n-1}, мы уменьшим рассматриваемое выражение (или, в крайнем случае, оставим его без изменения) и получим $\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1} - \lambda\right)[n\lambda^{n-1} - (n+1)\lambda^n] = \frac{1}{(n+1)^2}\lambda^{n-2}\left(\frac{n}{n+1} - \lambda\right)^2 \geqslant 0$; значит, и подавно $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - \lambda^n (1-\lambda) \geqslant 0$. Если же $\frac{n}{n+1} < \lambda < 1$, то $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - \lambda^n (1-\lambda) = \frac{1}{n+1}\left(\lambda - \frac{n}{n+1}\right)\left[(n+1)\lambda^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}\lambda - \ldots - \lambda^{n-1}\right] \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\lambda - \frac{n}{n+1}\right)[(n+1)\lambda^n - n\lambda^{n-1}] = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \frac{n}{n+1}\right)^2 > 0$, так что и в этом случае $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} - \lambda^n (1-\lambda) > 0$. Итак, $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \frac{(a - x_{n+1})^n}{n^n} x_{n+1}$, а так как $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} < \frac{(a - x_{n+1})^n}{n^n} x_{n+1}$, то $x_1 x_2 \ldots x_{n+1} < \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$. Предположенное неравенство доказано методом полной индукции. Отметим, что если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны между собой, то из условия $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ следует: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$, так что $x_1 x_2 \ldots x_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$. Замечание. Рассмотрим несколько примеров приложения доказанной теоремы, 1°. Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. В самом деле, если x и y — стороны прямоугольника, а $2p$ — его периметр, то $2x + 2y = 2p$ или $x + y = p$. Площадь $s = xy$ по доказанному меньше $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$, если $x \neq y$, и равна $\frac{p^2}{4}$, если $x = y = \frac{p}{2}$. 2°. Из всех прямоугольных параллелепипедов с заданной полной поверхностью наибольший объем имеет куб. В самом деле, если обозначить измерения параллелепипеда через x, y, z, через $2s$ — его полную поверхность, а через v — объем, то $2yz + 2zx + 2xy = 2s$, $v = xyz$. Так как $yz + zx + xy = s$, то $yz \cdot zx \cdot xy < \left(\frac{s}{3}\right)^3$, если среди чисел yz, zx и xy есть хотя бы два разных, и $yz \cdot zx \cdot xy = \left(\frac{s}{3}\right)^3$, если $yz = zx = xy$.

*) Считаем $n > 1$.

откуда $x=y=z$. Так как $yz\cdot zx\cdot xy=v^2$, то для прямоугольного параллелепипеда, не являющегося кубом, $v<\sqrt{\left(\frac{s}{3}\right)^3}$, а для куба $v=\sqrt{\left(\frac{s}{3}\right)^3}$. 3°. Площадь треугольника выражается формулой $s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, где x, y, z — длины его сторон, а p — полупериметр. В силу того, что $p-x+p-y+p-z=3p-(x+y+z)=3p-2p=p$, из всех треугольников с заданным

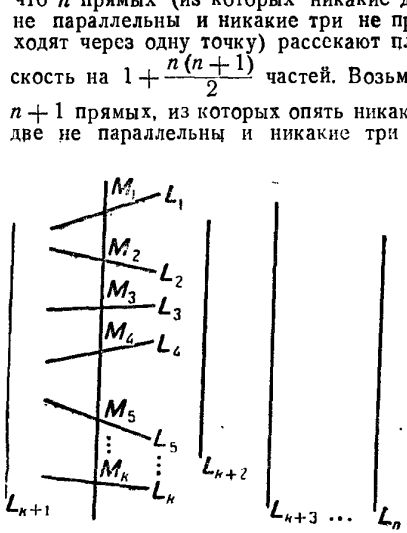


Черт. 93.

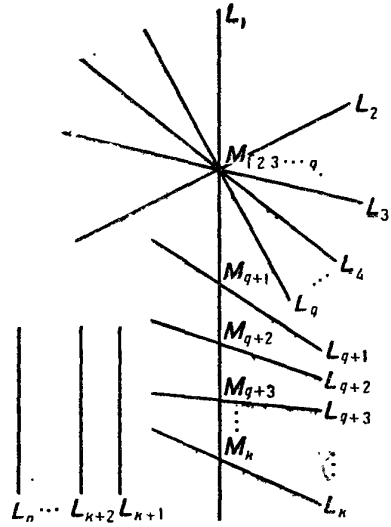


Черт. 94.

периметром наибольшую площадь будет иметь тот, для которого множители $p-x$, $p-y$, $p-z$, входящие в выражение для площади, будут равны $p-x=p-y=p-z$, $x=y=z$, т. е. равносторонний треугольник. Вообще доказанная теорема с успехом применяется при решении различных задач на наибольшие и наименьшие значения. 4. Для $n=1$ положение верно $1+\frac{1\cdot(1+1)}{2}=2$, и действительно, одна прямая рассекает плоскость на две части. Предположим теперь, что n прямых (из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку) рассекают плоскость на $1+\frac{n(n+1)}{2}$ частей. Возьмем $n+1$ прямых, из которых опять никакие две не параллельны и никакие три не



Черт. 95.



Черт. 96.

проходят через одну точку; n каких-нибудь из этих прямых по предположению рассекают плоскость на $1+\frac{n(n+1)}{2}$ частей. Присоединим к этим прямым $n+1$-ю прямую. Она, по условию, пересечет все n прямых в n различных точках и, значит, пройдет по $n+1$ кускам плоскости, каждый из которых она разделит поэтому на два куска. Таким образом, добавится еще $n+1$ кусков, и общее число частей плоскости будет $1+\frac{n(n+1)}{2}+n+1=1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Последнее выражение получается из $1+\frac{n(n+1)}{2}$, если вместо n подставить $n+1$. Таким образом, формула доказана методом полной индукции. Например, при $n=4$ имеем $1+\frac{4\cdot5}{2}=11$ (черт. 93).

При $n=5$ имеем $1+\frac{5\cdot 6}{2}=16$ (сделать чертеж!) и т. д. 5. В качестве примера рассмотрим конфигурацию, приведенную на черт. 94. Здесь $t=5$, $l=16$, $p=12$ и действительно $t-l+p=5-16+12=1$. Теорема, очевидно, верна для $n=1$, т. е. для одной прямой. В самом деле, для одной прямой $t=0$, $l=1$, $p=2$, так что $t-l+p=1$. Предположим, что теорема верна для n прямых, т. е. что для n прямых $t-l+p=1$. Проведем на плоскости $n+1$ прямых. Выделим из этих прямых любые n прямых. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — точки, в которых $n+1$-я прямая L_{n+1} пересекает n выделенных прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Предположим сначала, что все точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ новые, т. е. что прямая L_{n+1} не проходит ни через одну из точек взаимного пересечения прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (черт. 95). Для прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$ соотношение $t-l+p=1$ мы предполагаем выполненным. После проведения прямой L_{n+1} к числу t добавится k, к числу l добавится $k+1+k=2k+1$ (так как каждая из прямых $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ разделится на две части и, кроме того, сама прямая L_{n+1} точками $M_1, M_2, \ldots, M_k$ разделится на $k+1$ частей); наконец, к числу p кусков плоскостей добавится еще $k+1$ кусков (границами этих кусков будут, между прочим, те $k+1$ частей прямой L_{n+1}, на которые она делится точками $M_1, M_2, \ldots, M_k$). Таким образом, $t_1-l_1+p_1=(t+k)-(l+2k+1)+p+k+1=t-l+p=1$. Не меняется дело и в том случае, если среди точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ есть старые точки, т. е. точки взаимного пересечения прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (черт. 96). Пусть, например, в точке M_1 пересекается q прямых $L_1, L_2, \ldots, L_q$. Эту точку M_1 мы поэтому будем обозначать так: $M_{123\ldots q}$. Теперь число t точек увеличится на $k-q$, число частей прямых увеличится на $k-q+1+k-q$, а число кусков плоскостей увеличится на $k-q+1$, так что опять $t_1-l_1+p_1=(t+k-q)-(l+2k-2q+1)+(p+k-q+1)=t-l+p=1$. Таким образом, независимо от того, являются ли все точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ «новыми» или среди них есть «старые», притом с любой кратностью, мы всегда будем иметь $t_1-l_1+p_1=1$, если предположить, что соотношение $t-l+p=1$ верно для n прямых. Но это соотношение доказано для $n=1$ (для одной прямой), значит, оно верно для любого n.

Глава XIV. Необходимость и достаточность

1. Будет. 2. Будет. 3. Вообще говоря, нет. 4. Вообще говоря, нет. 5. Будет. 6. Достаточный. 7. Достаточный. 8. Необходимый и достаточный. 9. Необходимый. 10. Необходимый. 11. Достаточный. 12. Необходимый и достаточный. 13. $a_1b_2-a_2b_1=0$, но хотя бы одно из чисел $b_1c_2-b_2c_1$ или $c_1a_2-c_2a_1$ не равно нулю. 14. $a_1b_2-a_2b_1=b_1c_2-b_2c_1=c_1a_2-c_2a_1=0$, но хотя бы одно из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 не равно нулю или же $a_1=b_1=c_1=a_2=b_2=c_2=0$. 15. Будет. 16. $|a-b|<c<a+b$. 17. Достаточно. 18. Необходимо. 19. Если $\alpha\neq\beta$, то необходимо и достаточно; если $\alpha=\beta$, то только необходимо. 20. Необходимо. 21. Достаточно. 22. Достаточно. 23. Достаточно. 24. Необходимо и достаточно. 25. Необходимо. 26. Необходимо. 27. Необходимо и достаточно.

Глава XV. Разные задачи

1. (2,2) и (0,0). Указание. Переписать уравнение в виде $(x-1)(y-1)=1$. 2. а) (6,6); б) нет решений; в) нет решений; г) (17,5); д) (9,11). 3. (3,2), (—3,4), (—7,6), (—17,12), (—3,—2), (3,—4), (7,—6), (17,—12). 22. (4,3,1) и (8,1,2). 23. $\frac{1+r}{1+r^2}$ и $\frac{r+r^2}{1+r^2}$, где r рационально. 24. $y=3x+r$, $x=\frac{r^2-3}{7-6r}$, $y=\pm\frac{9+7r-3r^2}{7-6r}$. 25. $y=4+rx$, $x=\frac{8r+5}{2-r^2}$, $y=\frac{4r^2+5r+8}{2-r^2}$. 26. $y=(x-1)r$, $x=\frac{r^2+5}{r^2-3}$, $y=\frac{8r}{r^2-3}$. 27. (17,3), (1,3), (18,4) и (6,4). 28. $(\pm 37, \mp 33)$, $(\pm 2, \pm 3)$. 39. 12 600, 720, —252. 45. $2s=(1^2+2^2+\ldots+n^2)^2-(1^4+2^4+\ldots+n^4)=\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6)$. 48. $m_1=5$, $m_2=-\frac{25}{19}$. 54. $e^{ax}+e^{-ax}$. 56. $\pi\operatorname{ctg}\pi x$. 57. Cx, где $C=\text{const}$. 59. а) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\frac{2ab}{a^2+b^2}$; в) $\frac{44-5i}{318}$; г) $\frac{-1-32i}{25}$; д) 2. 60. а) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$; б) $a^3+b^3+c^3+12abc-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$; в) a^2-ab+b^2. 61. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}-\frac{p}{4}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}+\frac{p}{4}}$. 62. а) $\cos\pi+i\sin\pi$; б) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; в) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; д) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$;

е) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. **63.** а) $\sqrt{13}\left[\cos\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+i\sin\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]$;

б) $\sqrt{13}\left[\cos\left(-\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+i\sin\left(-\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]$;

в) $\sqrt{13}\left[\cos\left(\pi-\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+i\sin\left(\pi-\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]$;

г) $\sqrt{13}\left[\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+i\sin\left(\pi+\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]$.

64. а) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат; б) положительная часть оси Oy. **65.** Окружность Аполлония (точки z_1 и z_2 базисные). **66.** $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$.

67. 1) $\cos\frac{4k+1}{6}\pi+i\sin\frac{4k+1}{6}\pi$, $k=0, 1, 2$;

2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{8k-1}{12}\pi+i\sin\frac{8k-1}{12}\pi\right)$, $k=0, 1, 2$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi\right)$, $k=0, 1, 2, 3$;

4) $\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

5) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{2k+1}{6}\pi+i\sin\frac{2k+1}{6}\pi\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

68. $\sqrt[14]{13}\left(\cos\frac{2k\pi+\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}}{7}+i\sin\frac{2k\pi+\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}}{7}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

69. $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. **70.** а) $i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k=1, 2, \ldots, m-1$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k=1, 2, 3, \ldots, m-1$; в) $\frac{a}{\varepsilon_k\sqrt[n]{2}-1}$, где $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$,

$k=1, 2, \ldots, n-1$. **71.** $z_1-z_2+z_3$. **72.** $\frac{z_1+z_2}{2}$. **73.** Площадь многоугольника. **74.** Увеличивается на 4π. **79.** Произведение инверсии относительно окружности радиуса 1 с центром в начале координат на симметрию относительно оси Ox (перейти к полярным координатам; тогда $rr'=1$, $\arg z'=-\sin z$). **80.** Окружность. **82.** Указание. Проверить, что $1-z'\bar{z}'=\frac{1-z\bar{z}}{|\bar{b}z-\bar{a}|^2}$. Отсюда из $z\bar{z}=1$ $(x^2+y^2=1)$ следует $z'\bar{z}'=1$. **83.** Многочлен приводится к виду $(x+y+1)^2+2\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{73}{8}$. Отсюда следует, что его наименьшее значение $-\frac{73}{8}$ достигается при $x+y+1=0$, $y-\frac{5}{4}=0$, т. е. $x=-\frac{9}{4}$, $y=\frac{5}{4}$. **95.** $\frac{ab}{a+b}$. **103.** 001001. **104.** 001. **110.** 07. **112.** 7. **114.** Если n четное, то минимум равен $\left(x_n+x_{n-1}+\ldots+x_{\frac{n}{2}+1}\right)-\left(x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}-1}+\ldots+x_2+x_1\right)$ при любом x, удовлетворяющем условию: $x_{\frac{n}{2}}\leqslant x\leqslant x_{\frac{n}{2}+1}$, а если n нечетное, то данная функция достигает минимума, равного $\left(x_n+x_{n-1}+\ldots+x_{\frac{n+1}{2}}\right)-\left(x_{\frac{n-1}{2}}+\ldots+x_2+x_1\right)$ при $x=x_{\frac{n+1}{2}}$. **117.** Функция имеет наибольшее значение при $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это наибольшее значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **135.** Нигде не будут задержаны лишь 14-я, 23-я и 24-я машины. Ответ не зависит от

расстояний между начальными пунктами. 136. Если $a+bi=\frac{1-ix}{1+ix}$, то $|a+bi|=$ $=\left|\frac{1-ix}{1+ix}\right|=\frac{|1-ix|}{|1+ix|}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1$. Таким образом, для того чтобы число $a+bi$ можно было представить в виде $\frac{1-ix}{1+ix}$, где a, b, x — числа действительные, *необходимо*, чтобы модуль этого числа был равен единице. Поставим теперь вопрос о *достаточности* этого признака, т. е. предположим, что $|a+bi|=1$ и попытаемся отыскать x такое, что $a+bi=\frac{1-ix}{1+ix}$, где a, b, x — числа действительные. Обозначая через φ аргумент числа $a+bi$, находим $a+bi=\cos\varphi+i\sin\varphi=$ $=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{2i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\left(1-i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}=$ $=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{1-ix}{1+ix}$, где $x=-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Проведенная выше выкладка имеет место лишь в том случае, если $\frac{\varphi}{2}\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — число целое, иначе $\varphi\neq(2k+1)\pi$, т. е. $\cos\varphi\neq-1$, а так как в случае $\cos\varphi=-1$, $\sin\varphi=0$, то $a+bi$ равно -1. С другой стороны, если $a+bi=-1$, то соотношение $-1=\frac{1-ix}{1+ix}$ не выполняется ни при каком действительном значении x. Итак, если $a+bi\neq-1$, то условие $|a+bi|=1$ *достаточно* для того, чтобы число $a+bi$ (a и b действительны) можно было представить в виде $\frac{1-ix}{1+ix}$, где x — действительное число. 138. $-1<p<1$. 140. C_{n+2}^2. 142. $\frac{1}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$. 143. -35. 144. $|m|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$. 145. Уравнение имеет три действительных корня. Значение этих корней с недостатком, с точностью до 0,1: $x_1\approx-1,3$; $x_2=0$; $x_3\approx0,7$. То, что уравнение имеет три корня, можно установить графически. Указанные приближенные значения корней следуют из неравенств: $\sqrt[5]{-1,3}>-1,3+0,2$; $\sqrt[5]{-1,2}<-1,2+0,2$; отсюда с точностью до 0,1 с недостатком; $x_1=-1,3$. Далее, $\sqrt[5]{0}<0+0,2$; $\sqrt[5]{0,1}>0,1+0,2$; отсюда с точностью до 0,1 с недостатком; $x_2\approx0$; наконец, $\sqrt[5]{0,7}>0,7+0,2$; $\sqrt[5]{0,8}<0,8+0,2$; отсюда с точностью до 0,1 с недостатком $x_3\approx0,7$. 147. Система имеет единственное решение, если $4-k^2\neq0$, т. е. $k\neq\pm2$. Предполагая это условие выполненным, находим: $x=\frac{6}{2+k}$, $y=\frac{3}{2+k}$; из условий $\frac{6}{2+k}-1>0$, $\frac{3}{2+k}>0$; получаем $-2<k<4$. Если $k=-2$, то система несовместна. Если $k=2$, то система сводится к одному уравнению $x+2y=3$, откуда $x=3-2y$ и решений, удовлетворяющих поставленным условиям, в этом случае бесконечное множество: y — любое число из промежутка $0<y<1$, а $x=3-2y$. 148. Положим $x=-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Тогда

$$\frac{1-ix}{1+ix}=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

и данное уравнение принимает вид $\cos4\varphi+i\sin4\varphi=i$; значит, $\sin4\varphi=1$, $4\varphi=\frac{\pi}{2}+$ $+2k\pi$, $\varphi=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, а корни: $x_1=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}$, $x_2=-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}$, $x_3=-\operatorname{tg}\frac{9\pi}{16}$, $x_4=-\operatorname{tg}\frac{13\pi}{16}$ (все корни — действительные числа). 149. Положим $\sqrt{x^2-x+1}=$ $=x+r$. Тогда $\sqrt{x^2-x+1}$ при рациональном x будет рациональным тогда и только тогда, когда r рационально. Находим $x^2-x+1=x^2+2xr+r^2$ и, значит, $x=\frac{1-r^2}{1+2r}$, где r — любое рациональное число $\left(\neq-\frac{1}{2}\right)$. 150. а) $a=1$, б) $a=-1$,

$b=0$. 151. 1°. Если $m\neq 1$ и $m\neq 3$, то $x=\frac{2m}{m-1}$, $y=\frac{m^2-m+1}{m-1}$. При $m=1$ система несовместна, при $m=3$ она неопределенна; общее решение $y=\frac{16-3x}{2}$, x — любое число. 2°. $x^2-2xy-2x+p=0$. 3°. $x=4$, $y=2$ и $x=6$, $y=1$. 153. Полагая $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $z=\operatorname{tg}\gamma$, найдем:

$$x=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{arc tg} b+\operatorname{arc tg} c-\operatorname{arc tg} a)\right],$$

$$y=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{arc tg} c+\operatorname{arc tg} a-\operatorname{arc tg} b)\right],$$

$$z=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{arc tg} a+\operatorname{arc tg} b-\operatorname{arc tg} c)\right].$$

Решение существует, если все аргументы тангенсов отличны от $\pm\frac{\pi}{2}$. 154. 1°. Решение уравнения (1). Если существует решение уравнения (1), то оно должно удовлетворять неравенствам $0<x<b$. Возводя обе части (1) в квадрат, получим:

$$\left.\begin{array}{c} x=a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}, \\ 0<x<b \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Уравнение (1) эквивалентно смешанной системе (2) или системе

$$3x-(a+b)=2\sqrt{(a-x)(b-x)},$$
$$0<x<b.$$

Если существует решение, то $x\geqslant\frac{a+b}{3}$. Возводя в квадрат, получим:

$$f(x)\equiv 5x^2-2(a+b)x+(a-b)^2=0,\ 0<x<b,\ x\geqslant\frac{a+b}{3}. \qquad (3)$$

Система (3) эквивалентна (1). α) $\frac{a+b}{3}>b$ или $b<\frac{a}{2}$; в этом случае система (3) не имеет решений, их не имеет и уравнение (1). β) $\frac{a+b}{3}<b$ или $b>\frac{a}{2}$. Решение уравнения $f(x)=0$ будет решением уравнения (1), если оно удовлетворяет условию $\frac{a+b}{3}<x<b$; имеем $f(b)=(a-2b)^2>0$, $f\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{4}{9}(a-2b)(2a-b)<0$. Значит, корни x' и x'' уравнения $f(x)=0$ действительны и при этом $x'<\frac{a+b}{3}<x''<b$. Лишь больший корень есть корень уравнения (1). γ) $b=\frac{a}{2}$. В этом случае $b=\frac{a+b}{3}$, $f(b)=0$, $f\left(\frac{a+b}{3}\right)=0$. Второй корень $\frac{a}{10}$; значит, $\frac{a}{10}=x'<\frac{a}{2}=x''=b$. Корнем уравнения (1) является лишь один корень x''. Итак, только при условии $a\leqslant 2b$ уравнение (1) имеет только один (действительный) корень — это наибольший корень уравнения $5x^2-2(a+b)x+(a-b)^2=0$. 2°. Пусть $a\leqslant 2b$. Дискриминант функции $f(x)$ в этом случае положителен: $\Delta'=(a+b)^2-5(a-b)^2=[a+b+\sqrt{5}(a-b)][a+b-\sqrt{5}(a-b)]$. Первый множитель положителен, значит положителен и второй: $a+b+\sqrt{5}(a-b)=u^2$, $a+b-\sqrt{5}(a-b)=v^2$. Отсюда

$$a=\frac{u^2(\sqrt{5}+1)+v^2(\sqrt{5}-1)}{u\sqrt{5}},\qquad b=\frac{u^2(\sqrt{5}-1)+v^2(\sqrt{5}+1)}{u\sqrt{5}}.$$

Далее находим:

$$x_0=\frac{(u+v)^2}{10},$$

$$a-x_0=\frac{[u(\sqrt{5}+1)-v(\sqrt{5}-1)]^2}{40},$$

$$b-x_0=\frac{[u(\sqrt{5}-1)-v(\sqrt{5}+1)]^2}{40}.$$

Отсюда $\sqrt{x_0}=\frac{u+v}{\sqrt{10}}$, ибо $u>0$, $v>0$ ($u>v$), $\sqrt{a-x_0}=\frac{u(\sqrt{5}+1)-v(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{10}}$, $\sqrt{b-x_0}=\frac{v(\sqrt{5}+1)-u(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{10}}$ (рассмотреть разность $v^2(\sqrt{5}+1)^2-u^2(\sqrt{5}-1)^2=\ldots=8\sqrt{5}(2b-a)\geqslant 0$). Теперь можно еще раз проверить (1).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Раздел 1. Планиметрия

Глава XVI. Задачи на вычисление

§ 1. Треугольник

1. $\frac{a(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$, $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. 2. 3, 4, 5. 3. 3 и 4, 3, 4, 5.

5. $\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{2abc}$.

6. $a=\frac{2}{h_a}:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$. Аналогичные выражения имеем для b и c. 7. Равносторонний. 8. 30°, 60°, 90°. 9. $6-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ и $6-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$. 10. Углы при основании $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. 11. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 12. $\frac{1}{2}(p+q)\sqrt{pq}$. 13. $\frac{c^2b^2}{(b+c)^2}$. 14. $25(\sqrt{3}-1)$.

15. $\sqrt{\frac{c(p-b)(p-c)}{b}}$, $\sqrt{\frac{b(p-c)(p-b)}{c}}$. 16. Катеты: $p\frac{p+h\pm\sqrt{p^2-2ph-h^2}}{2p+h}$; гипотенуза $\frac{2p^2}{2p+h}$. 17. $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$. 18. 3, 4, 5. 19. $\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. 20. Стороны треугольника относятся как 3:4:5. 21. Все углы по 60°. 22. $\frac{l}{4c}(l+\sqrt{l^2+8c^2})$ и $\sqrt{c^2-\frac{l^2}{16c^2}(l+\sqrt{l^2+8c^2})^2}$. 23. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 25. 6 и 8. 26. $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$. 27. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. 28. $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

29. $l_a^*=\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$. 30. $R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

31. $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-b)}{p}}$. 32. $r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$.

33. $h_a'=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. 34. $l_a'=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$. 35. $m_a'=\frac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

36. $h_a''=\frac{c(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. 37. $l_a''=\frac{a}{2}\sqrt{bcp(p-a)}$.

38. $m_a''=\frac{1}{6}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. 40. $k_a=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{8\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

41. $\sqrt{\frac{abc(a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b)}{16p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. 42. $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$.

43. $\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{b^2+c^2\pm\sqrt{(b^2+c^2)^2-5(b^2-c^2)^2}}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{c}{b}<1$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{b}{c}<1$.

44. $x=\frac{OA+OB}{2}$. 45. $a=\sqrt{b(b+c)}$. 47. $|b-c|\sqrt{2}=a$. 48. 60°. 49. 90°.

50. $n(1+m^2)$, где m и n любые целые положительные числа. 51. $\frac{1}{2}|(a_2-a_3)\times$

$\times (b_3 - b_1) - (a_3 - a_1)(b_2 - b_3)|$. 52. $4s^2 = [(a_2 - a_3)(b_1 - b_3) - (a_1 - a_3) \times (b_2 - b_3)]^2 + [(b_2 - b_3)(c_1 - c_2) - (b_1 - b_3)(c_2 - c_3)]^2 + [(c_2 - c_3)(a_1 - a_3) - (c_1 - c_3)(a_2 - a_3)]^2$.

53. $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c_2 \pm \sqrt{3}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$. 54. 90°, 22°30′, 67°30′. 55. $\frac{|(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)|}{4a^2b^2c^2}$. 57. $\frac{a^2}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

58. $\sqrt{\frac{c'^2 + \sqrt{c'^4 + 4c'^2b^2}}{2}}$; гипотенуза $\frac{c' + \sqrt{c'^2 + 4b^2}}{2}$. 59. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

60. $\frac{2R}{r}$. 61. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 62. $BC = \sqrt{m^2 - 2mp}$. 63. $\sqrt{m^2 - c^2}$. 64. $\frac{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{pq}$.

65. $\sqrt{mn}$. 66. $\frac{6}{5}$. 67. 6 и 4. 68. 45°. 69. $\frac{1 + \lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$. 70. 70. 71. $b\frac{a-b}{a+b}$.

72. 45°. 73. $\frac{t}{4a}(2a+t)\sqrt{(t+3a)(a-t)}$. 74. $ryz\sqrt{z}\sqrt{(r^2y + r^2z - zy^2)(r^2 - y^2 - yz)}$.

75. 45°. 76. 22 *м*. 77. $\frac{t(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - t^2(a+b)^2}$. 78. $\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}s$.

79. $\frac{a(b+c)}{a+b+c}, \frac{b(c+a)}{a+b+c}, \frac{c(a+b)}{a+b+c}$. 81. $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$. 82. 6, 7, 8. 83. $\frac{b+c}{a} + \frac{a}{b+c}$.

84. $b:\left(2 + \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2 - (b-c)^2}} + \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{c^2 - (a-b)^2}}\right)$. 85. 5, 7 и 8.

86. $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$. 87. $\frac{1 + \alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$. 88. $\frac{\sqrt{33}-3}{6}R$.

89. $\frac{s_2}{\pi\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{s_1}{s_2}}}\right)\left[1 + \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} - \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{s_1}{s_2}}}\right]^{\frac{3}{2}}$

и

$$\frac{s_2}{\pi\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{s_1}{s_2}}}\right)\left[1 + \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} + \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{s_1}{s_2}}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

90. $\frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2}$. 91. $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$. 92. $\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1}$. 93. Проведем прямые AA', BB', CC'. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7 площади треугольников, на которые разбился данный треугольник проведенными прямыми. В силу данных соотношений будем иметь: пл. $\triangle B'BP = \lambda x_3$, пл. $\triangle C'CQ = \mu x_2$. $\triangle A'AR = \nu x_1$ (на черт. 97 заштрихованы площади x_4, x_5 и x_6). Теперь в силу данных соотношений будем иметь:

1) $x_2 + x_5 + (1+\nu)x_1 = \frac{s}{1+\mu}$,

2) $x_5 + (1+\nu)x_1 + x_2 + x_4 + \lambda x_3 = \lambda[(1+\mu)x_2 + x_3 + x_6]$,

3) $x_7 + x_4 + \lambda x_3 = \lambda(x_2 + x_3)$,

4) $(1+\mu)x_2 + x_6 + x_3 = \frac{s}{1+\lambda}$,

5) $(1+\mu)x_2 + x_6 + x_5 + x_7 + \nu x_1 = \nu[(1+\lambda)x_3 + x_1 + x_4]$,

6) $x_7 + x_5 + \nu x_1 = \nu(x_4 + x_1)$,

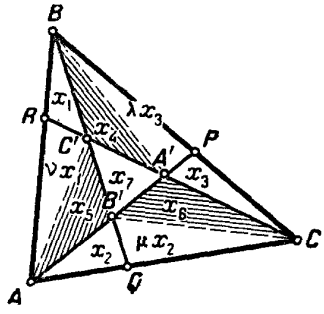
7) $(1+\lambda)x_3 + x_4 + x_1 = \frac{s}{1+\nu}$,

8) $(1+\lambda)x_3 + x_4 + x_7 + x_6 + \mu x_2 = \mu[(1+\nu)x_1 + x_5 + x_6]$,

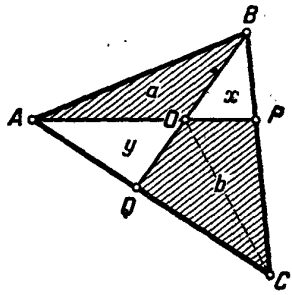
9) $x_7 + x_6 + \mu x_2 = \mu(x_5 + x_2)$.

Складывая 1-е и 3-е уравнения и вычитая из 2-го, получим $-x_2 = \lambda(1+\mu)x_2 - \frac{s}{1+\mu}$, откуда $x_2 = \frac{s}{(1+\mu)[1+(\mu+1)\lambda]}$. Аналогично из 3, 4 и 5-го уравнений находим

$x_3 = \frac{s}{(1+\nu)[1+\nu(1+\lambda)]}$; наконец, точно так же из трех последних уравнений находим $x_1 = \frac{s}{(1+\nu)[1+\mu(1+\nu)]}$. Из черт. 97 теперь легко находим: $\frac{s}{1+\lambda} + \frac{s}{1+\mu} + \frac{s}{1+\nu} + x_7 - (x_1 + x_2 + x_3) = s$. Отсюда из предыдущих выражений



Черт. 97.



Черт. 98.

для x_1, x_2, x_3 находим искомое отношение $\frac{x_7}{s}$ в виде $\frac{x_7}{s} = 1 - \frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{(1+\lambda)[1+\nu(1+\lambda)]} - \frac{1}{(1+\mu)[1+\lambda(1+\mu)]} - \frac{1}{(1+\nu)[1+\mu(1+\nu)]} = \frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{[1+\nu(1+\lambda)][1+\mu(1+\nu)][1+\lambda(1+\mu)]}$. **94.** Проведем отрезок OC (черт. 98). Тогда $\frac{BP}{PC} = \frac{a+x}{b+y}$, значит пл. $\triangle POC = x\frac{b+y}{a+x}$. Теперь имеем:

$$\frac{\text{пл. } \triangle AOB}{\text{пл. } \triangle OBC} = \frac{\text{пл. } \triangle ABQ}{\text{пл. } \triangle QBC},$$

или

$$\frac{a}{x + x\frac{b+y}{a+x}} = \frac{a+\nu}{b+x}, \tag{1}$$

а так как

$$a + b + x + y = s, \tag{2}$$

то вопрос сводится к решению системы уравнений: (1), (2). **95.** $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{3}}$.

§ 2. Многоугольники

1. $\frac{1}{5}$. **2.** d. **3.** $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$. **4.** $\frac{55}{12}$ и $\frac{70}{9}$. **5.** $2\sqrt{17}$ и $2\sqrt{33}$. **6.** $r = 2a(2-\sqrt{3})$. **7.** $\frac{h^2}{2}$. **8.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **9.** $(m+n)^2$. **10.** $\sqrt{\frac{b(a^2-d^2)+d(b^2-c^2)}{b-d}}$, $\sqrt{\frac{d(b^2-a^2)+b(c^2-d^2)}{b-d}}$ (b и d — параллельные стороны, $b > d$).

11. $\frac{b+d}{4(b-d)}\sqrt{(a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(-a+b+c+d)}$, где b и d — параллельные стороны, $b > d$. **12.** Основания трапеции: $\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{2p^2-4d^2})$ **13.** $\frac{n^2Q}{m^2+(m+n)^2}$. **15.** Диагонали: $\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}$, $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}}$. Площадь: $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $2p = a+b+c+d$. **16.** $\sqrt{5}$. **17.** $\frac{P\sqrt{p}}{\sqrt{2p-P}}$. **18.** $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+4ab+b^2)$. **19.** 16. **20.** $\frac{\beta(1+2\alpha+\alpha\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\alpha\beta)}$.

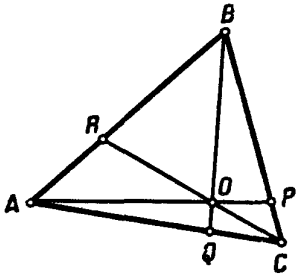
§ 3. Окружность

1. $\sqrt{2Rr}$. 2. $\left(\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}\pm\sqrt{r}}\right)^2$. 3. $\frac{p}{\sqrt{3}}$. 4. 90°. 5. $\frac{r(1+\sqrt{5})}{2}$. 6. k^2. 7. 1.
8. $r=2(\sqrt{2}-1)R$. 9. $AM=2R$, $AP=\frac{8R}{3}$, $MP=\frac{10R}{3}$. 10. $\frac{c^2-(a-b)^2}{4(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.
11. $\frac{1}{2R}(a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{2R^2-a^2})$. 12. $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$. 13. $\frac{a^2}{3}(3+\pi-3\sqrt{3})$.
14. $\frac{3}{8}R$. 15. $\frac{R+r}{R-r}rR$. 16. $\sqrt{ab+d^2}$. 17. $R\sqrt{6}$. 18. $r\sqrt{3}$. 19. 4. 20. $\sqrt{a^2-b^2}$.
21. Если K — точка пересечения CD с AB, L — точка пересечения CD с MN, то $DK=LC$ (точки на хорде CD расположены в порядке: C, L, K, D).
22. $r\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$, $r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{48}\right)$. 23. $\frac{4R}{r+r_1}\sqrt{rr_1}$. 24. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. 25. 5.
26. 13 или 53. 27. $\frac{25}{2}\pi$. 28. $\sqrt{\frac{Ra_1b_1c_1}{2}}$. 30. $\frac{b^2\sqrt{m^2-h^2}}{2h\sqrt{b^2-h^2}}$. 31. $R_1+R_3=R_2+R_4$.
32. $\left[12+7\sqrt{3}-\left(\frac{23}{6}+2\sqrt{3}\right)\pi\right]r^2$. 33. $\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$. 34. $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$.
36. $\sqrt{\frac{(R_aR_b+R_cR_d)(R_bR_c+R_dR_a)}{R_aR_c+R_bR_d}}$. 37. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Глава XVII. Задачи на доказательство

§ 1. Треугольник

158. $\frac{\sqrt{3}}{4}[(2+\sqrt{3})^{2n}-(2-\sqrt{3})^{2n}]$. 177. 60°. 195. Решение (черт. 99):



Черт. 99.

$$\frac{BP}{PC}=\frac{\text{пл. }\triangle BAP}{\text{пл. }\triangle CAP},\qquad \frac{BP}{PC}=\frac{\text{пл. }\triangle BOP}{\text{пл. }\triangle POC},$$

отсюда

$$\frac{BP}{PC}=\frac{\text{пл. }\triangle BOA}{\text{пл. }\triangle COA}.$$

Аналогично выводим:

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{\text{пл. }\triangle BOC}{\text{пл. }\triangle BOA},\qquad \frac{AR}{RB}=\frac{\text{пл. }\triangle AOC}{\text{пл. }\triangle BOC}.$$

Перемножая, будем иметь

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1. \qquad (\alpha)$$

Обратная теорема: если имеет место последнее соотношение, то прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке; в самом деле, пусть O — точка, в которой пересекаются AP и BQ, и пусть CO пересекает AB в точке R'. Тогда по доказанному

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR'}{R'B}=1$$

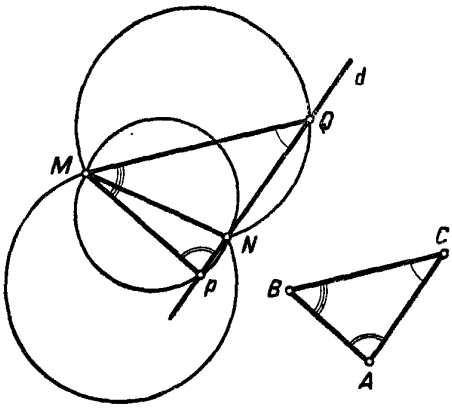
отсюда и из данного соотношения (α) находим

$$\frac{AR}{RB}=\frac{AR'}{R'B},$$

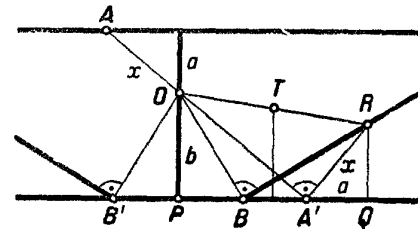
так что точки R и R' совпадают. 234. Нет, так как на окружности сколь угодно большого радиуса можно взять сколько угодно близкие друг к другу три точки (служащие вершинами треугольника). 237. $\frac{l_1^2}{l^2}=\frac{s_1}{s}$ и т. д.

Глава XVIII. Геометрические места точек

1. Дуги двух окружностей. 2. Окружность. 3. Прямая, перпендикулярная прямой, проходящей через две данные точки. 4. Окружность в случае $k \neq 0$ (окружность Аполлония), прямая в случае $k = 1$. 5. Прямая линия (радикальная ось). 6. Прямая, параллельная радикальной оси и отстоящая от одного из центров на таком же расстоянии, на каком находится радикальная ось от другого центра. 7. Окружность. 8. Прямая, перпендикулярная диаметру, проходящему через точку O. 9. Окружность, проходящая через точку O. 10. Окружность. 13. Если данные прямые пересекаются, то заданное множество точек состоит из всех точек, лежащих на продолжениях сторон прямоугольника, для которого данные прямые служат диагоналями. Если данные прямые параллельны и заданная разность равна нулю, то прямая. Если данные прямые параллельны и данный отрезок меньше расстояния между ними, то четыре прямые, параллельные данным. Если данный отрезок равен расстоянию между данными прямыми, то множество всех точек плоскости, лежащих вне полосы, образуемой данными прямыми, а также все точки, лежащие на данных прямых. Наконец, если данный отрезок больше расстояния между данными прямыми, то имеем две прямые, параллельные данным. 16. Вершина прямого угла описывает диагонали прямоугольника, стороны которого равны удвоенным катетам движущегося треугольника и параллельны данным взаимно перпендикулярным пря-



Черт. 100.



Черт. 101.

мым. Центр симметрии прямоугольника совпадает с точкой пересечения данных прямых. 17. Хорда AB делит данную окружность на две части C_1 и C_2; для всех точек M части C_1 имеем $\angle AMB = \alpha$, для всех точек M части C_2 имеем $\angle AMB = \beta$. Искомая линия состоит из дуг C_1^* и C_2^* окружностей, концы которых — точки A и B. Дуга C_1^* лежит с той же стороны хорды AB, что и дуга C_1, и для всех ее точек N имеем $\angle ANB = \frac{\alpha}{2}$. Дуга C_2^* лежит с той же стороны хорды AB, что и дуга C_2 и для всех ее точек N имеем: $\angle ANB = \frac{\beta}{2}$. 18. Прямая. 19. Две окружности с центром в точке A. 20. Если считать, что (в соответствии с данным порядком вершин треугольников ABC и PMQ) $\angle PMQ = \angle ABC$, то заданным геометрическим местом точек являются дуги четырех окружностей, для которых MN — общая хорда и которые вмещают углы ACB и BAC (черт. 100). 21. В случае пересекающихся прямых — прямоугольник, для которого данные пересекающиеся прямые являются диагоналями. В случае, если данные прямые параллельны, будем иметь две прямые, параллельные данным (если сумма расстояний больше расстояния между прямыми). Если данные прямые параллельны и сумма расстояний от любой точки заданного множества точек до этих прямых равна расстоянию между ними, то искомое множество точек состоит из всех точек, лежащих между данными прямыми, включая и все точки обеих данных прямых. 24. Пусть $a > b$ и пусть дуга, стягивающая хорду $2a$, равна 2α, а дуга, стягивающая хорду $2b$, равна 2β. Искомая линия состоит из пары окружностей, для которых AB — хорда, которая видна из точки окружности под углом $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$. Расстояния, о которых говорится в условии задачи, равны для первой окружности:

$$a\frac{r^2 + ab - \sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{r^2 - b^2}}{b\sqrt{r^2 - a^2} + a\sqrt{r^2 - b^2}}, \quad a\frac{b\sqrt{r^2 - a^2} + a\sqrt{r^2 - b^2}}{r^2 + ab - \sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{r^2 - b^2}};$$

для второй окружности:

$$a\frac{r^2+ab+\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}{b\sqrt{r^2-a^2}-a\sqrt{r^2-b^2}},\quad a\frac{b\sqrt{r^2-a^2}-a\sqrt{r^2-b^2}}{r^2+ab+\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}.$$

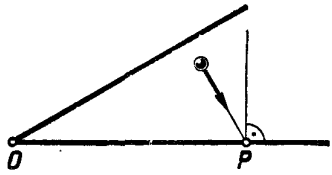
25. Точка B, где $PB=a$, принадлежит заданной линии (черт. 101). Проекция отложенного отрезка x на прямую l равна a, поэтому средняя линия трапеции $PORQ$ является в то же время и перпендикуляром к отрезку $A'B$ в его середине. Значит ($\angle OA'R=90°$), вокруг четырехугольника $OBA'R$ можно описать окружность (с центром T), поэтому $\angle RBO=90°$ и, следовательно, заданная линия является прямой, проходящей через точку B перпендикулярно OB. Если отрезок x откладывать в обе стороны, то получим две прямые: вторая прямая проходит через точку B' ($PB'=PB$) перпендикулярно OB'. **26.** Диаметры неподвижной окружности. **29.** Все точки, лежащие внутри треугольника, вершины которого — середины сторон данного треугольника.

Глава XIX. Задачи на построение

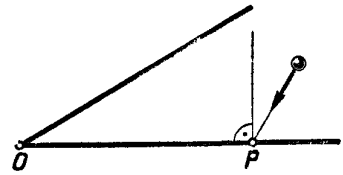
§ 10. Смешанный отдел

4. $c\geqslant 2h$, $\frac{1}{2}(\sqrt{2hc+c^2}\pm\sqrt{c^2-2hc})$. **8.** $\sin\varphi=\frac{R}{4a^2}(\sqrt{R^2+8a^2}-R)$,

где $\varphi=\angle OAB$ (O — центр биллиарда). Задача имеет еще два решения: шарик можно направить по диаметру OA в одном из двух возможных направлений.

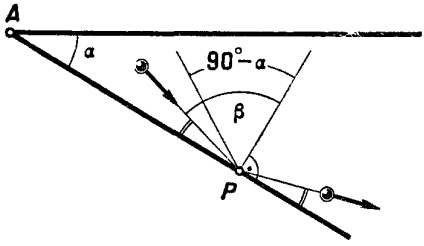


Черт. 102.

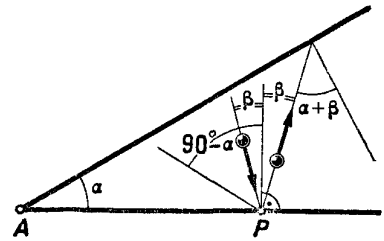


Черт. 103.

22. Центр тяжести совпадает с центром круга, вписанного в треугольник, вершинами которого служат середины сторон заданного «проволочного» треугольника. **42.** Пусть A и B — данные точки, а отрезок AB не параллелен и не перпендикулярен данной прямой. Перпендикуляр к отрезку в его середине встречает данную прямую в точке M, для которой $|AM-BM|=0$ — это наименьшее значение $|AM-BM|$. Продолжение отрезка AB встречает данную прямую в точке M, для которой $|AM-BM|$ имеет наибольшее значение. Разобрать случай, когда отрезок AB: а) параллелен данной прямой; б) перпендикулярен данной прямой



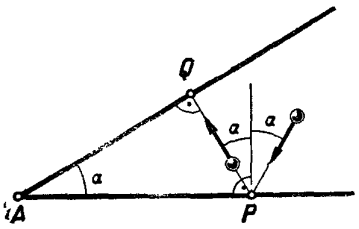
Черт. 104.



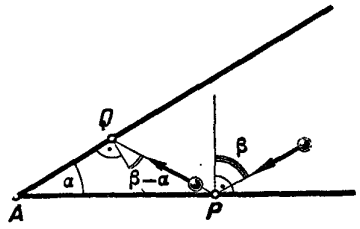
Черт. 105.

43. $AE=AB\pm\sqrt{AB^2-AD^2}$, $AB\geqslant AD$. **44.** Два решения, если $s>4k^2$, одно, если $s=4k^2$; ни одного, если $s<4k^2$. **53.** Около данного треугольника описываем окружность и строим равнобедренные треугольники AC_1B, BA_1C и CB_1A, где C_1, A_1 и B_1 — вершины равнобедренных треугольников, лежащие на описанной окружности. **56.** Для краткости формулировок условимся говорить, что «шарик движется по первому способу», если до удара о борт в точке P (черт. 102) шарик и вершина данного острого угла находятся по одну сторону от перпендикуляра, восставленного к борту в точке P, и что «шарик движется по второму способу», если шарик и вершина угла находятся по разные стороны от указанного перпендикуляра (черт. 103). Если шарик движется первым способом (черт. 104) и если угол падения $\beta\geqslant 90°-\alpha$, то, отразившись от борта один раз, он вылетит из биллиарда. Если $\beta<90°-\alpha$ (черт. 105), то шарик после удара о борт в точке P

будет совершать движение к другому борту и будет опять двигаться первым способом, причем новым углом падения будет угол $\alpha+\beta$. Если все еще $\beta+\alpha<90^\circ-\alpha$, то после отражения шарик будет двигаться и опять первым способом. по направлению к борту, ударится о него и т. д. Вообще, если k — такое целое положительное число, что $\beta+(k-1)\alpha<90^\circ-\alpha$, но $\beta+k\alpha\geqslant 90^\circ-\alpha$, то после k отражений шарик вылетит из биллиарда и притом в процессе движения будет все

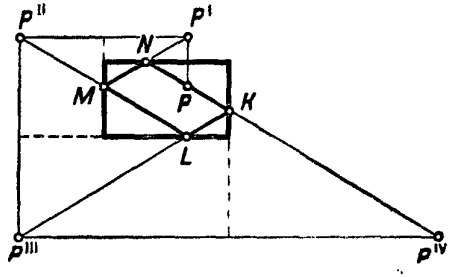


Черт. 106.



Черт. 107.

время двигаться первым способом. Если шарик движется вторым способом и если $\beta=\alpha$ (черт. 106), то после отражения от борта в точке P он ударится о другой борт в точке Q ($\angle PQA=90^\circ$) и начнет свое движение от Q к P по тому же пути и будет двигаться уже первым способом. Если $\beta<\alpha$, то после отражения в точке P он будет двигаться к борту уже первым способом, так, что если $\beta\leqslant\alpha$, то шарик в конце концов вылетит из биллиарда. Если, наконец, $\beta>\alpha$ и шарик движется вторым способом (черт. 107), то после отражения от борта в точке P шарик будет двигаться к другому борту опять вторым способом и угол падения будет $\beta-\alpha$. Если все еще $\beta-\alpha>\alpha$, то шарик после отражения будет двигаться вторым способом по направлению к другому борту и т. д. Пусть k—такое целое положительное число, что $\beta-(k-1)\alpha>\alpha$, но $\beta-k\alpha\leqslant\alpha$. Тогда после k отражений шарик переменит способ движения, начнет после k-го отражения двигаться первым способом и опять в конце концов вылетит из биллиарда. Из проведенных рассуждений ясно достаточное условие, при каком шарик пройдет через свое начальное положение: если он начинает свое движение вторым способом и если $\frac{\beta}{\alpha}$ — число целое (конечно, положительное),



Черт. 108.

т. е. угол падения в целое число раз больше острого угла биллиарда. 88. Точка пересечения диагоналей. 89. Надо последовательно отразить зеркально точку P в сторонах данного прямоугольника. Получим точки P^{I}, P^{II}, P^{III}, P^{IV} (черт. 108), а затем, соединив P^{IV} с P, найдем K, соединив K с P^{III}, найдем L и т. д. Ломаная $PNMLKP$ будет иметь наименьшую длину.

Глава XX. Задачи, в решении которых применяются комбинированные методы

1. $\overrightarrow{C'A_1}=k\overrightarrow{C'A}$, $\overrightarrow{A'B_1}=k\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{B'C_1}=k\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{B'A_2}=k\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'B_2}=k\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{A'C_2}=k\overrightarrow{A'C}$. Точки G_1 и G_2 будут центрами тяжести треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_1C_1}=0, \quad (1)\ \overrightarrow{G_2A_2}+\overrightarrow{G_2B_2}+\overrightarrow{G_2C_2}=0. \qquad (2)$$

Но

$$\overrightarrow{G_1A_1}=\overrightarrow{G_1C'}+\overrightarrow{C'A_1}=\overrightarrow{G_1C'}+k\overrightarrow{C'A}, \ \overrightarrow{G_1B_1}=\overrightarrow{G_1A'}+\overrightarrow{A'B_1}=\overrightarrow{G_1A'}+k\overrightarrow{A'B},$$
$$\overrightarrow{G_1C_1}=\overrightarrow{G_1B'}+\overrightarrow{B'C_1}=\overrightarrow{G_1B'}+k\overrightarrow{B'C}, \ \overrightarrow{G_2A_2}=\overrightarrow{G_2B'}+\overrightarrow{B'A_2}=\overrightarrow{G_2B'}+k\overrightarrow{B'A},$$
$$\overrightarrow{G_2B_2}=\overrightarrow{G_2C'}+\overrightarrow{C'B_2}=\overrightarrow{G_2C'}+k\overrightarrow{C'B}, \ \overrightarrow{G_2C_2}=\overrightarrow{G_2A'}+\overrightarrow{A'C_2}=\overrightarrow{G_2A'}+k\overrightarrow{A'C}.$$

Теперь из (1) и (2) находим

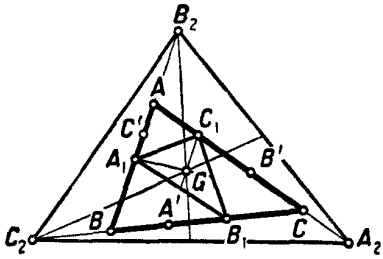
$$\overrightarrow{G_1C'} + \overrightarrow{G_1A'} + \overrightarrow{G_1B'} = k(\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'C}) \qquad (1')$$

и

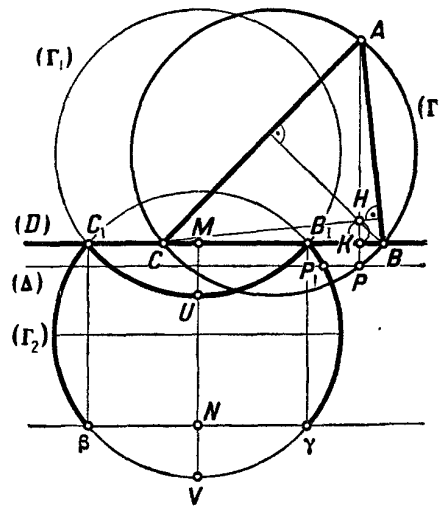
$$\overrightarrow{G_2B'} + \overrightarrow{G_2C'} + \overrightarrow{G_2A'} = k(\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{A'C}); \qquad (2')$$

но $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, значит $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'A} = 0$, откуда $\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{C'B}$. Теперь из (1') и (2') находим $\overrightarrow{G_1C'} + \overrightarrow{G_1A'} + \overrightarrow{G_1B'} = \overrightarrow{G_2B'} + \overrightarrow{G_2C'} + \overrightarrow{G_2A'}$. Отсюда следует, что точки G_1 и G_2 совпадают (точка G на черт. 109). 2. 1°. Окружность, описанная около треугольника ABC, проходит через точку P, симметричную точке H относительно (D); точка P фиксирована, поскольку фиксированы H и (D).

Построение треугольника ABC с заданной стороной $BC = a$. Пусть ABC—искомый треугольник (черт. 110) и пусть (Γ) — окружность, описанная вокруг этого треугольника. Эта окружность проходит через точку P, точка A



Черт. 109.

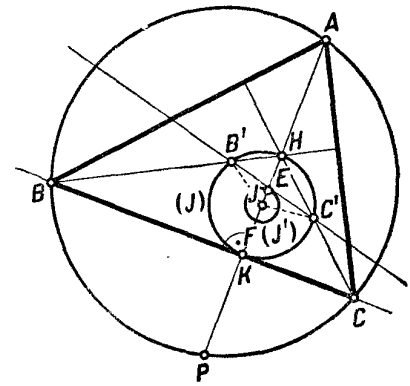


Черт. 110.

есть вторая точка этой окружности, лежащая на перпендикуляре, опущенном из P на (D). Так как $A = \alpha$—острый угол, то точка A лежит на большей дуге окружности (Γ), отсекаемой от (Γ) прямой (D). Отметим на прямой (D) точки B_1 и C_1 такие, что $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$. Преобразование переноса $\overrightarrow{BB_1}$, при котором точка B преобразуется в B_1, переводит окружность (Γ) в одну из двух окружностей, проходящих через B_1 и C_1, дуги которых вмещают данный угол α. Отсюда построение: возьмем на прямой (D) произвольный отрезок B_1C_1, длина которого равна a. На отрезке B_1C_1 построим две дуги, вмещающие угол α (дуги большие полуокружности, поскольку α — острый угол), и дополним эти дуги до окружностей, частью которых являются эти дуги. Окружность, описанная около треугольника ABC, удовлетворяющего условию, получается в результате такого параллельного переноса одной из таких окружностей, при котором перенесенная окружность пройдет через P. Проведем теперь через точку P прямую (Δ), параллельную (D). Если P_1 — одна из точек, в которой эта прямая пересекает одну из построенных окружностей, мы получим окружность (Γ), описанную около треугольника, удовлетворяющего условию в результате переноса $\overrightarrow{PP_1}$, вершина A которого расположена на большей дуге окружности (Γ) [отсеченной от (Γ) прямой (D)]. Это условие будет выполнено всегда, если точка P_1 будет расположена на меньшей дуге окружности (Γ_1), проходящей через A_1 и C_1 и вмещающей угол A, причем большая дуга (Γ_1) лежит по ту же сторону от прямой (D), где лежит точка H. Обозначим через (Γ_2) окружность, симметричную (Γ_1) относительно (D), а через β и γ — точки, в которых прямые, проходящие через C_1 и B_1 перпендикулярно (D), пересекают (Γ_2). Точка P может также принадлежать дугам окружности (Γ_2), заключенным между прямыми (D) и $\beta\gamma$. Точка P_1 не может лежать на большей дуге окружности (Γ_1), отсекаемой от нее прямой (D), и на дугах (Γ_2), лежащих вне полосы, ограниченной прямыми (D) и $\beta\gamma$. Таким образом, задача имеет решение тогда и только тогда, когда точка P_1 принадлежит одной из трех дуг, отмеченных утолщенными линиями на чертеже 110. Обозначая через M и N середины B_1C_1 и $\beta\gamma$, через U — середину меньшей дуги B_1C_1 окружности (Γ_1), находим: $MU = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $MN = a\operatorname{ctg}\alpha$.

Если $MN > MU$ $\left(\text{т. е. } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, то при $0 < 2k < \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ задача имеет 4 решения, при $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 2k < a\operatorname{ctg}\alpha$ — два решения, при $2k > a\operatorname{ctg}\alpha$ — ни одного решения. Если же $MN < MU$, то $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $a\operatorname{ctg}\alpha$ в приведенных неравенствах надо поменять местами. Что будет при $MN = MU$ (сделать чертеж)? Исследовать случаи: $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2k$, $a\operatorname{ctg}\alpha = 2k$, считая $MN > MU$ или $MN < MU$, или $MN = MU$.

2°. **Огибающая прямой $B'C'$.** Пусть K — проекция H на (D). Прямая (D) в результате инверсии $I(H, 4k^2)$ преобразуется в окружность (J), построенную на HK как на диаметре; B' и C' — это точки, в которых прямые HB и HC пересекают эту окружность (черт. 111). Следовательно, угол BHC равен соответственно или $180° - \alpha$ или α, в зависимости от того, расположена ли точка A по ту сторону от (D), где лежит точка H, или по другую сторону (сделать второй чертеж, аналогичный чертежу 111). В том и другом случае угол $B'JC'$ равен 2α. Расстояние от точки J до прямой $B'C'$ всегда равно $k\cos\alpha$, значит прямая $B'C'$ касается окружности с центром J и радиусом $k\cos\alpha$. С другой стороны, всякая касательная к указанной окружности соответствует некоторому возможному положению $B'C'$, так как точки B и C, в которых прямые HB' и HC' пересекают (D), определяют треугольник ABC, принадлежащий заданному семейству треугольников ABC. Таким образом, указанная окружность является огибающей семейства прямых $B'C'$.



Черт. 111.

Фиксированная окружность, касающаяся окружности, описанной около треугольника HBC.

Окружность, описанная около треугольника HBC, получается в результате инверсии $I(H, 4k^2)$ прямой $B'C'$, а потому касается окружности (J'), полученной из окружности (J), в результате инверсии $I(H, 4k^2)$. Пусть E и F — точки, в которых окружность (J) пересекает HK, и пусть E' и F' — образы этих точек в инверсии I. Так как (черт. 111) $HE = k(1 - \cos\alpha)$, $HF = k(1 + \cos\alpha)$, то $HE' = \frac{4k^2}{k(1-\cos\alpha)} = \frac{4k}{1-\cos\alpha}$, $HF' = \frac{4k^2}{k(1+\cos\alpha)} = \frac{4k}{1+\cos\alpha}$; следовательно, $E'F' = HE' - HF' = \frac{8k\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

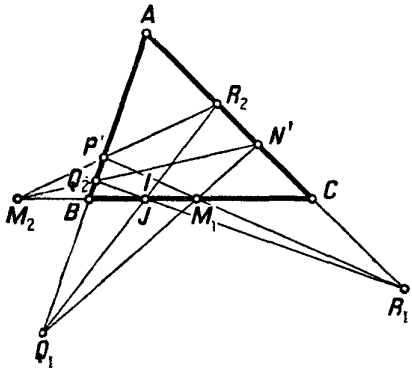
3°. **Фиксированная окружность, касающаяся окружности, описанной около треугольника ABC.** Окружность (Γ), описанная около треугольника ABC, симметрична окружности (HBC) по отношению к (D), значит окружность (Γ) касается окружности (J''), симметричной окружности (J') по отношению к (D).

Геометрическое место O центров окружностей, описанных вокруг треугольника ABC. Окружность (Γ) проходит через точку P и касается фиксированной окружности (J''). Более того: так как прямая $B'C'$ может быть любой касательной к окружности (J), окружность (HBC) может совпасть с любой окружностью, проходящей через H и касающейся окружности (J'); значит, окружность (Γ) может быть любой окружностью, проходящей через P и касающейся окружности (J''). Отсюда следует, что геометрическое место центров O окружности (Γ) есть гипербола, фокусами которой являются точка P и центр окружности (J''), а большая ось равна радиусу окружности (J'').

Геометрическое место центров тяжести треугольника ABC. Пусть G центр тяжести треугольника ABC. Точка G получается из точки O гомотетией $\left(H, \frac{2}{3}\right)$; значит, геометрическое место точек G есть гипербола, полученная из гиперболы (только что рассмотренной) в результате гомотетии $\left(H, \frac{2}{3}\right)$.

4°. **Изучение окружностей с диаметром BC.** Окружность с диаметром BC ортогональна прямой (D) в точках B и C; значит, ее образ (S) в инверсии $(H, 4k^2)$ будет окружностью, ортогональной в точках B' и C' окружности (J). А так как угол $B'JC'$ равен 2α, то центр (S) отстоит от J на постоянном расстоянии $\frac{k}{\cos\alpha}$

и радиус (S) всегда равен $k\operatorname{tg}\alpha$. Значит, точки P и Q, в которых JS пересекает окружность (S), отстоят от J на постоянных расстояниях, и потому окружность (S) касается двух концентрических окружностей (C_1) и (C_2) с центром J и радиусами JP и JQ. Отсюда следует, что окружность с диаметром BC касается двух и только двух фиксированных окружностей (C_1) и (C_2), полученных в результате инверсии $(H, 4k^2)$. Но центр окружности с диаметром BC лежит постоянно на прямой (D); значит, если окружность с диаметром BC касается фиксированной окружности, то она касается и окружности, симметричной указанной фиксированной окружности относительно (D). Но окружности с диаметрами BC касаются только двух фиксированных окружностей; значит, окружности, полученные из окружностей (C_1) и (C_2) инверсией $I(H, 4k^2)$, которых касаются окружности с диаметрами BC, симметрично расположены относительно (D).



Черт. 112.

3. Спроектируем из точки данную конфигурацию в другую плоскость так, чтобы прямая BC спроектировалась бы в бесконечно удаленную прямую плоскости проекций. Будем обозначать в плоскости проекции образы точек теми же буквами, но строчными. Тогда на плоскости проекций $n'q_1 \parallel p'r_1$ и $n'q_2 \parallel p'r_2$, а надо доказать, что $r_1q_2 \parallel r_2q_1$, что достигается рассмотрением подобных треугольников. Другой вариант решения: обозначим через I и J точки, в которых прямые Q_1R_2 и Q_2R_1 пересекают BC. Применяя теорему Менелая к различным секущим, будем иметь (черт. 112):

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}\,\frac{\overline{R_2C}}{\overline{R_2A}}\,\frac{\overline{Q_1A}}{\overline{Q_1B}} = 1, \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}\,\frac{\overline{R_1C}}{\overline{R_1A}}\,\frac{\overline{Q_2A}}{\overline{Q_2B}} = 1, \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}}\,\frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}}\,\frac{\overline{Q_1A}}{\overline{Q_1B}} = 1, \qquad (3)$$

$$\frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}}\,\frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}}\,\frac{\overline{Q_2A}}{\overline{Q_2B}} = 1, \qquad (4)$$

$$\frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}}\,\frac{\overline{R_1C}}{\overline{R_1A}}\,\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = 1, \qquad (5)$$

$$\frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}}\,\frac{\overline{R_2C}}{\overline{R_2A}}\,\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = 1. \qquad (6)$$

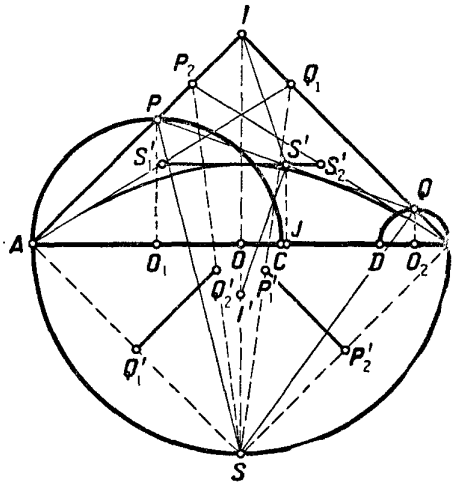
Из (3) и (6), а также из (4) и (5) находим:

$$\frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}}\,\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}}\,\frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}}\,\frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}}\,\frac{\overline{R_2C}}{\overline{R_2A}}\,\frac{\overline{Q_1A}}{\overline{Q_1B}} = 1,$$

$$\frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}}\,\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}}\,\frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}}\,\frac{\overline{M_2B}}{\overline{M_2C}}\,\frac{\overline{R_1C}}{\overline{R_1A}}\,\frac{\overline{Q_2A}}{\overline{Q_2B}} = 1,$$

откуда

$$\frac{\overline{R_2C}}{\overline{R_2A}}\,\frac{\overline{Q_1A}}{\overline{Q_1B}} = \frac{\overline{R_1C}}{\overline{R_1A}}\,\frac{\overline{Q_2A}}{\overline{Q_2B}};$$



Черт. 113.

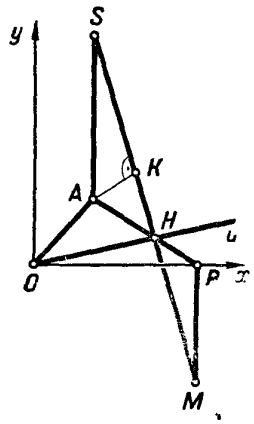
отсюда и из (1) и (2): $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \dfrac{\overline{JB}}{\overline{JC}}$; следовательно, точки I и J совпадают. 4. Обозначим через I точку пересечения прямых AP и BQ; треугольник AIB прямоугольный и равнобедренный. Геометрическое место точек P и Q суть отрезки P_2A и Q_1B сторон AI и BI длиной $\dfrac{AB-CD}{\sqrt{2}}$ (черт. 113).

Геометрическое место середин P' и Q' отрезков SQ и SP. Точки Q' и P' гомотетичны точкам P и Q по отношению к фиксированной точке S с коэффи-

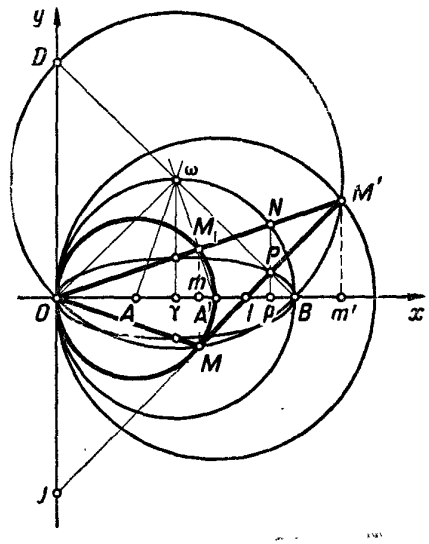
циентом гомотетии, равным $\frac{1}{2}$. Геометрическое место точек Q' и P' суть отрезки $Q_1'Q_2'$ и $P_1'P_2'$, гомотетичные отрезкам AP_2 и Q_1B в гомотетии $\left(S, \frac{1}{2}\right)$.

Геометрическое место точек S'. Пусть S' — середина PQ. Опустим из точки S' перпендикуляр $S'J$ на AB и соединим точки P и Q с центрами O_1 и O_2 полуокружностей (O_1) и (O_2); PO_1O_2Q — прямоугольная трапеция, $S'J$ — ее средняя линия; значит, $JS' = \frac{O_1P + O_2Q}{2} = \frac{AB - CD}{4}$; следовательно, точка S' лежит на прямой, параллельной AB. Геометрическим местом точек S' является отрезок $S_1'S_2'$ этой прямой, соединяющей середины отрезков AQ_1 и BP_2.

Огибающая PQ. Пусть I' — пересечение медиатрисы PQ с IS. Так как IS — биссектриса угла I треугольника IPQ, то ее пересечение с медиатрисой гипотенузы PQ принадлежит окружности, описанной около этого треугольника; но центр этой окружности есть середина S' отрезка PQ; значит, $S'I' = S'I$,



Черт. 114.



Черт. 115.

а потому I' — фиксированная точка, симметричная I относительно $S_1'S_2'$. Далее, PQ — вторая сторона прямого угла $I'S'P$, вершина S' которого перемещается по отрезку $S_1'S_2'$, а первая сторона которого проходит через фиксированную точку I'. Значит, огибающей будет дуга параболы с фокусом I' и касательной в вершине $S_1'S_2'$, причем эта дуга ограничена касательными, проведенными к указанной параболе из точек S_1' и S_2'. 5. 1°. Прямой угол OHS проектируется на плоскость в прямой угол AOx (черт. 114). Значит, точка H лежит на окружности с диаметром OA в плоскости AOx.

2°. **Параллельность PM и SA.** Прямая AS параллельна оси Oy, следовательно, параллельна плоскости xOy. Плоскость SAH пересекает плоскость yOx по прямой PM; значит, $PM \parallel SA$.

Соотношение между $\overline{OP} = x$ и $\overline{PM} = y$. Из подобия треугольников SAH и HPM имеем $\frac{\overline{PM}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{HA}}$. С другой стороны, $OH \perp AP$ и, значит, OH — высота прямоугольного треугольника AOP, поэтому $\frac{\overline{HP}}{\overline{HA}} = -\frac{OP^2}{OA^2}$, отсюда $\frac{\overline{PM}}{\overline{AS}} = -\frac{OP^2}{OA^2}$; но $OA = \overline{AS} = 1$, значит, $y = -x^2$. Геометрическое место точек M есть парабола $y = -x^2$. Для построения касательной к этой параболе в точке $M_1(1, -1)$ строим точку Q (0, 1). Прямая QM_1 — искомая касательная. 3°. $OH \perp AH$ и $OH \perp AS$; значит, $OH \perp$ пл. SAH и $OH \perp AK$. Итак, $AK \perp SH$ и $AK \perp OH$; значит, $AK \perp$ пл. OHS.

11. 1°. **Четверка точек O, I, m, m'.** Пусть J — точка пересечения MM' с осью Oy. Пучок прямых $O(y, x, M, M')$ — гармонический; следовательно,

$(JIMM')$ — гармоническая четверка точек, а значит $(OImm')$ — также гармоническая четверка. Заметим, что так как $OM' = 2OM$, то $\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{\overline{Im'}}{\overline{Im}} = 2$ (черт. 115).

Четверка точек O, A, A', B. Опишем вокруг треугольника OMM' окружность; она пересечет ось Ox во второй точке B, такой, что B — середина дуги $\overset{\smile}{MM'}$. Пусть ω — центр этой окружности, прямая ωB — медиатриса отрезка MM', треугольник $O\omega B$ — равнобедренный. С другой стороны, медиатрисы отрезков OM и OM' проходят через ω и одинаково наклонены к оси Ox; они пересекают ось Ox в точках A и A'; таким образом, $\triangle A\omega A'$ равнобедренный. Наконец, так как $OM' = 2OM$, то $OA' = 2OA$; следовательно, $OA = AA' = A'B$, т. е. точки A и A' делят отрезок OB на три равные части.

2°. **Построение треугольника (I), если задана:**

а) **прямая MM'.** Пусть I и J — точки пересечения этой прямой с осями Ox и Oy. Так как $JIMM'$ — гармоническая четверка точек и $\frac{\overline{JM'}}{\overline{JM}} = -\frac{\overline{IM'}}{\overline{IM}} = 2$, то $-\frac{\overline{MJ}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{M'J}}{\overline{M'I}} = 3$; значит, точки M и M' делят отрезок JI в отношении 3 и, следовательно, легко могут быть построены.

б) **Дана середина P отрезка MM'.** Тогда известна проекция p точки P на ось Ox, а также известны точки m и m', так как $\overline{Om} = \frac{2}{3}\overline{Op}$ и $\overline{Om'} = \frac{4}{3}\overline{Op}$. Зная m и m', находим I, так как $\overline{Im'} = -2\overline{Im}$. Прямая MM' совпадает с IP, а точки M и M' находим, проводя через m и m' прямые, перпендикулярные оси Ox.

в) **Дан центр ω окружности, описанной вокруг треугольника (T).** В этом случае можно построить окружность, описанную около треугольника OMM' (ее радиус ωO). Эта окружность пересечет ось Ox в точке B. Значит, можно построить точки A и A' $(\overline{OA} = \overline{AA'} = \overline{A'B})$. Прямые ωA и $\omega A'$ — медиатрисы отрезков OM и OM'; следовательно, точки M и M' — это точки пересечения окружности, описанной около искомого треугольника (T), с перпендикулярами, опущенными из O на ωA и $\omega A'$:

3°. **Геометрическое место точек M'** — окружность (C'), полученная из окружности (C) гомотетией $(O, -2)$ [следует сделать чертеж для рассматриваемого случая, т. е. для случая, когда точка M описывает окружность (C), касающуюся оси Ox в точке O]:

Медиатрисы (T) проходят через фиксированные точки. Медиатриса отрезка OM проходит все время через центр C окружности (C), а медиатриса OM' проходит постоянно через центр C' окружности (C'); мы видим, что медиатрисы треугольника (T) пересекают ось Ox в точках A, A' и B таких, что $\overline{OA} = \overline{AA'} = \overline{A'B}$; аналогично — эти медиатрисы пересекают ось Oy в точках C, C' и D таких, что $CO = OD = DC'$. Значит, медиатриса отрезка MM' проходит постоянно через середину D отрезка OC'.

Геометрическое место точек ω. Точка D лежит на окружности, описанной около треугольника (T), так как она диаметрально противоположна точке B (все эти рассуждения относятся к чертежу, который надо было сделать выше к 3°). Таким образом, окружность, описанная вокруг треугольника (T), проходит через фиксированные точки O и D, значит, геометрическое место точек ω есть медиатриса отрезка OD.

4°. **Геометрическое место точек M, M' и P при условии, что окружность, описанная около треугольника (T), проходит через фиксированную точку B оси Ox.** В этом случае точки A и A' фиксированы $(\overline{OA} = \overline{AA'} = \overline{A'B})$, а так как $AM = AO$ и $A'M' = A'O$, то точки M и M' описывают окружности соответственно с центрами A и A', проходящие через O. Пусть M_1 — точка, симметричная точке M относительно оси Ox; точка M_1 лежит на окружности, являющейся геометрическим местом точек M. Обозначим через N середину $M'M_1$; проекция N на Ox совпадает с p — проекцией P на Ox. Заметим, что так как точки M_1 и M' описывают окружность, то точка N описывает окружность, центр γ которой есть середина отрезка AA', и эта окружность проходит через O и B, а так как $\frac{pP}{PN} = \frac{2pP}{mM_1 + m'M'} = \frac{2pP}{3mM_1} = \frac{2}{3}\frac{IP}{IM} = \frac{1}{3}$, то точка P из точки N получается в результате равномерного сжатия к оси Ox с коэффициентом сжатия $\frac{1}{3}$, а потому описывает эллипс с большей осью OB; меньшая полуось перпендикулярна в точке γ к OB и длина ее равна $\frac{1}{3}O\gamma$. **12. Геометрическое место вершин линий (C).** 1°. Пусть H —

ортогональная проекция F на (D). Вершины A и A' линии (C), расположенные на фокальной оси, определяются соотношениями

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = -e, \quad \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'H}} = e,$$

отсюда $\frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} = \frac{e}{1+e}$ и $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FH}} = \frac{e}{e-1}$. Таким образом, A и A' суть образы точки H в гомотетиях $\varkappa\left(F, \frac{e}{1+e}\right)$ и $\varkappa'\left(F, \frac{e}{e-1}\right)$, а так как геометрическое место точек H есть окружность (γ) с диаметром FI, то геометрическое место точек A и A' суть окружности (Γ) и (Γ'), полученные из (γ) при помощи гомотетий $\varkappa$ и $\varkappa'$. Если $0 < e < 1$, то линия (C) — эллипс; в этом случае имеются еще две вершины B и B', не расположенные на фокальной оси. Точки B и B' получаются из точек A и A' в результате подобий G_1 и G_2, которые являются произведением поворота на углы $\pm \arccos(-e)$ вокруг F на гомотетию $\left(F, \frac{1}{1-e}\right)$. Значит, геометрическое место точек B и B' — снова две окружности (Γ_1) и (Γ_2), полученные из (Γ) и (Γ') в результате преобразований подобия $G_1\left(F, \frac{1}{1-e}, \theta\right)$ и $G_2\left(F, \frac{1}{1-e}, -\theta\right)$, где $\theta = \arccos(-e)$.

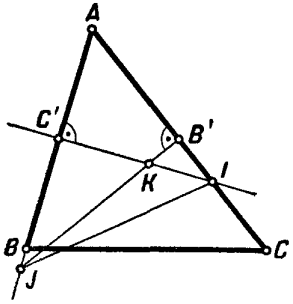
2°. **а) Геометрическое место точек, общих линиям (C_1) и (C_2), директрисы которых взаимно-перпендикулярны.** Пусть M — точка, общая линиям (C_1) и (C_2) с фокусом F, с данным эксцентриситетом, директрисы (D_1) и (D_2) которых взаимно перпендикулярны и обе проходят через фиксированную точку I. Обозначим через m_1 и m_2 проекции точки M на (D_1) и (D_2). Тогда $MF = eMm_1$ и $MF = eMm_2$, откуда $Mm_1 = Mm_2$ и, значит, соответствующий четырехугольник — квадрат. Отсюда $\frac{Mm_1}{MI} = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\frac{MF}{MI} = \frac{e}{\sqrt{2}}$. Отношение расстояний от точки M до F и I постоянно и равно $\frac{e}{\sqrt{2}}$, поэтому геометрическое место точек M есть окружность с диаметром $\mu\mu'$, где μ и μ' делят отрезок FI в отношениях $\frac{e}{\sqrt{2}}$ и $-\frac{e}{\sqrt{2}}$. Если $e = \sqrt{2}$, т. е. линии (C) — равносторонние гиперболы, то $MF = MI$, значит, геометрическое место точек M есть медиатриса отрезка FI.

б) Геометрическое место точек пересечения направляющих окружностей линий (C_1) и (C_2). Центр O линии (C) определяется вектором $\overrightarrow{FO} = \frac{e^2}{e^2-1}\overrightarrow{FH}$, где H — проекция F на соответствующую ему директрису. Центры O_1 и O_2 направляющих окружностей линий (C_1) и (C_2) со взаимно перпендикулярными диаметрами являются, следовательно, концами O_1 и O_2 диаметра O_1O_2 окружности (γ'), являющейся образом окружности (γ) в гомотетии $\left(F, \frac{e^2}{e^2-1}\right)$ [ибо H_1H_2 — диаметр окружности (γ)]. Так как $\overrightarrow{FO_1} + \overrightarrow{FO_2} = 2\overrightarrow{F\omega}$, где ω — центр (γ'), то $2\overrightarrow{F\omega} = \frac{e^2}{e^2-1}(\overrightarrow{FH_1} + \overrightarrow{FH_2}) = \frac{e^2}{e^2-1}\overrightarrow{FI}$; далее, $FO_1^2 + FO_2^2 = 4F\omega^2 = \left(\frac{e^2}{e^2-1}\right)^2 FI^2$. Если M — точка, общая окружностям (C_1) и (C_2), то $MO_1 = \frac{FO_1}{e}$, $MO_2 = \frac{FO_2}{e}$; значит, $MO_1^2 + MO_2^2 = \frac{e^2}{(e^2-1)^2} FI^2$; но, с другой стороны, $MO_1^2 + MO_2^2 = 2M\omega^2 + 2F\omega^2 = 2M\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{e^2-1}\right)^2 FI^2$ (в треугольнике O_1MO_2 отрезок $M\omega$ — медиана), поэтому $M\omega^2 = \frac{1}{4}\frac{e^2(2-e^2)}{(e^2-1)^2} FI^2$. Если $e > \sqrt{2}$, то геометрическое место точек M пусто; если $e = \sqrt{2}$, оно выражается в точку ω, которая в этом случае совпадает с точкой I (так как в этом случае $\overrightarrow{F\omega} = \overrightarrow{FI}$); если $e < \sqrt{2}$, то геометрическое место точек M есть окружность (Γ^*) с центром ω и радиусом $\frac{1}{2}\frac{e\sqrt{2-e^2}}{|e^2-1|}$.

Огибающая общих касательных к линиям (C_1) и (C_2). Если M есть точка, общая направляющим окружностям (O_1) и (O_2), то эта точка является проекцией фокуса F на общие касательные к линиям (C_1) и (C_2) (и обратно). Значит, огибающей общих касательных к линиям (C_1) и (C_2) является линия второго порядка

с фокусом F и направляющей окружностью (Γ^*). Предыдущее исследование показывает, что огибающая существует при условии $e < \sqrt{2}$. Для определения вида огибающей надо сравнить радиус (Γ^*) с расстоянием $F\omega$ фокуса F до центра (Γ^*). Так как $F\omega = \frac{1}{2}\frac{e^2}{|e^2-1|}FI$ и радиус (Γ^*) равен $\frac{1}{2}\frac{e\sqrt{2-e^2}}{|e^2-1|}FI$, то $\frac{F\omega}{R_{(\Gamma^*)}} = \frac{e}{\sqrt{2-e^2}}$.

Если $e < \sqrt{2-e^2}$ или $e < 1$, то F лежит внутри (Γ^*) и огибающая — эллипс; если же $1 < e < \sqrt{2}$, то F лежит вне (Γ^*) и огибающая — гипербола [при $e = \sqrt{2}$ все общие касательные к линиям (C_1) и (C_2) будут проходить через фиксированную точку].

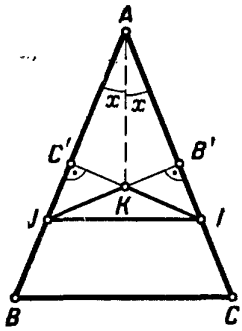


Черт. 116.

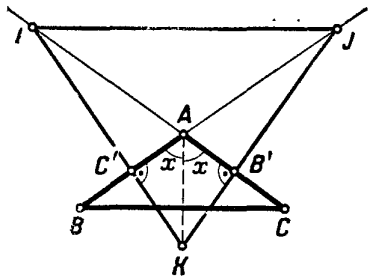
13. 1°. Построение треугольника ABC. Точки I и J суть соответственно точки пересечения прямой AC с медиатрисой отрезка AB и прямой AB с медиатрисой отрезка AC (черт. 116); точка K есть точка пересечения указанных медиатрис. Стороны AB и AC суть две высоты треугольника IJK (опущенные на IK и JK). Это позволяет их построить, если известны точки I, J, K; таким образом, находим A; точки B и C будут точками, симметричными A относительно IK и JK.

2°. **Центр K расположен на AH.** Прямая AH есть радикальная ось окружностей (U) и (V), следовательно, она перпендикулярна прямой IJ, которая соединяет их центры; AK — третья высота треугольника IJK, т. е. $AK \perp IJ$, поэтому AH и AK совпадают, т. е. точка K расположена на прямой AH.

3°. **Площадь треугольника IJK.** Предполагая, что $AB = AC = 2a$, следует рассмотреть два случая: когда $x < \frac{\pi}{4}$ (угол A — острый, черт. 117) и $x > \frac{\pi}{4}$ (угол A — тупой, черт. 118). В обоих случаях пл. $\triangle IJK = y = \frac{1}{2}IK^2 \sin(\pi - 2x) = \frac{1}{2}IK^2 \sin 2x$. Далее, если A — острый угол, то $IK = a(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)$, а если A — тупой угол, то $IK = a(-\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x)$; значит в обоих случаях $y = \frac{a^2}{2}(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)^2 \sin 2x$ и, полагая $\operatorname{tg} x = t$ (t принимает все значения от 0 до $+\infty$), получим $y = a^2\frac{t^3(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$.



Черт. 117.

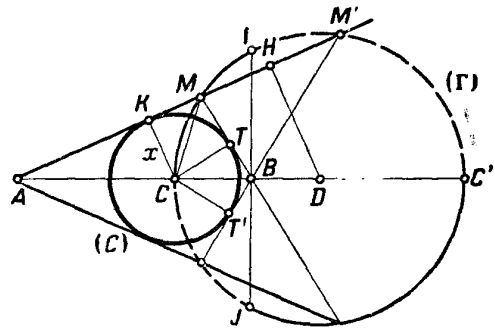


Черт. 118.

Отсюда находим, что при изменении t от 0 до 1, y возрастает от 0 до $+\infty$; при изменении t от 1 до $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$, y убывает от $+\infty$ до $\frac{a^2}{4}\sqrt{(3+2\sqrt{3})^3}$, а при изменении t от $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$ до $+\infty$, y возрастает от $\frac{a^2}{4}\sqrt{(3+2\sqrt{3})^3}$ до $+\infty$.

14. 1°. Геометрическое место точек M. Рассмотрим касательную BT, проведенную из точки B к кругу (C), и две касательные, проведенные из точки A к тому же кругу. Пусть M — точка пересечения касательной BT с одной из двух касательных, проведенных из A. Точка C есть основание биссектрисы внутреннего угла M треугольника AMB. Значит основание C' биссектрисы внешнего угла M того же треугольника гармонически сопряжено с точкой C относительно A и B. Поэтому точка M расположена на окружности (Γ), построенной на CC' как на диаметре. Радиус x окружности (C) может изменяться от 0 до b. Обозначая

через T ту точку прикосновения касательной, проведенной к окружности (C) из точки B, которая расположена над AB, заключаем, что эта касательная BT может занимать всевозможные положения луча, проходящего через точку B и расположенного внутри прямого угла CBI, и точки пересечения касательной BT с окружностью (Γ) [или с касательными, проведенными из A к (C)] опишут соответственно дуги CI и $C'J$ окружности (Γ) (черт. 119). Если точка T расположена под AB (точка T' на чертеже 119), то точки M и M' опишут дуги CJ и $C'I$ той же окружности (Γ). Значит, геометрическое место точек M есть вся окружность (Γ). **Вычисление AD и R.** Так как точки A, B, C, C' образуют гармоническую четверку, то $\frac{1}{\overline{AC'}}+\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{2}{\overline{AB}}$ или $\frac{1}{\overline{AC'}}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a+b}$ (положительное направление выбираем от A к B); следовательно, $\overline{AC'}=\frac{a(a+b)}{a-b}$; отсюда $\overline{AD}=\frac{\overline{AC}+\overline{AC'}}{2}=\frac{a^2}{a-b}$ и $R=\overline{CD}=\overline{CA}+\overline{AD}=\overline{AD}-\overline{AC}=\frac{ab}{a-b}$. Замечание. Так как точка B гармонически сопряжена с точкой A относительно C и C', то прямая IJ — поляра точки A относительно окружности (Γ); точки I и J являются точками прикосновения касательных, проведенных к окружности (Γ) из точки A.



Черт. 119.

2°. Точки M, соответствующие данной окружности (C). Рассматриваемые положения M и M' точки M суть точки пересечения с окружностью (Γ) одной из касательных, проведенной из точки A к окружности (C) (черт. 119). Пусть K и H — ортогональные проекции точек C и D на эту касательную. Имеем: $AM+AM'=2AH$, $AM\cdot AM'=AC\cdot AC'$. Так как $\triangle AHD\sim\triangle AKC$, то $\frac{AH}{AK}=\frac{AD}{AC}$, $AH=\frac{AD}{AC}\cdot AK=\frac{a}{a-b}\sqrt{a^2-x^2}$; с другой стороны, $AC\cdot AC'=\frac{a^2(a+b)}{a-b}$. Таким образом, AM и AM' суть корни уравнения $X^2-\frac{2a}{a-b}\sqrt{a^2-x^2}X+\frac{a^2(a+b)}{a-b}=0$, откуда $X_{1,2}=\frac{a}{a-b}(\sqrt{a^2-x^2}\pm\sqrt{b^2-x^2})$. Точка C служит основанием биссектрис углов AMB и $AM'B$; значит, $MB:MA=M'B:M'A=CB:CA=b:a$, откуда $MB=\frac{b}{a-b}(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2-x^2})$, $M'B=\frac{b}{a-b}(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2})$. Наконец, для вычисления радиусов ρ и ρ' окружностей, описанных около треугольников MAB и $M'AB$, используем соотношения: $\frac{MB}{\sin BAM}=2\rho$ и $\frac{M'B}{\sin BAM'}=2\rho'$, а так как $\sin BAM=\sin BAM'=\frac{x}{a}$, то $\rho=MB\frac{a}{2x}$, $\rho'=M'B\frac{a}{2x}$, т. е.

$$\rho=\frac{ab(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2-x^2})}{2x(a-b)},\quad \rho'=\frac{ab(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2})}{2x(a-b)}.$$

Касательные к окружностям AMB и $AM'B$. Окружность AMB ортогональна окружности (Γ), так как делит гармонически диаметр CC' этой окружности, а потому касательная к ней в точке M есть MD. Аналогично касательная в точке M' к окружности $(AM'B)$ есть $M'D$. Инверсия $(A, \overline{AC}\cdot\overline{AC'})$ точку B преобразует в D, и поскольку окружность (Γ) в этой инверсии инвариантна (переходит в себя), точка M переходит в точку M'. Значит, окружность (AMB) переходит в прямую DM'. Касательной к окружности (AMB) в точке A будет, следовательно, прямая, проходящая через точку A параллельно DM', а так как AB — хорда окружности AMB, то касательная к окружности (AMB) в точке B будет антипараллель по отношению к AB для касательной к окружности (AMB) в точке A. Касательные в точках A и B к окружности $(AM'B)$ строятся аналогично.

3°. Частный случай $x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. В этом случае $\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sqrt{b^2-x^2}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $MA=\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $MB=\frac{b(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $M'A=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a-b}$, $M'B=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a-b}$. Таким образом, $MA^2+MB^2=(a+b)^2=AB^2$, а потому $\triangle AMB$ прямоугольный ($\angle M=90°$); значит, $A+B=\frac{\pi}{2}$ или $B=\frac{\pi}{2}-A$. Далее (черт. 119), $\angle ABM'=\pi-\angle ABT'=\pi-\angle ABT$, а значит, угол B треугольника $AM'B$ равен $B=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\frac{\pi}{2}+A$. Следовательно, для этого треугольника $B-A=\frac{\pi}{2}$. Наконец, для данного значения x, $4\rho^2=MA^2+MB^2$ ($\triangle AMB$ прямоугольный). Подсчитывая $M'A^2+M'B^2$ и ρ'^2, получим $M'A^2+M'B^2=4\rho'^2$.

15. 1°. **Определение M так, что $MP+2MQ=l$.**

а) Имеем $MP=\sqrt{R^2-x^2}$, а потому

$$\sqrt{R^2-x^2}+2x=l, \tag{1}$$

или

$$\sqrt{R^2-x^2}=l-2x. \tag{2}$$

Возводя в квадрат, получим

$$R^2-x^2=(l-2x)^2. \tag{3}$$

Любое решение уравнения (2) удовлетворяет уравнению (3). Обратно: решение уравнения (3) удовлетворяет уравнению (2) тогда и только тогда, когда $x\leqslant\frac{l}{2}$; в таком случае из (3) следует, что $x\leqslant R$. А так как, согласно условию, $x\geqslant 0$, то задача имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение

$$f(x)=5x^2-4lx+l^2-R^2=0, \tag{4}$$

эквивалентное уравнению (3), имеет действительный корень, удовлетворяющий условию $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$. Имеем $f(0)=l^2-R^2$, $f\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{l^2}{4}-R^2$. Отсюда следует, что если $0<l<R$, числа $f(0)$ и $f\left(\frac{l}{2}\right)$ — оба отрицательны, корни уравнения (4) действительны, а числа 0 и $\frac{l}{2}$ заключены между ними: $x'<0<\frac{l}{2}<x''$ — задача не имеет решения. Если $R<l<2R$, то $f(0)>0$, $f\left(\frac{l}{2}\right)<0$, корни уравнения (4) действительны и при этом $0<x'<\frac{l}{2}<x''$. Задача имеет одно решение, соответствующее меньшему корню x' уравнения (4). Если $l>2R$, то надо вычислить дискриминант уравнения (4): $\Delta=4l^2-5(l^2-R^2)=5R^2-l^2$. Значит, если $l>R\sqrt{5}$, то корни уравнения (4) мнимые и задача не имеет решения. Если же $2R<l<R\sqrt{5}$, то корни уравнения действительны и оба заключены между 0 и $\frac{l}{2}$ — задача имеет два решения. Замечание. Для доказательства последнего утверждения $\left(\text{т. е. того, что } x'<0<\frac{l}{2}<x''\right)$ решим следующую общую задачу (полученный сейчас результат может быть применен для решения многих задач, сводящихся к рассматриваемой): определить расположение числа m относительно корней x' и x'' квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$), предполагая, что корни действительны и различны. Решение. Пусть корни x' и x'' трехчлена $f(x)\equiv ax^2+bx+c$ действительны и различны, т. е. $a\neq 0$, $b^2-4ac>0$. а) Возьмем любое число $m<x'<x''$. Тогда

$$af(m)=a(am^2+bm+c)=a^2(m-x')(m-x'')>0,$$

$$2m<x'+x'',\ 2m<-\frac{b}{a},\ a(2am+b)<0;$$

б) пусть m — любое число, такое, что $x'<m<x''$; тогда

$$af(m)=a(am^2+bm+c)=a^2(m-x')(m-x'')<0;$$

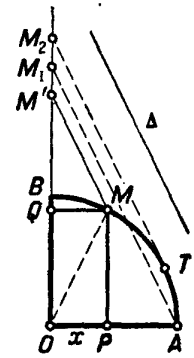
в) пусть наконец m — любое число, такое, что $x'<x''<m$; тогда

$$af(m)=a(am^2+bm+c)>0,\quad a(2am+b)>0.$$

Итак:

если $m < x' < x''$, то $a(am^2 + bm + c) > 0$, $a(2am + b) < 0$;
если $x' < m < x''$, то $a(am^2 + bm + c) < 0$;
если $x' < x'' < m$, то $a(am^2 + bm + c) > 0$, $a(2am + b) > 0$.

Методом от противного доказываем, что полученные признаки расположения действительного числа m относительно действительных корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ не только необходимы, но и достаточны. Возвращаясь к случаю $2R < l < R\sqrt{5}$ данной задачи, заметим прежде всего, что в силу $2R < l < R\sqrt{5}$ мы будем иметь: $\Delta > 0$, т. е. корни уравнения (4) будут действительны и различны. Далее, так как коэффициент при x^2 в уравнении (4) положителен, то вместо выражений $a(am^2 + bm + c)$ и $a(2am + b)$ в приведенных выше неравенствах можно рассматривать $am^2 + bm + c$ и $2am + b$. Полагая $m = 0$, в силу установленных достаточных признаков находим $(5x^2 - 4lx + l^2 - R)^2_{x=0} = l^2 - R^2 > 0$, $(10x - 4l)_{x=0} = -4l < 0$, значит $0 < x' < x''$ и далее: $(5x^2 - 4lx + l^2 - R^2)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l^2}{4} - R^2 > 0$, $(10x - 4l)_{x=\frac{l}{2}} = 5l - 4l = l > 0$; значит $x' < x'' < \frac{l}{2}$. Итак, в случае $2R < l < R\sqrt{5}$, мы имеем $0 < x' < x'' < \frac{l}{2}$, т. е. задача имеет два решения. Окончательно: если $R < l < 2R$ — задача имеет одно решение, а если $2R < l < R\sqrt{5}$ — задача имеет два решения. При $l = R$ задача имеет одно решение ($x = 0$); при $l = 2R$ задача имеет два решения $\left(x = R \text{ и } x = \frac{3}{5}R\right)$; при $l = R\sqrt{5}$ задача имеет одно решение $\left(x = \frac{2R}{\sqrt{5}}\right)$.



Черт. 120.

б) **Геометрическое построение M.** Отложим на луче OB отрезок $QM' = 2QM$. Тогда $OM' = l$ и направление MM' фиксировано, так как тангенс угла M' равен $\frac{1}{2}$. Пусть (Δ) прямая, имеющая это направление. Задача сводится, таким образом, к отысканию точек пересечения четверти окружности AOB с прямой, параллельной (Δ) и проходящей через M', причем $OM' = l$. Пусть M_1 — точка такая, что $OM_1 = 2OA = 2R$, и M_2 — точка луча OB, соответствующая касательной к четверти окружности, параллельная прямой (Δ). Если T — точка прикосновения, то $M_2T = 2OT = 2R$, значит, $OM_2^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2$, $OM_2 = R\sqrt{5}$. Теперь ясно, что если $l > R\sqrt{5}$, то точка M' лежит выше M_2 и прямая, проходящая через точку M' параллельно (Δ), не пересекает четверти окружности, задача не имеет решения. Если $2R < l < R\sqrt{5}$, то точка M' лежит между точками M_1 и M_2 и прямая, проходящая через точку M' параллельно (Δ), пересекает четверть окружности в двух точках — задача имеет два решения. Если $R < l < 2R$, то точка M' лежит между B и M_1 и прямая, проходящая через точку M' параллельно (Δ), пересекает дугу AOB четверти окружности в одной точке — задача имеет одно решение. Наконец, если $l = R\sqrt{5}$, или $l = 2R$, или $l = R$, т. е. точка M' совпадает соответственно с точками M_2, M_1 и B, то задача имеет соответственно одно решение, два решения, одно решение (черт. 120).

2°. а) **Определение точки M таким образом, что площади двух сегментов, описанных дугами $\overset{\frown}{MA}$ и $\overset{\frown}{MB}$, находятся в данном отношении m.** Площади двух указанных сегментов суть $2\pi R \cdot AP$ и $2\pi R \cdot BQ$; полагая $\angle AOM = \theta$, находим:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{R(1 - \cos\theta)}{R(1 - \sin\theta)} + \frac{1 - \cos\theta}{1 - \sin\theta} = m.$$

Полагая $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, получим $m = \frac{2t^2}{(t-1)^2}$, откуда

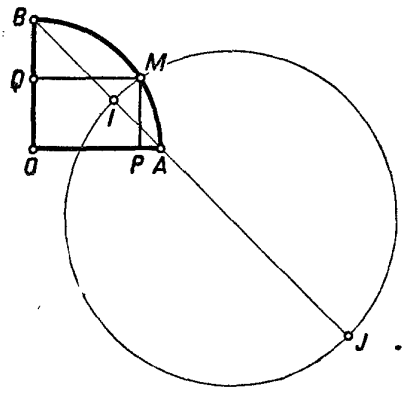
$$\varphi(t) \equiv (m-2)t^2 - 2mt + m = 0. \qquad (5)$$

Так как $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *), то $0 < t < 1$ и обратно; поэтому задача разрешима, если уравнение (5) имеет действительные корни, заключенные между 0 и 1. Заметим,

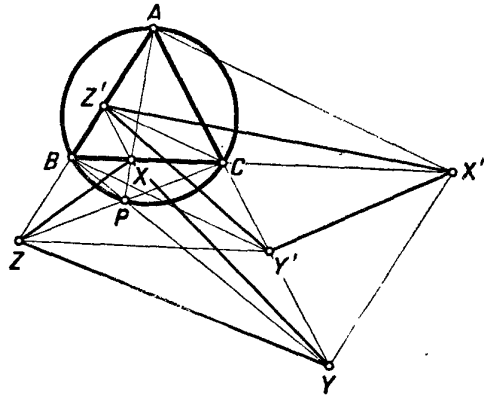
*) Случаи $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ исключаем ($m \neq 0$ и $m \neq \infty$).

что $\varphi(0)=m$, $\varphi(1)=-2$. Отсюда следует, что если $0<m<2$, то $\varphi(0)>0$, $\varphi(1)<0$ и коэффициент при t^2 меньше нуля. Значит корни уравнения (5) действительны, причем 0 заключен между ними, а 1 — вне корней: $t'<0<t''<1$ — задача имеет одно решение, соответствующее большому корню t'' уравнения (5). Если $m>2$, то $\varphi(0)>0$, $\varphi(1)<0$ и коэффициент при t^2 в уравнении (5) больше 0, значит, уравнение (5) имеет два действительных корня, причем 1 заключена между ними, а 0 — вне интервала корней: $0<t'<1<t''$; задача имеет одно решение, соответствующее меньшему корню t' уравнения (5). Если, наконец, $m=2$, то (5) — уравнение первой степени; оно в этом случае имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Итак, задача всегда имеет решение и притом только одно.

б) **Геометрическое решение.** Условие $\frac{AP}{BQ}=m$ можно записать в виде $\frac{2R\cdot AP}{2R\cdot BQ}=m$, или $\frac{MA^2}{MB^2}=m$, или $\frac{MA}{MB}=\sqrt{m}$; таким образом, вопрос сводится к отысканию точки M четверти окружности, для которой $MA:MB=\sqrt{m}$. Это соотношение показывает, что точка M лежит на окружности, являющейся геометрическим местом точек M таких, что $MA:MB=\sqrt{m}$. Если I и J — точки хорды AB такие, что $\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}}=-\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}=\sqrt{m}$, то IJ — диаметр этой окружности. Эта окружность (каково бы ни было m) пересекает дугу $\overset{\frown}{AB}$ четверти данной окружности всегда в одной точке, т. е. задача имеет решение и притом только одно (если $m=1$, то $MA=MB$ и точка M есть



Черт. 121.



Черт. 122.

точка пересечения медиатрисы отрезка AB с данной четвертью окружности) (черт. 121). 16. 1°. **Соотношение** $\left(1-\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\right)\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=1$. Выражая двумя способами степень точки X относительно окружности (C), будем иметь (черт. 122): $\overline{XB}\cdot\overline{XC}=\overline{XA}\cdot\overline{XP}$. Проведем окружность с центром A и радиусом AB, проходящую через B и C; степень точки X по отношению к этой окружности $\overline{XB}\cdot\overline{XC}=\overline{XA}^2-\overline{BC}^2$, откуда $\overline{XA}\cdot\overline{XP}=\overline{XA}^2-\overline{BC}^2$; следовательно, $\overline{XP}=\overline{XA}-\frac{\overline{BC}^2}{\overline{XA}}$ и $\overline{PA}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{XA}}$. Применяя теорему Менелая к треугольнику ACX и трансверсали BPY, получим $\frac{\overline{PA}}{\overline{PX}}\cdot\frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=1$. Из предыдущего следует $\frac{\overline{PA}}{\overline{PX}}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{PX}\cdot\overline{XA}}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BX}\cdot\overline{XC}}$; значит $\frac{\overline{BC}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=1$, откуда

$$\left(1-\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\right)\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=1. \qquad (1)$$

2°. **Параллельность AX', BY' и CZ'.** Круговой перестановкой букв из (1) получаем

$$\left(1-\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\right)\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1, \tag{2}$$

$$\left(1-\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\right)\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=1. \tag{3}$$

Так как $YX' \parallel AB$, то учитывая (1), имеем

$$\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'B}}=\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{\overline{XC}}{\overline{BC}}. \tag{4}$$

Аналогично: $ZY' \parallel BC$ и, учитывая (3), имеем

$$\frac{\overline{Y'C}}{\overline{Y'A}}=\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}}=\frac{\overline{XB}}{\overline{CB}} \text{ и } \frac{\overline{AC}}{\overline{AY'}}=\frac{\overline{XC}}{\overline{BC}}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $AX' \parallel BY'$. Далее $XZ' \parallel AC$; значит,

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CX}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{XC}}{\overline{BC}}. \tag{6}$$

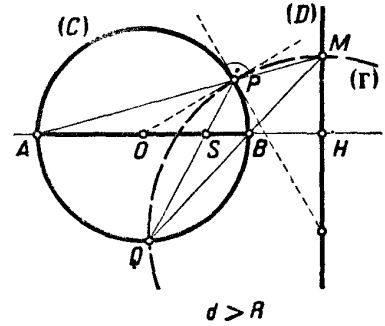
Из (5) и (6) следует, что $BY' \parallel CZ'$. Итак, $AX' \parallel BY' \parallel CZ'$.

3°. **Площади треугольников XYZ и $X'Y'Z'$.** Пусть s — площадь треугольника ABC. Положим $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\lambda$, $\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\mu$, $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\nu$. Тогда пл. $\triangle XYZ = s\frac{1-\lambda\mu\nu}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)}$, но X, Y, Z — точки пересечения AP, BP и CP с противоположными сторонами, поэтому на основании теоремы Чевы $\lambda\mu\nu=-1$. С другой стороны, соотношения (1), (2), (3) принимают такой вид: $(1-\lambda)\mu=1$, $(1-\mu)\nu=1$, $(1-\nu)\lambda=1$; значит, $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)=-$; таким образом, пл. $\triangle XYZ=-2s$; отсюда следует, что треугольники ABC и XYZ имеют противоположную ориентацию. Выше мы имели: $\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'B}}=\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\mu$; значит, $\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}}=\frac{1}{\mu}$, $\frac{\overline{Y'C}}{\overline{Y'A}}=\frac{1}{\nu}$, $\frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'B}}=\frac{1}{\lambda}$. Следовательно,

$$\text{пл.}\triangle X'Y'Z'=s\frac{1-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\nu}}{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}=$$

$$=s\frac{\lambda\mu\nu-1}{(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)}=-2s.$$

Итак, площади треугольников XYZ и $X'Y'Z'$ равны между собой, а сами эти треугольники имеют одинаковую ориентацию.

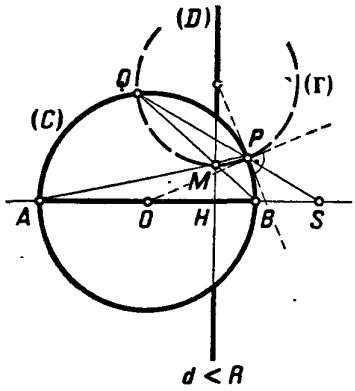


Черт. 123.

17. 1°. Изучение окружностей (Γ). Пусть p — степень точки M по отношению к (C) (черт. 123). В инверсии (M, p) окружность (C) инвариантна, точки P и Q — образы точек A и B и, значит, окружность (Γ) инвертируется в прямую AB. Эта прямая ортогональна (C), значит, (C) и (Γ) также ортогональны. Окружность (Γ), инвертирующаяся из прямой AB, в инверсии с полюсом M имеет центр ω, расположенный на перпендикуляре, опущенном из M на AB, т. е. на (D). Точка ω лежит всегда вне окружности (C), так как это центр окружности, ортогональной (C). Для того чтобы показать, что точка ω может занимать на (D) все положения, внешние по отношению к (C), возьмем на прямой (D) какую-нибудь точку ω_1, внешнюю по отношению к (C). Существует окружность (Γ_1), имеющая центром эту точку и ортогональная (C); пусть M_1 — одна из точек, в которых окружность (Γ_1) пересекает (D). Построим окружность (Γ), соответствующую выбранной точке M_1; эта окружность (Γ) будет проходить через точку M_1 и будет ортогональна (C). Существует бесконечное множество окружностей, проходящих через M_1 и ортогональных (C), но среди них только одна имеет центр на прямой (D); значит, (Γ) и (Γ_1) совпадают и центр ω окружности (Γ) есть ω_1. Геометрическое

место точек ω есть для случая, изображенного на черт. 123 ($d > R$), — прямая в целом, а для случая, изображенного на черт. 124 ($d < R$), — часть прямой, внешняя по отношению к (C).

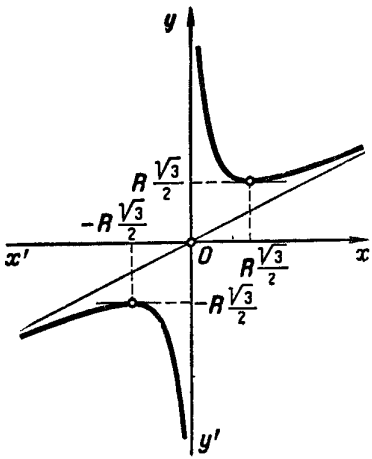
2°. **Свойства прямой PQ.** Так как окружности (C) и (Γ) ортогональны, их точки пересечения P и Q суть точки прикосновения касательных, проведенных из центра ω окружности (Γ) к (C); прямая PQ есть, следовательно, поляра точки ω по отношению к (C). Точка ω постоянно расположена на (D), а значит поляра PQ проходит постоянно через полюс S прямой (D) по отношению к (C).



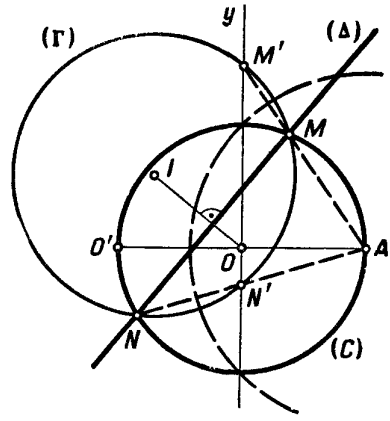
Черт. 124.

Геометрическое место второй точки N, общей (Γ) и окружности (MAB). В инверсии с полюсом S, которая оставляет окружность (C) инвариантной, окружность (Γ) и окружность, описанная вокруг треугольника MAB, также инвариантны; точки M и N, общие для этих окружностей, соответствуют друг другу в этой инверсии. Точка M описывает прямую (D) (в целом). Точка N описывает, следовательно, в целом линию, полученную инверсией (D). Это есть окружность, проходящая через S и имеющая центр на SH. Из того, что точки A, B, H, S образуют гармоническую четверку, следует, что образ точки H в инверсии гармонически сопряжен с бесконечно удаленной точкой относительно инвертированных точек A, B, т. е. относительно B и A; значит, точка H инвертируется в середину O отрезка AB. Окружность, являющаяся геометрическим местом точек N, есть окружность, построенная на OS как на диаметре.

3°. **Соотношение между x, y, R и d.** Окружность (Γ) ортогональна (C). Обозначая через ρ радиус окружности (Γ), будем иметь: $O\omega^2 = R^2 + \rho^2$, т. е.



Черт. 125.



Черт. 126.

$\overline{OH}^2 + \overline{H\omega}^2 = R^2 + \omega M^2 = R^2 + (\overline{HM} - \overline{H\omega})^2$, или $d^2 + y^2 = R^2 + (x - y)^2$, или $2xy = x^2 + R^2 - d^2$. При $d = \frac{R}{2}$ будем иметь

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3R^2}{8x}; \qquad (z)$$

y возрастает в полуинтервалах $\left(-\infty, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right]$ и $\left[\frac{R\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$; y убывает в полуинтервалах $\left[-\frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right]$; при $x = -\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $y_{\max} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}$; при $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $y_{\min} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. В интервале $(-\infty, 0)$ функция выпукла вверх, а в интервале $(0, +\infty)$ — вниз. График функции изображен на чертеже 125. Замеча-

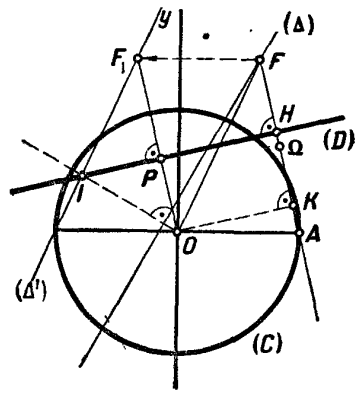
чание. Для $d=\frac{R}{2}$ прямая (D) пересекает окружность (C) в двух точках, расположенных на расстоянии $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ от точки H. Из чертежа 125 или из соотношения (α) следует, что если точка M описывает прямую (D) в целом, то точка ω (всегда расположенная с той же стороны, что и M по отношению H) проходит два раза через каждую точку (D), внешнюю по отношению к (C).

18. 1°. Изучение окружности (Γ). Точки M и M' с одной стороны, а также N и N' с другой соответствуют друг другу в инверсии с полюсом A, которая окружность (C) преобразует в прямую Oy (черт. 126). Имеем

$$\overline{AM}\cdot\overline{AM'}=\overline{AN}\cdot\overline{AN'}; \qquad (1)$$

отсюда следует, что эти четыре точки лежат на одной окружности (Γ). Обе части равенства (1) равны: $\overline{AO}\cdot\overline{AO'}=2R^2=(R\sqrt{2})^2$. Если мы теперь рассмотрим окружность $(A, R\sqrt{2})$, то степень центра этой окружности по отношению к окружности (Γ) равна квадрату радиуса; значит, эта окружность ортогональна (Γ).

2°. Радикальная ось (Γ_1) и (Γ_2). Если (Γ_1) и (Γ_2) — две окружности, соответствующие двум положениям (Δ_1) и (Δ_2) прямой (Δ), то точка A, имея одну и ту же степень по отношению к этим окружностям, лежит на их радикальной оси. С другой стороны, (Δ_1) и (Δ_2) — радикальные оси окружностей (Γ_1) и (Γ_2), взятых по одной с окружностью (C). Значит, точка S пересечения прямых (Δ_1) и (Δ_2) лежит так же, как и A, на радикальной оси окружностей (Γ_1) и (Γ_2); радикальная ось (Γ_1) и (Γ_2) есть, следовательно, AS.



Черт. 127.

3°. Значение IA^2-IB^2. Пусть I и ρ — центр и радиус окружности (Γ). Так как окружность (Γ) ортогональна окружности $(A, R\sqrt{2})$, то $IA^2=\rho^2+(R\sqrt{2})^2=\rho^2+2R^2$. Так как точка B расположена на радикальной оси (Γ) и (C), то $IB^2-\rho^2=OB^2-R^2$ или $IB^2=\rho^2+OB^2-R^2$. Вычитая почленно полученные равенства, будем иметь $IA^2-IB^2=3R^2-OB^2$. Если (Δ) меняется, но проходит все время через точку F, то, применяя полученное соотношение для точки F, будем иметь $IA^2-IF^2=3R^2-OF^2=\text{const}$. Точка I принадлежит геометрическому месту точек, разность квадратов расстояний от каждой из которых до двух точек A и F равна $3R^2-OF^2$; это прямая (D), перпендикулярная AF; ее пересечение с AF есть точка H, определяемая следующим соотношением, в котором Ω — середина AF, $2\overline{AF}\cdot\overline{\Omega H}=3R^2-OF^2$, откуда (черт. 127)

$$\overline{\Omega H}=\frac{3R^2-OF^2}{2\overline{AF}}. \qquad (1)$$

То, что точка I остается на фиксированной прямой, можно получить из того, что если F — общая точка прямых (Δ_1) и (Δ_2), прямая AF есть радикальная ось соответствующих окружностей (Γ_1) и (Γ_2). В самом деле, прямая I_1I_2 центров этих окружностей, на основании сказанного, перпендикулярна AF; если, следовательно, (Δ_1) фиксирована, а (Δ_2) изменяется, но постоянно проходит через F, точка I_2 лежит на прямой, проходящей через I_1 перпендикулярно AF.

Свойства прямой (D). Пусть (черт. 127) P и K — проекции точки O на прямые (D) и AF. Тогда $OA^2-OF^2=2\overline{AF}\cdot\overline{\Omega K}$, откуда $\overline{\Omega K}=\frac{OA^2-OF^2}{2\overline{AF}}$. Отсюда, используя формулу (1), находим

$$\overline{KH}=\overline{\Omega H}-\overline{\Omega K}=\frac{3R^2-OF^2-OA^2+OF^2}{2\overline{AF}}=\frac{3R^2-R^2}{2\overline{AF}}=\frac{R^2}{\overline{AF}},$$

значит

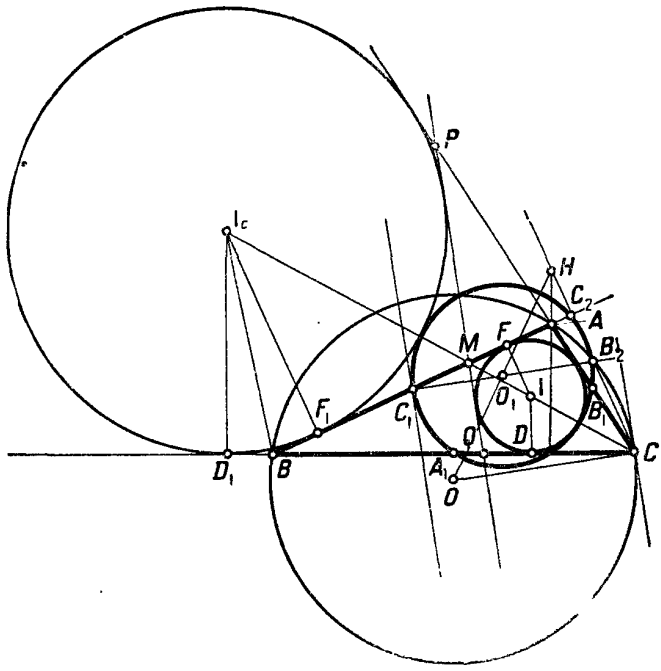
$$\overline{KH}\cdot\overline{AF}=R^2. \qquad (2)$$

Пусть F_1 — точка, полученная из F переносом, при котором A переходит в O. Точки O, P, F_1 расположены на одной прямой и, значит, $\overline{OP}=\overline{KH}$ и $\overline{OF_1}=\overline{AF}$,

Отсюда и из (2) находим $\overline{OP}\cdot\overline{OF_1}=R^2$; значит, точка P есть основание поляры точки F_1 по отношению к окружности (C). Эта поляра есть, следовательно, прямая (D).

4°. (Δ') — **поляра** I. Так как поляра точки F_1 относительно окружности (C) проходит через I, то поляра точки I проходит через F_1. Эта поляра есть, следовательно, перпендикуляр, опущенный из F_1 на IO. Так как $IO\perp(\Delta)$, то этот перпендикуляр параллелен (Δ) — он получается из (Δ) в результате переноса, переводящего F в F_1 (или A в O).

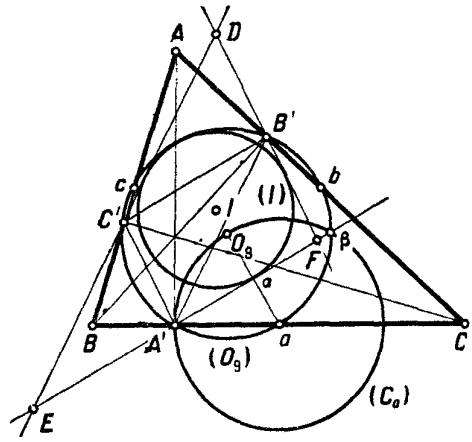
19. Пусть ABC — данный треугольник; A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB; I и I_c — центры вписанной и вневписанной окружностей, лежащие на биссектрисе угла C; F и F_1 — точки касания этих окружностей со



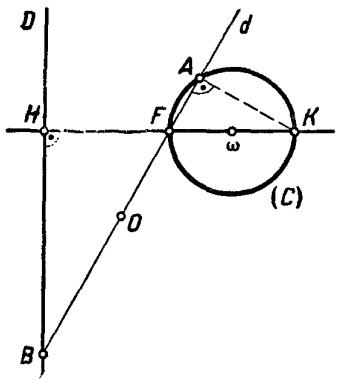
Черт 128.

стороной AB; D и D_1 — точки их касания со стороной BC; CC_2 — высота треугольника, M — точка пересечения линии центров II_c окружностей (I) и (I_c) со стороной AB (черт. 128). Так как $C_1F=C_1F_1$, то точка C_1 имеет одну и ту же степень σ относительно окружностей (I) и (I_c). Так как прямые BI и I_cB служат биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника BCM, то точки I и I_c делят гармонически отрезок MC_2. Поэтому $C_1F^2=C_1F_1^2=\overline{C_1M}\cdot\overline{C_1C_2}$. Из этого равенства следует, что точка C_2 преобразуется инверсией $(C_1,\ C_1F^2)$ в точку M, а значит окружность Эйлера треугольника ABC — в прямую PQ, проходящую через точку M параллельно касательной к этой окружности в точке C_1. Докажем теперь, что эта касательная параллельна касательной к описанной окружности (ABC) в точке C. В самом деле, середина O отрезка OH есть центр окружности Эйлера, поэтому $O_1B_2\parallel OC$, а касательная к описанной окружности (ABC) в точке C перпендикулярна OB_2 и, значит, O_1C_1, так как B_2 и C_1 — диаметрально противоположные точки окружности Эйлера. Из того, что касательная l к окружности Эйлера (треугольника ABC) в точке C_1 параллельна касательной к окружности (ABC) в точке C, следует, что прямая l образует с BC угол, равный углу A треугольника ABC. Итак, окружность (O_9) Эйлера треугольника ABC преобразуется инверсией $(C_1,\ C_1F^2)$ в прямую PQ, проходящую через точку M и образующую со стороной BC угол MQC, равный углу A данного треугольника; иначе говоря, прямые AMB и PMQ образуют с прямой II_c равные углы. Так как AB есть общая внутренняя касательная окружностей (I) и (I_c), то PMQ — их вторая общая внутренняя касательная. Из сохранения касания при инверсии заключаем, что (O_9) — образ PQ в инверсии $(C_1,\ C_1F^2)$ будет касаться окружностей (I) и (I_c), инвариантных в этой инверсии. Аналогично доказывается, что (O_9) касается вне-

вписанных окружностей (I_a) и (I_b). 20. Пусть AA', BB', CC' — высоты треугольника (черт. 129). Окружность (O_9) Эйлера проходит через основания A', B', C' этих высот и через середины a, b, c сторон BC, CA и AB. Обозначим через (C_a), (C_b), (C_c) окружности с центрами a, b, c и радиусами aA', bB', cC'. Радикальная ось (O_9) и (C_a) есть перпендикуляр, опущенный из точки A' на O_9a; эта ось, следовательно, параллельна $B'C'$ *. Следовательно, радикальные оси окружности (O_9), взятой последовательно с окружностями (C_a), (C_b), (C_c), образуют треугольник DEF, который мы получим проводя через A', B' и C' — прямые, параллельные противоположным сторонам $B'C', C'A'$ и $A'B'$. Так как A', B', C' — середины сторон треугольника DEF, то треугольники ABC и DEF имеют одну и ту же окружность Эйлера. Точка D расположена на радикальной оси (O_9) и (C_b) с одной стороны и на радикальной оси (O_9) и (C_c) с другой; значит, точка D лежит на радикальной оси окружностей (C_b) и (C_c); эта последняя есть перпендикуляр к bc, проведенный через D; следовательно, она параллельна AA', потому является биссектрисой угла D треугольника DEF. Таким образом, устанавливаем, что радикальные оси окружностей (C_a), (C_b) и (C_c), взятых попарно, суть биссектрисы углов треугольника DEF и их радикальный центр есть центр окружности, вписанной или вневписанной в треугольник DEF. Пусть I — этот радикальный центр и (I) — соответствующая вписанная или вневписанная окружность. На основании теоремы Фейербаха **, она касается (O_9). Обозначим через α точку прикосновения EF с радикальной осью (O_9) и (C_a), которые она пересекает в точках A' и β. Произведем инверсию $(\alpha, \alpha A', \alpha\beta)$; окружности (O_9) и (C_a) при этой инверсии инвариантны; (I) преобразуется в прямую, касательную к (O_9) и перпендикулярную O_9a — это касательная к (O_9) в точке a; так как эта касательная есть диаметр (C_a), то она ортогональна (C_a) и потому окружность (I) ортогональна (C_a). Окружность (I), следовательно, ортогональна окружностям (C_a), (C_b), (C_c), а ранее было указано, что она касается (O_9).



Черт 129.



Черт. 130.

21. 1°. **Преобразование (C) в (D).** Из подобия треугольников FAK и FHB находим $\frac{FA}{FH} = \frac{FK}{FB}$ (черт. 130), откуда $FA \cdot FB = FH \cdot FK$ или $\overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FH} \cdot \overline{FK} = -\overline{FH}^2 = \text{const}$. Окружность (C) и прямая (D) соответствуют друг другу в инверсии с полюсом F и степенью инверсии, равной $\overline{FH} \cdot \overline{FK}$. В этой инверсии точки A и B друг другу соответствуют, а середине O отрезка AB (гармонически сопряженной бесконечно удаленной точке AB относительно A и B) соответствует точка M, гармонически сопряженная точке F относительно A и B (построение точки M дано ниже).

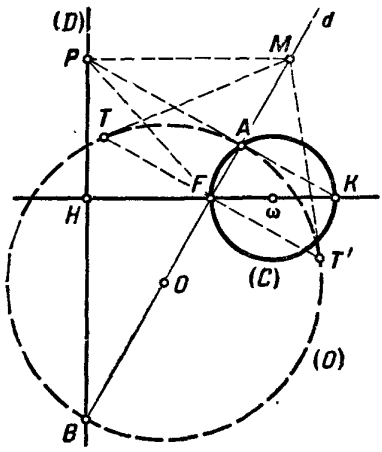
2°. **Эллипс (E) с фокусом F и большей полуосью AB.** Пусть a и b — длины полуосей эллипса. Тогда $FA = a - c$, $FB = a + c$, откуда $FA \cdot FB = a^2 - c^2 = b^2 = FH^2$, значит $b = FH = \text{const}$. Если прямая (d) совпадает с HFK, то эллипс является окружностью. Пусть теперь задана величина $2a = h$, тогда $FA \cdot FB = FH^2$, $FA + FB = h$, отсюда FA и FB — корни уравнения $x^2 - hx + FH^2 = 0$, $x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \pm \sqrt{\frac{h^2 - 4FH^2}{4}}$. Значит, задача разрешима, если $FH \leqslant \frac{h}{2}$ или $h \geqslant 2FH$. Зная

* Очевидно, $O_9a \parallel OA$. Далее, точки B, C, B', C' лежат на одной окружности. Инверсия $(A, \overline{AB} \cdot \overline{AC'})$ переводит B' и C' соответственно в C и B и, значит, прямую $B'C'$ — в окружность (ABC); поэтому $B'C' \perp OA$. Но $O_9a \parallel OA$; значит, $B'C' \perp O_9a$.

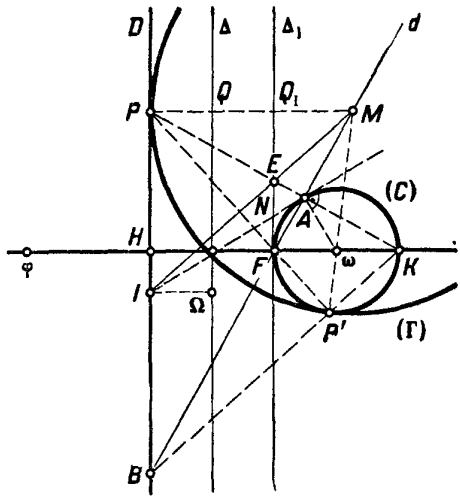
** См. предыдущую задачу.

x_1 и x_2, легко построить точки B и A (FB — больший корень, FA — меньший). Задача имеет два решения, так как на прямой (D) имеется два положения B_1 и B_2 для точки B (симметричные относительно H), для которых $FB_1 = FB_2$. Пусть теперь задан эксцентриситет $\frac{c}{a} = e$; тогда $a = \frac{FH}{\sqrt{1-e^2}}$, и так как $0 \leqslant e < 1$, то $2a \geqslant 2FH$ и, на основании предыдущего, задача всегда разрешима: в данном семействе имеются эллипсы с любым эксцентриситетом ($0 \leqslant e < 1$).

3°. **Геометрическое место (L) точек M.** Рассмотрим пучок с вершиной P и лучи PB, PA, PM, PF (черт. 131). Параллель HK прямой PM пересекает три других луча в точках, ограничивающих два равных отрезка; значит, эти четыре луча образуют гармоническую четверку и, значит, $(BAMF) = -1$ (точка M — это, следовательно, та, которая в рассмотренной выше инверсии соответствует середине O отрезка AB). Отсюда также следует, что F — основание поляры TT' точки M относительно окружности (O), построенной на AB как на диаметре.



Черт. 131.



Черт. 132.

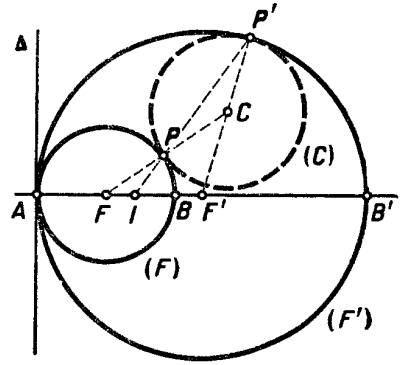
Рассмотрим еще окружность с центром M и радиусом MT; она проходит через P в самом деле, $MP^2 = MA \cdot MB$ и, значит, $MP^2 = MT^2$. Прямая TT' есть радикальная ось окружностей (O) и окружности (Γ) с центром M и радиусом MP. Точка F, расположенная на этой радикальной оси, имеет одну и ту же степень по отношению к этим двум окружностям. Вернемся к инверсии, рассмотренной в пункте 1°. Степень инверсии $p = \overline{FH} \cdot \overline{FK}$ равна степени точки F по отношению к окружности (O) и, значит, эту же степень точка F имеет и по отношению к окружности (Γ), которая, следовательно, инвариантна в этой инверсии. Окружность (Γ) касается прямой (D); значит, она касается и окружности (C), которая из (D) получается указанной инверсией. Касание внутреннее, так как степень точки F по отношению к (Γ) отрицательна. Пусть P' — точка касания (черт. 132); она расположена на прямой центров $M\omega$. Заметим, что $MP' = MP$; обозначим через Q точку отрезка PM, расположенную от P на расстоянии, равном радиусу окружности (C); тогда $M\omega = MQ$, где MQ — расстояние от точки M до медиатрисы отрезка FH. Отсюда следует, что точка M расположена на параболе (L) с фокусом ω и директрисой (Δ). Так как точка P описывает (D) в целом, точка Q описывает (Δ) в целом, а потому точка M описывает параболу (L) в целом.

Свойство касательной к параболе в точке M и касательной к окружности в точке A. Касательной к параболе в ее вершине является касательная (Δ_1) к окружности (C) в точке F; точка E, в которой касательная к параболе (L) в точке M пересекает прямую (Δ_1), есть середина отрезка FQ_1 (черт. 132). Производя гомотетию с центром M, заключаем, что точка I, где касательная пересекает (D), есть середина BP. Пусть, с другой стороны, N — точка, в которой касательная к окружности (C) в точке A пересекает (Δ_1); тогда $NF = NA = NE$ $\left(\text{ибо } \angle EAF = \frac{\pi}{2}\right)$. Точка N, следовательно, — середина FE. Производя гомотетию с центром A, заключаем, что касательная к окружности (C) в точке A пересекает прямую (D) также в середине отрезка BP. Итак, касательная к параболе (L) в точке M и касательная к окружности (C) в точке A пересекаются на прямой (D).

4°. **Геометрическое место центров окружностей (*KPB*).** Точка F пересечения высот KH и BA треугольника KPB является его ортоцентром. Окружность (KPB) проходит, следовательно, через точку φ, симметричную F относительно (D). Итак, эта окружность проходит через две фиксированные точки: K и φ. Её центр, следовательно, расположен на медиатрисе отрезка $K\varphi$, т. е. на прямой (Δ). Этот центр Ω есть точка пересечения (Δ) с перпендикуляром в точке I к (D). Так как точка I [пересечения (D) с касательной к окружности (C) в точке A] описывает (D) в целом, то точка Ω описывает (Δ) в целом.

22. Предварительное замечание. Если на окружности (F) задана какая-нибудь точка P, отличная от A, то всегда существует окружность, касающаяся (F) в этой точке и окружности (F'). В самом деле, произведем инверсию с полюсом A; окружности (F) и (F') преобразуются в параллельные прямые (F_1) и (F'_1), а точка P преобразуется в точку P_1, расположенную на (F_1); существует и притом только одна окружность, касающаяся (F_1) в точке P_1 и касающаяся (F'_1); значит, производя ту же инверсию, заключаем, что существует и притом только одна окружность, касающаяся (F) в точке P и касающаяся (F').

1°. **Геометрическое место точек C.** Если P и P' — точки прикосновения (C) с (F) и (F') — различны, то (черт. 133) $CF + CF' = FP + PC + F'P' - CP' = FP + F'P' = m + m'$, значит, точка C расположена на эллипсе (E) с фокусами F и F', большая ось которого $m + m'$ (этот эллипс проходит через точку A, которая является его вершиной). Точка C есть точка пересечения этого эллипса с полупрямой, проходящей через F и проходящей через P. Так как точка P (см. предварительное замечание) может описывать всю окружность (F), то точка C описывает эллипс (E) в целом. Далее, существует бесконечное множество окружностей, касающихся (F) и (F') в точке A; их центры заполняют прямую AFF' целиком.



Черт. 133.

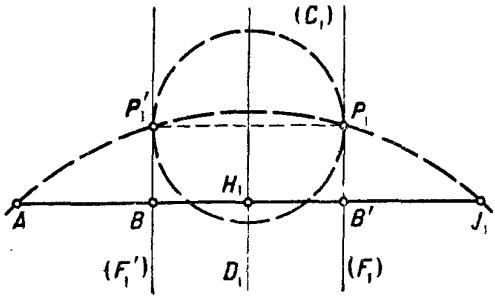
2°. **Свойство прямых *PP'*.** Точка P есть центр отрицательной гомотетии окружностей (F) и (C), а точка P' — центр положительной гомотетии окружностей (F') и (C). На основании свойства центров гомотетий трех окружностей, взятых попарно, заключаем, что точка I, в которой прямая PP' пересекает линию центров окружностей (F) и (F'), есть центр отрицательной гомотетии этих последних; точка I, следовательно, фиксирована; точки I и A, как центры гомотетий окружностей (F) и (F'), гармонически сопряжены относительно F и F'. Следовательно, $\frac{2}{\overline{AI}} = \frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{AF'}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = \frac{m+m'}{mm'}$, откуда $\overline{AI} = \frac{2mm'}{m+m'}$.

3°. **Построение точек, общих эллипсу (E) и произвольной прямой, проходящей через F.** Пусть дана какая-нибудь прямая, проходящая через F (но не проходящая через A). Точки встречи этой прямой с эллипсом суть центры окружностей (C), которые касаются (F) в точке пересечения (F) с заданной прямой. Пусть P — одна из этих точек. Соединим P с I, продолжим IP до пересечения в точке P' с (F'). Точка C, в которой пересекаются FP и $F'P'$, есть одна из точек, в которых данная прямая пересекает эллипс (E). Другая точка строится аналогично. Для прямой, проходящей через F', построение также аналогично: сначала находится точка P', затем P.

4°. **Касательные к (C) в точках P и P'.** Точка S пересечения касательных к (C) в точках P и P' есть радикальный центр трех окружностей (C), (F) и (F'); эта точка, следовательно, расположена на радикальной оси окружностей (F) и (F') и, следовательно, лежит на их общей касательной (Δ) в точке A. Точка S есть точка пересечения (Δ) и касательной к (F) в точке P. Так как точка P описывает всю окружность (F), точка S описывает всю прямую (Δ). Прямая CS, соединяющая центр C окружности (C) с точкой пересечения касательных к (C) в точках P и P', является биссектрисой угла PCP' — это биссектриса внешнего угла FCF' и, значит, касательная в точке C к эллипсу (E). Для того чтобы провести к эллипсу (E) касательные из произвольной точки S прямой (Δ), следует поступать так: одна из этих касательных, очевидно, — прямая (Δ); точка прикосновения другой касательной есть центр окружности (C), которая касается окружностей (F) и (F') в точках прикосновения к этим окружностям касательных, проведенных из S.

5°. **Инверсия (A, $4mm'$).** Пусть B и B' — точки, диаметрально противоположные точке A относительно окружностей (F) и (F'). Инверсия (A, $4mm'$)

преобразует эти две окружности в две параллельные прямые: (F_1) и (F_1'), касающиеся соответственно в точке B' окружности (F') и в точке B окружности (F). Окружность (C) преобразуется в окружность (C_1), касающуюся этих двух прямых; точки прикосновения P_1 и P_1' (инвертированные из P и P') расположены на прямой, параллельной AF (черт. 134). Эта инверсия преобразует прямую PP' в окружность (AP_1P_1'). Центр этой окружности лежит на медиатрисе (D_1) (фиксированная прямая) отрезка P_1P_1'; окружность (AP_1P_1') проходит через точку J_1, симметричную A относительно (D_1). Далее, $\overline{AJ_1} = \overline{AB'} + \overline{B'J_1} = \overline{AB'} + \overline{AB} = 2m' + 2m = 2(m+m')$. а) Из полученного результата ($\overline{AJ_1} = \text{const}$) следует, что прямая PP' проходит постоянно через фиксированную точку J, получаемую из J_1 инверсией $(A, 4mm')$. С другой стороны, точка J_1 есть середина отрезка, который соединяет точки F_1 и F_1', полученные инверсией точек F и F'; в самом деле, F_1 и F_1' гомотетичны B' и B в гомотетии $(A, 2)$; обозначая через H_1 середину BB', заключаем, что J_1, которая гомотетична H_1 в гомотетии $(A, 2)$, есть середина F_1F_1'; четыре точки F_1, F_1', J_1, ∞ образуют гармоническую четверку, значит и F, F', J, A образуют гармоническую четверку, т. е. точка J гармонически сопряжена с A относительно F и F'. Наконец имеем $\overline{AJ}\cdot\overline{AJ_1} = 4mm'$, откуда $\overline{AJ} = \dfrac{4mm'}{\overline{AJ_1}} = \dfrac{2mm'}{m+m'}$. Мы снова приходим к результатам п. 2°: точка J есть та же самая точка, которую в п. 2° мы обозначили через I. б) Все окружности (C_1) ортогональны прямой (D_1), значит, окружности (C) ортогональны образу (D_1) в инверсии $(A, 4mm')$ — это окружность, проходящая через A и касающаяся (Δ); точка H, диаметрально противоположная A, есть образ H_1 в инверсии $(A, 4mm')$; значит, $\overline{AH}\cdot\overline{AH_1} = 4mm'$, откуда $\overline{AH} = \dfrac{4mm'}{\overline{AH_1}} = \dfrac{4mm'}{m+m'}$. Центр K этой окружности есть середина отрезка AH, значит $\overline{AK} = \dfrac{2mm'}{m+m'}$; точка K совпадает с I (и с J).



Черт. 134.

23. 1°. Соотношение $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}} : \dfrac{\overline{ID}}{\overline{IC}} = \dfrac{\overline{JA}}{\overline{JD}} : \dfrac{\overline{JB}}{\overline{JC}}$.

Применяя теорему Менелая к треугольникам ADI и BCI, пересеченным соответственно трансверсалями JCB и JDA, будем иметь (черт. 135):

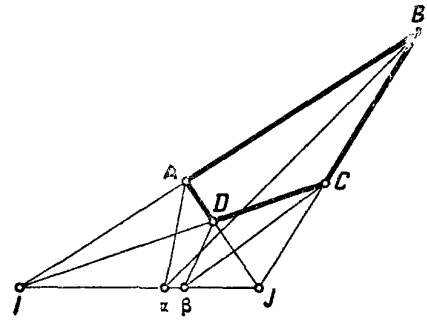
$$\frac{\overline{JA}}{\overline{JD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{CI}}\cdot\frac{\overline{BI}}{\overline{BA}} = 1, \quad \frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{DI}}\cdot\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = 1,$$

откуда

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}\cdot\frac{\overline{AI}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{JA}}{\overline{JD}}\cdot\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}},$$

или

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} : \frac{\overline{ID}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{JA}}{\overline{JD}} : \frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}. \qquad (1)$$

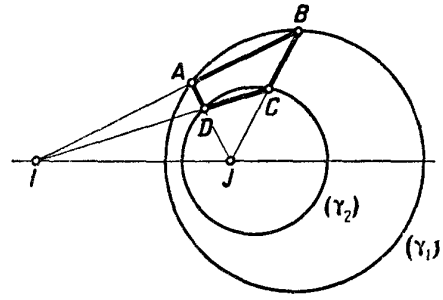


Черт. 135.

2°. **Свойство биссектрис углов *IDJ* и *ICJ*.** Пусть α — точка пересечения биссектрис углов IAJ и IBJ и пусть она расположена на IJ; тогда $\dfrac{\alpha I}{\alpha J} = \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{BI}{BJ}$; откуда $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{JA}{JB}$. Отсюда и из (1) следует $\dfrac{JD}{JC} = \dfrac{ID}{IC}$ или $\dfrac{DI}{DJ} = \dfrac{CI}{CJ}$; значит, если биссектриса угла ICJ пересекает IJ в точке β, то $\dfrac{\beta I}{\beta J} = \dfrac{CI}{CJ}$; следовательно,

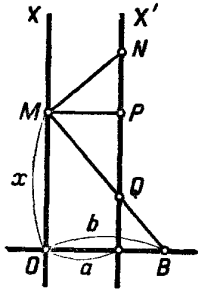
$\frac{\beta I}{\beta J} = \frac{DI}{DJ}$, а потому биссектриса угла IDJ также проходит через β. Итак, биссектрисы углов ICJ и IDJ пересекаются на IJ.

3°. **Свойство окружностей (γ_1) и (γ_2).** Пусть (γ_1) и (γ_2) — две окружности пучка, предельные точки которого I и J (черт. 136). Проведем через I секущую, пересекающую (γ_1) в точках A и B. Пусть C — точка пересечения JB с (γ_2) и D — точка пересечения IC с JA. Так как (γ_1) и (γ_2) принадлежат одному пучку, то $\frac{AI}{AJ} = \frac{BI}{BJ}$; из (1) находим $\frac{CI}{CJ} = \frac{DI}{DJ}$, откуда следует, что точка D лежит на окружности (γ_2).

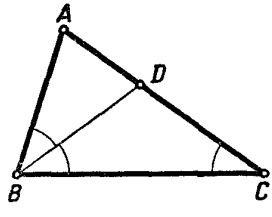


Черт. 136.

24. Обобщение задачи. Возьмем на плоскости две произвольные точки: P и Q. Обозначим через A', B' и C' середины сторон BC, CA и AB. Центр тяжести A_1 треугольника PBC есть точка отрезка PA' такая, что $\overline{PA_1} = \frac{2}{3}\overline{PA'}$. Это замечание позволяет утверждать, что если мы обозначим через B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 центры тяжести треугольников PAC, PAB, QBC, QCA и QAB, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ получатся из треугольника $A'B'C'$ в результате гомотетий $\left(P, \frac{2}{3}\right)$ и $\left(Q, \frac{2}{3}\right)$. Следовательно, эти треугольники равны, а значит равны и описанные около них окружности. Эти окружности получаются из окружности (O_9) девяти точек треугольника ABC в результате гомотетий $\left(P, \frac{2}{3}\right)$ и $\left(Q, \frac{2}{3}\right)$. Обозначая через ω центр окружности (O_9) Эйлера (середина OH), а через ω_1 и ω_2 — центры окружностей, описанных вокруг треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, будем иметь: $\overline{P\omega_1} = \frac{2}{3}\overline{P\omega}$, $\overline{Q\omega_2} = \frac{2}{3}\overline{Q\omega}$; радиус окружностей $(A_1B_1C_1)$ и $(A_2B_2C_2)$ равен $\frac{1}{3}$ радиуса R окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Частный случай. Если точка P симметрична ортоцентру H относительно центра O описанной окружности, и Q — точка, симметричная O относительно H, то ω_1 совпадает с O, а ω_2 с H. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны и вписаны в окружности радиуса $\frac{R}{3}$ с центрами O и H.



Черт. 137.



Черт. 138.

25. 1°. $PN = \frac{ab}{x}$, $PQ = \frac{ax}{b}$, $AN = \frac{x^2 + ab}{x}$.

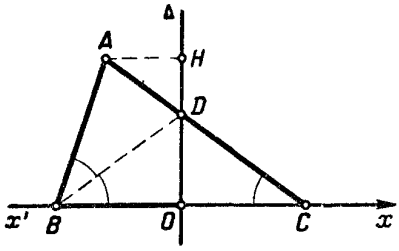
2°. $x^2 - dx + ab = 0$. 3°. $d \geqslant 2\sqrt{ab}$. 4°. $s = \frac{a^2(b^2 + x^2)}{2bx}$, $a^2x^2 - 2bsx + a^2b^2 = 0$. 5°. $s \geqslant a^2$, $OM = OB$. В этом случае $\triangle QMN$ — прямоугольный равнобедренный, высота его равна a; значит, площадь равна a^2 (черт. 137).

26. 1. Соотношение $AC^2 = AB(AB + BC)$. Указание: провести биссектрису угла B (черт. 138), использовать теорему о биссектрисе и подобие треугольников ABD и ABC.

2°. **Вычисление $AB = x$ и $AC = y$.** Имеем $y - x = l$, $y^2 = x(x + a)$. Отсюда $x = \frac{l^2}{a - 2l}$, $y = \frac{l(a - l)}{a - 2l}$. Прежде всего из условия $x > 0$ следует $l < \frac{a}{2}$; при этом условии будет и $y > 0$. Для того чтобы существовал треугольник со сторонами, длины которых a, x, b (положительные числа), необходимо и достаточно, чтобы одно из этих чисел было заключено между модулем разности и суммой двух других; это дает $l < a < \frac{al}{a - 2l}$. Первое неравенство $l < a$ в предположении $l < \frac{a}{2}$ выполнено. Второе неравенство $a < \frac{al}{a - 2l}$ дает $l > \frac{a}{3}$ (и обратно из

$l > \frac{a}{3}$ следует второе неравенство). Итак, необходимое и достаточное условие существования треугольника ABC, в котором $AC - AB = l$, $BC = a$ и $\angle B = 2\angle C$, таково: $\frac{a}{3} < l < \frac{a}{2}$.

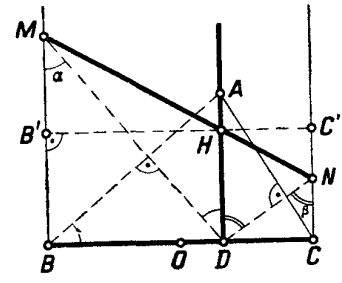
3°. Линии (H_1) и (H_2). Пусть точка B расположена левее C (черт. 139). Условие $AC - AB = l$ означает, что точка A лежит на левой ветви гиперболы (H_1), для которой B и C — фокусы, а l — длина действительной оси. Условие $\angle B = 2\angle C$ означает, что $\triangle BCD$ — равнобедренный, так что точка D расположена на медиатрисе отрезка BC.



Черт. 139.

Имеем $(\triangle AHD \sim \triangle COD)$ $\frac{AH}{AD} = \frac{OC}{CD}$; кроме того, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$; из этих соотношений находим $\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{OC} = 2$; это означает, что точка A расположена на гиперболе (H_2) с фокусом B и соответствующей директрисой (Δ) (эксцентриситет равен 2). При этом точка A расположена на левой ветви этой гиперболы. Гиперболы (H_1) и (H_2) имеют общий фокус B, и их действительная ось есть прямая BC. Для второй гиперболы директрисой, соответствующей фокусу B, является прямая (Δ), эксцентриситет равен 2; для первой гиперболы эксцентриситет равен $e = \frac{a}{l}$; пусть (Δ_1) — директриса, соответствующая фокусу B. Если M — точка, общая гиперболам (H_1) и (H_2), то, обозначая через K_1 и K_2 проекции ее на (Δ_1) и (Δ), будем иметь $\frac{MB}{MK_1} = \frac{a}{l}$ и $\frac{MB}{MK_2} = 2$, откуда $\frac{MK_2}{MK_1} = \frac{a}{2l}$. Значит точка M расположена на одной из двух прямых (D) и (D'), являющихся геометрическим местом точек, отношение расстояний от каждой из которых до прямых (Δ) и (Δ_1) равно $\frac{a}{2l}$; эти две прямые вместе с (Δ) и (Δ_1) образуют гармоническую четверку параллельных прямых. Обратно: если точка M лежит на одной из прямых (D) или (D') и на одной из гипербол (H_1) и (H_2), то она лежит и на другой гиперболе. Построение точек, общих гиперболам (H_1) и (H_2), сведено к построению точек, общих одной из них и одной из прямых (D) и (D'); это построение можно выполнить при помощи циркуля и линейки.

Исследование. Так как $AC - AB = l$, то должно быть $l < a$ [условие существования гиперболы (H_1)]. Точка O — центр гиперболы (H_1); пусть O_1 — основание директрисы (Δ_1); точка O_1 расположена между O и B; при этом $\overline{OO_1} \cdot \overline{OB} = \frac{l^2}{4}$, и так как $\overline{OB} = -\frac{a}{2}$, то $\overline{OO_1} = -\frac{l^2}{2a}$. Пусть I и I' — точки, в которых прямые (D) и (D') пересекают BC; тогда $\frac{\overline{IO}}{\overline{IO_1}} = -\frac{a}{2l}$ и $\frac{\overline{I'O}}{\overline{I'O_1}} = \frac{a}{2l}$, откуда $2l \cdot \overline{OI} = a(\overline{OO_1} - \overline{OI})$, $2l \cdot \overline{OI'} = -a(\overline{OO_1} - \overline{OI'})$; следовательно, $OI' = \frac{l^2}{2(2l-a)}$, $\overline{OI} = -\frac{l^2}{2(2l+a)}$. Для того чтобы прямые (D) и (D') пересекали левую ветвь гиперболы, необходимо и достаточно, чтобы абсциссы точек пересечения (D) и (D') с осью BC были меньше абсциссы $-\frac{l}{2}$ вершины этой ветви. Это дает для (D'): $\frac{l^2}{2(2l-a)} < -\frac{l}{2}$, откуда $\frac{a}{3} < l < \frac{a}{2}$. Для (D): $-\frac{l^2}{2(2l+a)} < -\frac{l}{2}$, что не может быть выполнено. Мы опять приходим к результатам пункта 2°.



Черт. 140.

27. 1°. $\overline{BM} = ml$, $\overline{CN} = \frac{l}{m}$. $\overline{BM} \cdot \overline{CN} = l^2$, $(\overline{BB'} + \overline{B'M})(\overline{CC'} + \overline{C'N}) = l^2$ (черт. 140), откуда $l(\overline{B'M} + \overline{C'N}) + \overline{B'M} \cdot \overline{C'N} = 0$; далее, $\frac{\overline{B'M}}{\overline{C'N}} = \frac{\overline{HB'}}{\overline{HC'}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -m$,

$\overline{B'M} = -m\overline{C'N}$ и т. д. — находим $\overline{BM} = ml$, $\overline{CN} = \frac{l}{m}$. **Перпендикуляры из B и C на DM и DN пересекаются на DH.** Находим $DA = \frac{DB^2}{BM}$, $DA^* = \frac{DC^2}{CN}$ (A^* — точка пересечения с прямой DH перпендикуляра, опущенного из C на DN); поделив почленно два последних соотношения, получим $\frac{DA}{DA^*} = 1$; значит, точки A и A^* совпадают.

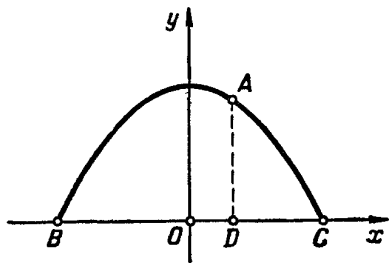
Точки B, H, C, A' лежат на одной окружности. Находим: $DB = \frac{ma}{m+1}$, $DC = \frac{a}{m+1}$, $DA = \frac{ma^2}{(m+1)^2 l}$; следовательно, $DA \cdot DH = DB \cdot DC$, $\overline{DA'} \cdot \overline{DH} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$, т. е. точки B, H, C, A' расположены на одной окружности. Эта окружность описана вокруг треугольника BHC, и точка A симметрична A' относительно BC и потому совпадает с ортоцентром треугольника BHC.

2°. **Площади $BMNC$ и MDN.** $s_1 = \frac{al}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)$, $s_2 = \frac{al}{2}$.

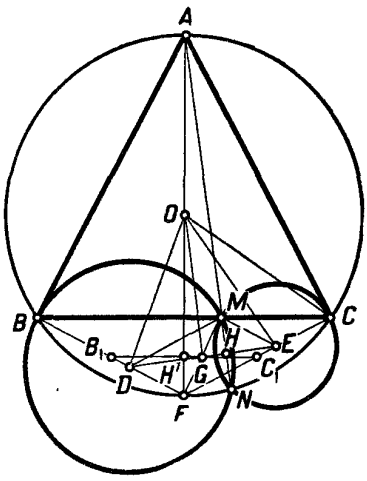
3°. **$\operatorname{tg} \angle MDN$.** $\operatorname{tg} \angle MDN = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{(m+1)^2 al}{(m+1)^2 l^2 - ma^2}$.

4°. **Геометрическое место точек A.** $m = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{x + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} - x} = \frac{a+2x}{a-2x}$, $y = \overline{DA} = DA = \frac{ma^2}{(m+1)^2 l} = \frac{a^2 - 4x^2}{4l}$ — дуга параболы (черт. 141).

28. 1°. **Сумма радиусов (D) и (E) постоянна.** Треугольники BMD и BCF равнобедренные, значит $DM \parallel FC$; точно также $\triangle CME$ равнобедренный, значит $ME \parallel FB$. Четырехугольник $DFEM$ — параллелограмм. Значит (черт. 142) $BD + CE = DB + DF = FB = \text{const}$. Соединим точки D, E и C с центром O описанной окружности. Имеем: $OF = OC$, $CE = DF$, $\angle OCE = \angle OFC = \angle OFD$. Следовательно, $\triangle OCE = \triangle OFD$ и $OD = OE$; отсюда следует, что медиатриса отрезка DE проходит через центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC.



Черт. 141.



Черт. 142.

2°. **Геометрическое место середин DE.** Середина G отрезка DE есть также и середина FM; G получается из M гомотетией $\left(F, \frac{1}{2}\right)$; значит, геометрическое место точек G есть отрезок B_1C_1, соединяющий середины B_1 и C_1 отрезков FB и FC.

Огибающая DE. DE есть вторая сторона прямого угла OGD, первая сторона которого проходит через фиксированную точку O, а вершина описывает отрезок B_1C_1. Значит, DE касается параболы с фокусом O и касательной в вершине B_1C_1. Из свойства касательной к параболе следует, что G есть середина отрезка касательной, заключенной между точкой H' пересечения параболы с ее осью OF и точкой H прикосновения; эта последняя, таким образом, симметрична H' относительно G; имеем: $\frac{\overline{HE}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{H'D}}{\overline{H'E}} = -\frac{FD}{FE}$; так как последнее отношение по

абсолютной величине равно отношению радиусов окружностей, то отсюда следует, что H есть центр отрицательной гомотетии этих окружностей.

3°. **MN проходит через A; $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=\text{const}$.** Так как $AB=AC$, то A есть точка радикальной оси окружностей (D) и (E). Далее $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=AB^2=\text{const}$.

Геометрическое место точек N. Точка N получается инверсией M в инверсии (A, AB^2). Геометрическое место точек N есть образ отрезка BC в указанной инверсии, т. е. дуга BNC окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4°. **Инверсия данной конфигурации.** Обозначим через B' и C' образы точек B и C в инверсии $(N, \overline{NA}, \overline{NM})$. Прямая BC перейдет в окружность $(NB'C')$, прямая AC — в окружность (NMC'), прямая AB — в окружность (NMB'), окружность (O) перейдет в прямую $B'MC'$; окружность (NMB) в прямую AB', касательную к (NMB'), а окружность (NMC) — в прямую AC', касательную к (NMC'). Таким образом, инвертированная фигура будет равнобедренным треугольником $AB'C'$ и двумя окружностями (NMB') и (NMC'), касательными к AB' и AC' и пересекающимися на основании $B'C'$. 29. Если треугольник равнобедренный $(AB=AC)$, то, очевидно, окружность $(A'B_1'C_1')$ касается BC. Докажем обратное положение. Пусть окружность $(A'B_1'C_1')$ пересекает вторично BC, CA и AB в точках X, Y, Z. Ориентируем контур треугольника ABC в направлении от A к B, от B к C и от C к A. Тогда

$$\overline{BA'}=\frac{ac}{b+c},\quad \overline{A'C}=\frac{ab}{b+c},\quad \overline{B_1'C}=\frac{ab}{c-a},\quad \overline{B_1'A}=\frac{bc}{c-a},$$
$$\overline{C_1'B}=\frac{ac}{a-b},\quad \overline{C_1'A}=\frac{bc}{a-b}$$

(для вывода этих соотношений следует воспользоваться теоремами о биссектрисах внутреннего и внешнего угла треугольника и теоремой Шаля). Далее, $\overline{AB_1'}\cdot\overline{AY}=\overline{AC_1'}\cdot\overline{AZ}$, $\overline{BC_1'}\cdot\overline{BZ}=\overline{BA'}\cdot\overline{BX}$, $\overline{CB_1'}\cdot\overline{CY}=\overline{CA'}\cdot\overline{CX}$, откуда и из предыдущих соотношений имеем:

$$\frac{\overline{AY}}{a-c}+\frac{\overline{AZ}}{a-b}=0,\quad \frac{\overline{BZ}}{a-b}+\frac{\overline{BX}}{b+c}=0,\quad \frac{\overline{CY}}{a-c}+\frac{\overline{CX}}{b+c}=0. \tag{1}$$

Предположим, что точки A' и X совпадают, тогда $\overline{BX}=\frac{ac}{b+c}$, $\overline{XC}=\frac{ab}{b+c}$, а значит из (1) $\frac{\overline{BZ}}{a-b}+\frac{ac}{(b+c)^2}=0$, $\frac{\overline{CY}}{a-c}-\frac{ab}{(b+c)^2}=0$; следовательно, $\overline{AY}=\overline{AC}+\overline{CY}=-b+\frac{ab(a-c)}{(b+c)^2}=\frac{b[a(a-c)-(b+c)^2]}{(b+c)^2}$ и $\overline{AZ}=\overline{AB}+\overline{BZ}=c+\frac{ac(b-a)}{(b+c)^2}=\frac{c[(b+c)^2+a(b-a)]}{(b+c)^2}$. Для того чтобы было выполнено и первое из соотношений (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{b[a(a-c)-(b+c)^2]}{a-c}+\frac{c[(b+c)^2+a(b-a)]}{a-b}=0,$$

или

$$(b-c)[(b+c)^2(b+c-a)+a(a-b)(a-c)]=0.$$

Отсюда либо $b-c=0$, т. е. $b=c$ — треугольник равнобедренный, либо равно нулю выражение в квадратных скобках, что невозможно, ибо это равенство можно представить в виде $abc=-(a+b+c)(b+c-a)^2$.

30. 1°. Значения α, β, d; $d\sin\frac{\alpha}{2}=a$, $d\sin\frac{\beta}{2}=b$, $n(\alpha+\beta)=2\pi$, $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}}{a+b}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}{a-b}$ и т. д. (черт. 143). Ответ:

$$\alpha=\frac{\pi}{n}+2\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right),\quad \beta=\frac{\pi}{n}-2\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right),$$
$$d=\frac{a}{\sin\left[\frac{\pi}{2n}+\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)\right]}=\frac{b}{\sin\left[\frac{\pi}{2n}-\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)\right]}.$$

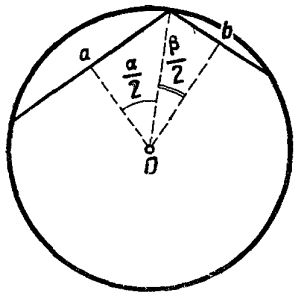
2°. **Наибольшее и наименьшее значение s.**

$$n(a+b)=2p,\quad n(\alpha+\beta)=2\pi,\quad s=\frac{n}{4}\left(a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+b^2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

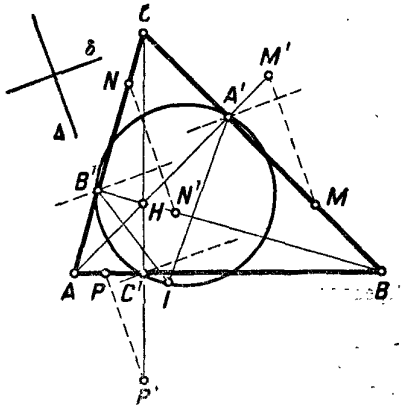
Полагая $a=x$, находим: $b=\dfrac{2p}{n}-x$, $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{x}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{2p}{n}-x}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{2p}{n}-x}$, откуда $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2p}{nx\sin\frac{\pi}{n}}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}-\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{n}$. Далее, $\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=$

$=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}+\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{n}\dfrac{1}{\frac{2p}{nx}-1}$, $s=\dfrac{n}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2n}\left(-x^2+\dfrac{2px}{n}+\right.$

$\left.+\dfrac{2p^2}{n^2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}\right)$. При $x=\dfrac{p}{n}$ имеем $s_{\max}=\dfrac{p^2}{2n}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$; при $x=0$ и $x=\dfrac{2p}{n}$, $s_{\min}=\dfrac{p^2}{n}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$. 31. Касательная к окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника в вершине прямого угла, симметрична высоте, опущенной на гипотенузу относительно любого из катетов. Обозначим через (δ) направление, перпендикулярное (Δ). Касательная в точке A' к окружности $(MA'M')$ есть,



Черт. 143.



Черт. 144.

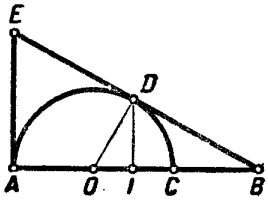
следовательно, прямая $A'I$, симметричная направлению (δ) относительно BC, значит (черт. 144) $(A'I,\ BC)=-(\delta,\ BC)$ (mod. π). Аналогично: касательная в точке B' к окружности, описанной вокруг треугольника $NB'N'$, есть прямая $B'I$, симметричная направлению (δ) относительно CA; значит $(CA,\ B'I)=-(CA,\ \delta)$ (mod π). Имеем $(A'I,\ BC)+(BC,\ CA)+(CA,\ B'I)=-(\delta,\ BC)+(BC,\ CA)-(CA,\ \delta)=2(BC,\ CA)$. На основании свойства треугольника $A'B'C'$ имеем $(C'A',\ C'B')=2(BC,\ CA)$ (mod π). Значит, $(A'I,\ B'I)=(C'A',\ C'B')$, откуда следует, что точки A', B', C', I лежат на одной окружности. Касательные в точках A' и B' к окружностям $(MA'M')$ и $(NB'N')$ пересекаются на окружности Эйлера треугольника ABC. Аналогично доказывается, что и касательные к окружностям $(MA'M')$ и $(PC'P')$ в точках A' и C' пересекаются в точке окружности Эйлера. Но так как касательная к окружности $(MA'M')$ в точке A' пересекает окружность Эйлера вторично в точке I, то и касательная к окружности $(PC'P')$ в точке C' проходит через I. Итак, все три касательные проходят через одну и ту же точку I окружности Эйлера, которая и является геометрическим местом этих точек.

33. 1°. **Значения BO, BD, AE, BE.** Треугольники BAE и BOD подобны (черт. 145); $BO=a-x$, $BD=\sqrt{a(a-2x)}$, $AE=x\sqrt{\dfrac{a}{a-2x}}$, $BE=(a-x)\sqrt{\dfrac{a}{a-2x}}$.

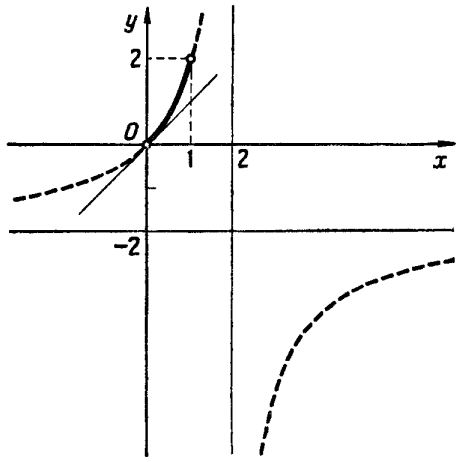
2°. **Длины отрезков OI и AI. График $y=AI$.** $OI=\dfrac{x^2}{a-x}$, $AI=\dfrac{ax}{a-x}$.

График функции $y=\dfrac{ax}{a-x}$, или $y=\dfrac{a^2}{a-x}-a$, или при $a=2$, $y=\dfrac{4}{2-x}-2$ — дуга равносторонней гиперболы для x от 0 до 1 (черт. 146).

3°. Соотношение $\frac{s_2}{s_1}=m$. $s_1=\pi\frac{ax(a-x)}{a-2x}$, $s_2=2\pi\frac{ax^2}{a-x}$, $\frac{s_2}{s_1}=\frac{2x(a-2x)}{(a-x)^2}=m$ или $f(x)\equiv(m+4)x^2-2(m+1)ax+ma^2=0$; x должен изменяться от 0 до $\frac{a}{2}$. Находим $f(0)=ma^2>0$, $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{ma^2}{4}>0$, $\Delta=(m+1)^2a^2-m(m+4)a^2=(1-2m)a^2$. Корни $f(x)$ мнимые, если $m>\frac{1}{2}$. Если $0<m<\frac{1}{2}$, то корни $f(x)$ действительны, различны и положительны. Полусумма корней равна $\frac{m+1}{m+4}a$, и если m изменяется от 0 до $\frac{1}{2}$, эта полусумма возрастает от $\frac{a}{4}$ до $\frac{a}{3}$ и остается, следовательно,



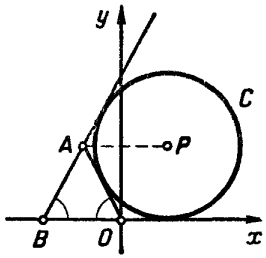
Черт. 145.



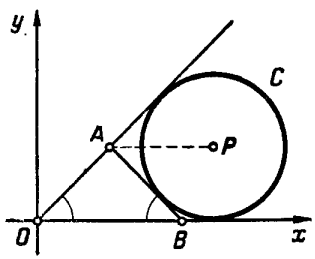
Черт. 146.

меньше, чем $\frac{a}{2}$. Значит, если $0<m<\frac{1}{2}$, уравнение $f(x)=0$ имеет два действительных корня, заключенных между 0 и $\frac{a}{2}$, и задача имеет два решения; для $m>\frac{1}{2}$ решений нет; для $m=\frac{1}{2}$ уравнение $f(x)=0$ имеет двойной корень $x=\frac{a}{3}$; ему соответствует лишь одно положение точки C на расстоянии $\frac{2}{3}AB$ от точки A.

34. 1°. Геометрическое место точек A. Если окружность (C) вневписана в треугольник OAB в угол B (черт. 147) или в угол O (черт. 148), ее центр P



Черт. 147.



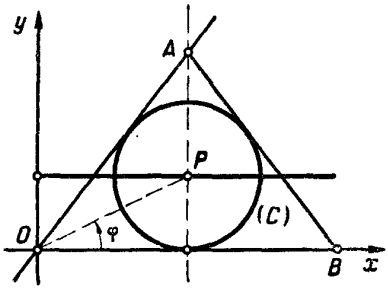
Черт. 148.

расположен на биссектрисе внутреннего угла OAB. Но треугольник OAB равнобедренный, значит эта биссектриса параллельна оси Ox и значит $AP\parallel Ox$. Так как P описывает прямую (D), то и точка A постоянно расположена на прямой (D). Обратно: рассмотрим на прямой (D) какую-нибудь точку A и построим соответствующий равнобедренный треугольник OAB. Окружность, вневписанная в этот треугольник в углы O или B, имеет радиус r. Таким образом, для всякого положения точки A на прямой (D) существуют две окружности (C). Можно сказать, что точка A может занимать на прямой (D) всевозможные положения и каждое из них два раза.

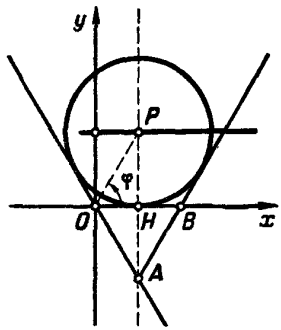
2°. **Окружность (C) — вписанная или вневписанная в угол A.** Если окружность (C) вписана в треугольник OAB (черт. 149), то φ изменяется либо от 0

до $\frac{\pi}{4}$, либо от $\frac{3\pi}{4}$ до π. В случае, если окружность (C) вневписана в угол A, φ изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$ (черт. 150).

35. 1°. Соотношение $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2\cos\alpha}{AD}$. Пусть E — основание биссектрисы внешнего угла A (черт. 151). Точки A, D, β, γ — проекции на прямую AD точек E, D, B, C. Так как $(EDBC)=-1$, то и $(AD\beta\gamma)=-1$, значит,



Черт. 149.

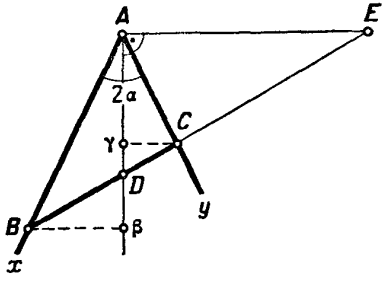


Черт. 150.

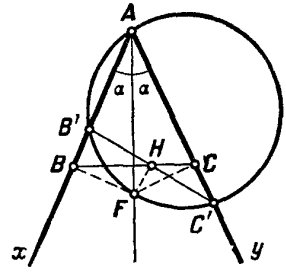
$\frac{1}{A\beta}+\frac{1}{A\gamma}=\frac{2}{AD}$. Но так как β и γ расположены вместе с точкой D по одну сторону от точки A, то $\frac{1}{A\beta}+\frac{1}{A\gamma}=\frac{2}{AD}$, откуда $\frac{1}{AB\cdot\cos\alpha}+\frac{1}{AC\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{AD}$, или $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2\cos\alpha}{AD}$.

2°. а) **BC — проходит через фиксированную точку.** Пусть D — точка, в которой прямая BC пересекает биссектрису угла xAy. Тогда $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2\cos\alpha}{AD}$. С другой стороны, по предположению $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2}{m}$, значит, $AD=m\cos\alpha$ и, значит, точка D фиксирована, когда B и C меняются.

б) **Окружность $(AB'C')$ проходит через фиксированную точку; $B'C$ касается параболы.** Точки B' и C' получаются из точек B и C в результате инверсии (A, k^2). Окружность, описанная вокруг треугольника $(AB'C')$, инвертируется



Черт. 151.



Черт. 152.

в прямую BC, а так как эта последняя проходит через фиксированную точку D, то окружность $(AB'C')$ проходит через фиксированную точку F, полученную из D инверсией (A, k^2). Пусть B_1 и C_1 (черт. 152) — проекции этой фиксированной точки F на Ax и Ay. На основании теоремы Симпсона точки H, B_1 и C_1, являющиеся проекциями точки F на стороны треугольника $B'AC'$ лежат на одной прямой; точка H, значит, расположена постоянно на прямой B_1C_1 (она описывает лишь отрезок B_1C_1 этой прямой). Мы видим, что проекция H фиксированной точки F на переменную прямую $B'C'$ расположена на фиксированной прямой B_1C_1; значит, $B'C'$ касается параболы с фокусом F, для которой B_1C_1 — касательная в вершине.

3°. а) **Изменение θ и $\sin\theta$.** Прямая BC, вращаясь вокруг точки D, должна пересекать обе полупрямые Ax и Ay. Проведем через точку D прямую, параллельную Ay, и пусть эта прямая пересечет луч Ax в точке B. Точка B может описывать бесконечную часть луча Ax, ограниченную точкой B_0. Так как треугольник AB_0D равнобедренный, то угол θ может изменяться от α до $\pi-\alpha$, а $\sin\theta$ — от $\sin\alpha$ до 1.

б) **Значения BD и DC.** $BD=\dfrac{AD\cdot\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}$, $DC=\dfrac{AD\cdot\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$. Отсюда находим $BC=BD+DC$ и т. д.

36. 1°. Вычисление r, r', $O\omega$ и $O'\omega'$. Нетрудно доказать, что если окружность (C) инвертируется в окружность (C') относительно точки O, а степень инверсии равна p, то гомотетия $\left(0,\ \dfrac{p}{p'}\right)$, где p' — степень точки O относительно (C) также преобразует (C) в (C'), а значит центр (C) — в центр (C'). В преобразовании инверсии (O', R'^2) окружности (Γ) коэффициент гомотетии $\dfrac{p}{p'}$ будет равен $k'=\dfrac{R'^2}{d^2-R^2}$, а в преобразовании инверсии (O, R^2) этот коэффициент равен $k=\dfrac{R^2}{d^2-R'^2}$. Отсюда

$$r=R|k'|=\frac{RR'^2}{|d^2-R^2|},\quad r'=R'|k|=\frac{R'R^2}{|d^2-R^2|},$$

$$\overline{O'\omega}=\overline{O'O}k'=-\frac{dR'^2}{d^2-R^2},\quad \overline{O\omega'}=\overline{OO'}k=\frac{dR^2}{d^2-R'^2},$$

$$\overline{O\omega}=\overline{OO'}+\overline{O'\omega}=\frac{d^2-R^2-R'^2}{d^2-R^2}d,$$

$$\overline{O'\omega'}=\overline{O'O}+\overline{O\omega'}=\frac{R^2+R'^2-d^2}{d^2-R'^2}d.$$

2°. **Соотношения $d^2=R^2+R'^2\pm RR'$; величина угла OAO'.** Для того чтобы имело место равенство $r=r'$, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{R'}{|d^2-R^2|}=\dfrac{R}{|d^2-R'^2|}$, или $\dfrac{R'}{d^2-R^2}=\pm\dfrac{R}{d^2-R'^2}$. Отсюда в силу $R\neq R'$ получим или (1), или (2). Если выполнено условие (1) или (2), то (Γ) и (Γ') пересекаются, так как при каждом из этих предположений мы будем иметь $R^2+R'^2-2RR'<d^2<R^2+R'^2+2RR'$, откуда $|R-R'|<d<R+R'$. Пусть A — точка пересечения; тогда $d^2=R^2+R'^2-2RR'\cos A$. В случае (1) $\cos A=\dfrac{1}{2}$, $A=60°$; в случае (2) $\cos A=-\dfrac{1}{2}$, $A=120°$.

3°. **Окружности (γ) и (γ') совпадают. Отношение $\dfrac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}$.** Для того чтобы в предположении (1) или (2) окружности (γ) и (γ') совпадали, необходимо и достаточно, чтобы совпадали их центры, так как радиусы их равны. Равенство $\overline{O\omega}=\overline{O\omega'}$ проверяется исходя из формул, полученных для $\overline{O\omega}$ и $\overline{O\omega'}$ с учетом одного из равенств (1) или (2). В первом случае $\overline{O\omega}=\overline{O\omega'}=\dfrac{R}{R-R'}d$; во втором $\overline{O\omega}=\overline{O\omega'}=\dfrac{R}{R+R'}d$. Отношение $\dfrac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}=\dfrac{\overline{O\omega}}{\overline{O'O}+\overline{O\omega}}$ в первом случае равно $\dfrac{R}{R'}$, во втором — $\dfrac{R}{R'}$. Значит, в первом случае ω — центр положительной гомотетии окружностей (Γ) и (Γ'), а во втором случае — центр отрицательной гомотетии тех же окружностей.

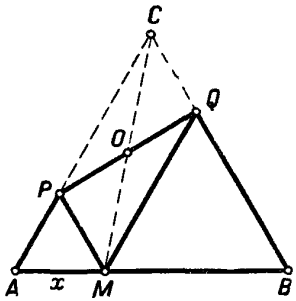
37. 1°. Значение x, если дано $PQ=l$; $PQ=\sqrt{3x^2-3ax+a^2}$. Если $PQ=l$, то имеем

$$f(x)=3x^2-3ax+a^2-l^2=0. \qquad (1)$$

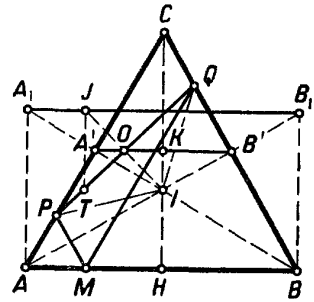
Дискриминант $\Delta=3(4l^2-a^2)$ положителен, если $l>\dfrac{a}{2}$. Если это условие выполнено, то уравнение (1) имеет два действительных корня: x' и x''; но решение

должно быть еще заключено между 0 и a. Имеем: $f(0)=a^2-l^2$; $f(a)=a^2-l^2$. Полусумма корней $\frac{x'+x''}{2}=\frac{a}{2}$. Если $l<a$, то $f(0)$ и $f(a)$ положительны, ни одно из чисел 0 и a не заключено между корнями x' и x'', а так как полусумма этих корней заключена между 0 и a, то оба корня x' и x'' заключены между 0 и a и дают решение задачи. Если $l>a$, то $f(0)$ и $f(a)$ отрицательны и числа 0 и a заключены между корнями x' и x''; эти последние не дают решения. Итак, задача имеет два решения, если $\frac{a}{2}<l<a$. Если $l=\frac{a}{2}$, то $\Delta=0$, уравнение имеет кратный корень $x'=x''=\frac{a}{2}$. Наконец, если $l=a$, то уравнение имеет корни $x'=0$ и $x''=a$ — это крайние случаи.

2°. **Геометрическое место середин PQ.** Пусть C — точка, в которой пересекаются продолжения AP и BQ (черт. 153). Треугольник ABC равносторонний,



Черт. 153.

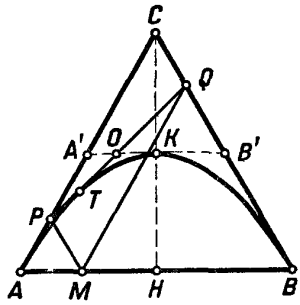


Черт. 154.

четырехугольник $MPCQ$ — параллелограмм. Середина O диагонали PQ этого параллелограмма в то же время — середина второй диагонали MC; точка O получается, следовательно, из точки M гомотетией $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ и значит описывает отрезок $A'B'$, соединяющий середины сторон CA и CB (черт. 154).

Свойство медиатрисы PQ. Медиатрисы сторон PM и MQ треугольника MPQ проходят через точку I, являющуюся центром окружности, вписанной в треугольник ABC; значит, через ту же точку проходит и медиатриса отрезка PQ.

Огибающая PQ. Угол IOP прямой; одна из его сторон проходит через фиксированную точку I, а его вершина перемещается по прямолинейному отрезку $A'B'$, значит, другая сторона OP или PQ касается параболы с фокусом I; $A'B'$ — касательная в вершине. Для построения точки прикосновения надо продолжить отрезок OI за точку O на расстояние $OJ=OI$ и через точку J провести прямую, параллельную оси параболы; точка T пересечения этой прямой и прямой PQ и есть точка прикосновения; точка J получается из точки O в результате гомотетии $(I, 2)$; значит, геометрическое место точек J есть отрезок A_1B_1, полученный из отрезка $A'B'$ гомотетией $(I, 2)$ — этот отрезок равен отрезку AB, причем четырехугольник AA_1B_1B — прямоугольник. Если точка J занимает положение A_1, то PQ совпадает с AC и точка T — с точкой A; если точка J занимает другое крайнее положение B_1, то точка T совпадает с B. Таким образом, мы видим, что с одной стороны точки A и B лежат на параболе, с другой стороны, что точка T описывает дугу параболы, ограниченную точками A и B (черт. 155). Эта дуга параболы и есть огибающая PQ.



Черт. 155.

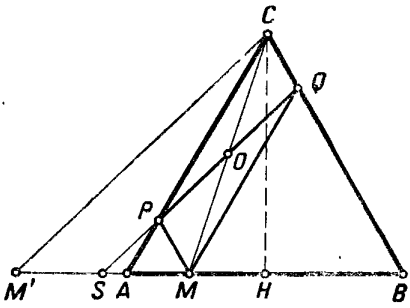
Свойство окружностей (PMQ). Все окружности (PMQ) имеют общий центр I (описанные окружности будут, следовательно, концентричны).

Геометрическое место центров окружностей (PCQ). Треугольник PCQ симметричен треугольнику PMQ относительно точки O, и, значит, центр окружности (PCQ) симметричен центру окружности (PQM), т. е. I относительно O — это, следовательно, точка J; геометрическое место центров окружностей, описанных вокруг треугольника PQC есть, следовательно, отрезок A_1B_1.

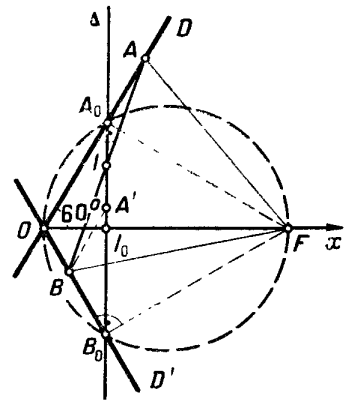
3°. **Построение PQ, если известно направление PQ.** Надо опустить перпендикуляр IO из I на прямую, имеющую данное направление. Пусть этот перпендикуляр пересечет $A'B'$ в точке O; через точку O проводим прямую, параллельную заданной. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда точка пересечения с $A'B'$ перпендикуляра, опущенного из I на данную прямую, лежит между A' и B'.

Построение PQ, если задана длина этого отрезка. Угол PIQ — центральный угол в окружности (PMQ) и равен удвоенному углу PMQ; его половина OIQ равна 60°; значит, $OQ = IO \operatorname{tg} 60° = IO\sqrt{3}$, откуда $IO = \dfrac{OQ}{\sqrt{3}}$. Значит, PQ будет иметь данную длину l, если $IO = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$. Построив окружность такого радиуса с центром I, мы найдем точку O (одну, две или ни одной), а зная точку O, уже просто построить PQ. Задача имеет два решения, если $\dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ заключено между IK (расстояние от I до $A'B'$) и IB', т. е. $\dfrac{a\sqrt{3}}{12} < \dfrac{l}{2\sqrt{3}} < \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, или $\dfrac{a}{2} < l < a$, что мы уже и имели в п. 1°.

4°. **Окружности (S, SM) образуют пучок.** Проведем (черт. 156) через точку C прямую, параллельную PQ, и пусть M' — точка, в которой эта прямая пересечет AB. Лучи CA, CB, CM, CM' образуют гармоническую четверку, так как $PO = OQ$. Четыре точки A, B, M и M', значит, также образуют гармоническую



Черт. 156.



Черт. 157.

четверку, и, значит, окружность с диаметром MM' принадлежит пучку окружностей, для которого A и B — предельные точки. Окружность, построенная на MM' как на диаметре, и есть окружность, указанная в условии задачи, так как из равенства $MO = OC$ следует, что $MS = SM'$, т. е. S — середина отрезка MM'.

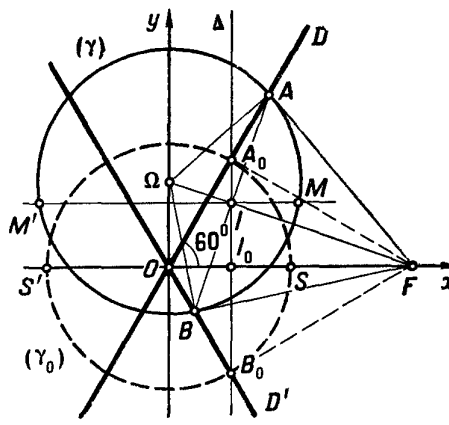
39. 1°. **Построение AB с серединой I.** Точка B должна быть симметрична точке A относительно I; Пусть (λ) — прямая, симметричная (D) относительно I; точка B должна лежать на (λ), так как A лежит на (D). Прямая (λ) есть прямая, параллельная (D) и проходящая через точку A, симметричную A_0 относительно I (черт. 157).

2°. **Переход от A к B вращением.** Если точка A может быть переведена в точку B некоторым вращением, то медиатриса отрезка AB проходит через фиксированную точку. Эта точка должна лежать на Ox (медиатриса AB для случая, когда I занимает положение I_0) и на перпендикуляре к (D) в точке A_0 (медиатриса AB, когда I совпадает с A_0). Таким образом, центр вращения, если он существует, есть точка F, диаметрально противоположная точке O в окружности, описанной вокруг треугольника A_0OB_0. Пусть F — эта точка (черт. 157). Тогда $\triangle A_0FA = \triangle B_0FB$, так как $FA_0 = FB_0$, и $A_0A = B_0B$, так как $A_0A = A'B$ (симметрия относительно I), $A'B = B_0B$ (равнобедренный треугольник). Значит, $FA = FB$ и медиатриса любого отрезка AB проходит через точку F. С другой стороны, углы $\angle A_0FA$ и $\angle B_0FB$ равны и отсчитываются в одном направлении, т. е. $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = (\overrightarrow{FA_0}, \overrightarrow{FB_0}) = 60°$. Точка B получается из точки A в результате преобразования поворота $(F, 60°)$.

Огибающая AB. Прямой угол FIA таков, что одна из его сторон проходит через фиксированную точку F, а вершина скользит по фиксированной прямой (Δ); значит, вторая сторона касается параболы с фокусом F; (Δ) — касательная

в вершине. Так как точка I описывает прямую (Δ) в целом, то прямая AB может совпадать с любой касательной к указанной параболе.

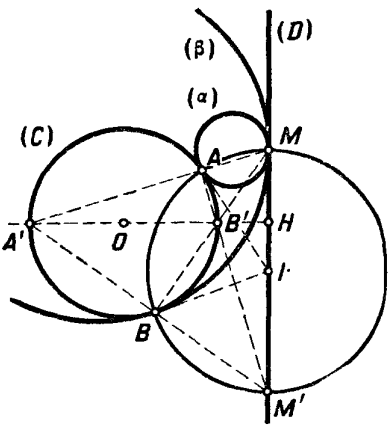
3°. **Геометрическое место центров окружности (γ).** Если точка I совпадает с I_0, то центр Ω окружности (γ) находится в O. Для всякого другого положения точки I четырехугольник $FA\Omega B$ подобен четырехугольнику FA_0OB_0, значит (черт. 158) $\frac{\overline{F\Omega}}{\overline{FI}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FI_0}}$. Отсюда следует, что точка Ω расположена на прямой, параллельной (Δ) и проходящей через точку O, т. е. на перпендикуляре Oy к оси Ox в точке O. Точка Ω описывает Oy в целом (черт. 158).



Черт 158.

Свойство точек окружностей (γ). Если точка I совпадает с I_0, то окружность (γ) совпадает с окружностью, центр которой O, а радиус OA_0; пусть (γ_0) — эта окружность и пусть S и S' — точки, в которых она пересекает ось Ox. Точки S и S' гармонически сопряжены с точками I_0 и F. Окружность (γ_0) принадлежит, следовательно, пучку окружностей, для которого F и I_0 суть предельные точки; отношение расстояний от любой точки этой окружности до точек I_0 и F постоянно, и мы имеем, например [P_0 — какая-нибудь точка окружности (γ_0)]: $\frac{P_0F}{P_0I_0} = \frac{A_0F}{A_0I_0}$, и так как $\angle I_0A_0F = 60°$, то $P_0F = 2P_0I_0$. Из соображений подобия находим $\frac{PF}{PI} = 2$, где P — какая-нибудь точка окружности (γ).

Геометрическое место точек M и M'. Расстояние от любой из этих точек до I есть в то же время расстояние от этой точки до (Δ). Каждая из точек M и M', следовательно, такова, что отношение расстояния от нее до F и до (Δ) равно 2; эти точки, следовательно, расположены на гиперболе с фокусом F и соответствующей директрисой (Δ); эксцентриситет равен 2. Точки M и M' — суть точки пересечения указанной гиперболы с прямой, проходящей через I параллельно Ox. Так как точка I описывает прямую (Δ) в целом, то каждая из точек M и M' описывает в целом одну из ветвей гиперболы. Эта гипербола (Γ) и есть искомое геометрическое место; S и S' — ее вершины (положения точек M и M' для того случая, когда точка I совпадает с I_0); окружность (γ_0) есть ее главная окружность, а (D) и (D') — асимптоты. Для того чтобы построить касательную к (Γ) в точке M, достаточно провести через фокус F прямую перпендикулярную MF, и соединить точку M, с точкой T, в которой этот перпендикуляр пересечет (Δ). Эта прямая будет вместе с тем касаться в точке M окружности (γ); в самом деле, окружность с диаметром MT, очевидно, проходит и через F и через I. Но точки I и F гармонически разделяются концами диаметра (γ), лежащего на прямой IF (ибо I — основание поляры точки F); значит, окружность с диаметром MT ортогональна (γ) и значит MT касается (γ). Гипербола (Γ) и окружность (γ) имеют одну и ту же касательную в точке M, аналогично и в точке M' (из соображений симметрии).



Черт. 159.

40. **Построение окружностей, касающихся (D) в точке M и касающихся (C).** Пусть p — степень точки M относительно окружности (C). В инверсии (M, p) прямая (D) и окружность (C) инвариантны, а искомые окружности преобразуются в прямые, параллельные (D) и касающиеся (C). Отсюда построение: проведем к (C) две касательные, параллельные (D) (черт. 159); пусть A' и B' — точки прикосновения. Образами этих точек в инверсии (M, p) будут точки A и B, в которых прямые MA' и MB' пересекают окружность (C).

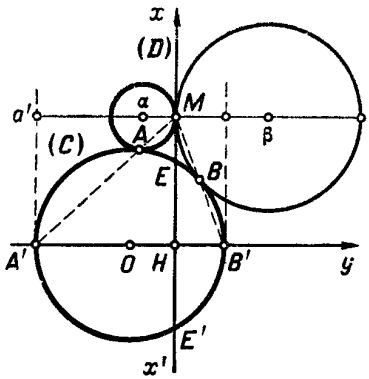
Замечание 1. Предполагается, что точка M не расположена на окружности (C). Легко видеть, что если точка M расположена на окружности (C), не существует окружности, удовлетворяющей условию задачи, или существует бесконечное множество соответственно в зависимости от того, пересекает или касается прямая (D) окружности (C).

Замечание 2. Если прямая (D) касается (C) и точка M не есть точка прикосновения, то одна из окружностей (α) или (β) вырождается в прямую (D).

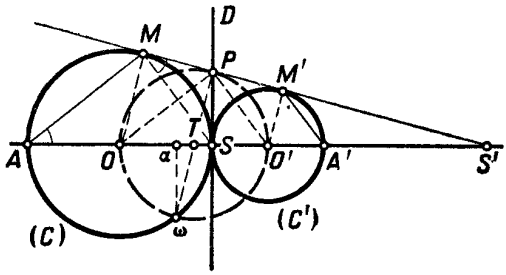
Изучение окружности (ABM). Эта окружность получается из прямой $A'B'$ в результате инверсии (M, p). Так как прямая $A'B'$ ортогональна (C), то и окружность (ABM) ортогональна (C). Так как, с другой стороны, прямая $A'B'$ перпендикулярна (D), то и окружность (ABM) перпендикулярна (D). Пусть I — центр окружности (ABM). Из того что окружность (AMB) ортогональна (C), следует, что касательные к (C) в точках A и B пересекаются в центре I окружности (AMB); так как окружность (AMB) ортогональна (D), то (D) — ее диаметр и точка I также лежит на (D).

Замечание. В частном случае, когда точка M совпадает с проекцией H точки O на (D), точки A и B совпадают соответственно с B' и A' и окружность (AMB) вырождается в прямую.

2°. Геометрическое место точек M' и I. Точка M', диаметрально противоположная точке M, лежит на окружности, ортогональной (C), и является точкой, полярно сопряженной с точкой M относительно (C). Значит, когда точка M фиксирована, а прямая (D) вращается вокруг M, точка M' описывает в целом поляру (m) точки M относительно окружности (C). Точка I пересечения касательных к (C)



Черт. 160.



Черт. 161.

в точках A и B есть центр I окружности (ABM); эта точка I — середина отрезка MM'; она получается из M' в результате гомотетии $\left(M, \frac{1}{2}\right)$. Значит, геометрическое место точек I есть прямая, полученная из (m) гомотетией $\left(M, \frac{1}{2}\right)$.

3°. Случай $OH = \frac{R}{2}$. Ответ: радиусы (α) и (β) (черт. 160) соответственно будут

$$\frac{\left|x^2 - \frac{3R^2}{4}\right|}{3R} \quad \text{и} \quad \frac{\left|x^2 - \frac{3R^2}{4}\right|}{R};$$

их отношение равно $\frac{1}{3}$. Геометрическое место центров (α) и (β) — параболы с фокусом O, директрисы которых — прямые, параллельные (D) и отстоящие от (D) по ту и другую сторону на расстоянии R.

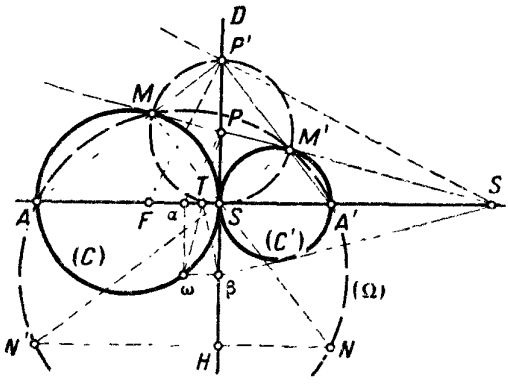
41. Будем предполагать, что $R > R'$ (черт. 161).

1°. Окружность (OO') касается MM'. $PM = PM' = PS$, значит P — середина MM'. Отрезок TP, значит, параллелен основаниям трапеции $OMM'O'$ (значит, перпендикуляреи MM') и равен их полусумме: $TP = \frac{R + R'}{2} = TO = TO'$. Отсюда следует, что окружность с центром T, которая проходит через O и O', проходит также и через P и касается MM'.

Значения SS' и ST. $ST = \frac{R - R'}{2}$, $SS' = \frac{2RR'}{R - R'}$.

2°. Свойство точек A, A', M, M'. Имеем $\angle SAM = \angle SMD$ и $\angle SMP = \angle A'M'S'$ (гомотетия с центром S'). Значит, $\angle SAM + \angle A'M'M = \pi$ и $AA'MM'$ — вписанный четырехугольник. Центр ω окружности (Ω), описанной вокруг этого

четырехугольника, есть точка пересечения медиатрис отрезков MM' и AA'. Первая медиатриса есть TP. Для того чтобы определить основание α второй медиатрисы, можно заметить, что отрезок AA' получается из отрезка OO' в результате гомотетии $(S, 2)$ и, значит, середина α отрезка AA' получается из середины T отрезка OO' при этой гомотетии, значит точка α симметрична точке S относительно T. Медиатриса отрезка AA' есть прямая, симметричная (D) относительно T. Точка, в которой она пересекает TP [т. е. центр окружности (Ω)], есть поэтому точка, симметричная точке P по отношению к T, т. е. диаметрально противоположная точке P на окружности с диаметром OO'. Прямые (D), AM и $A'M'$ — радикальные оси окружностей (C), (C') и (Ω), взятых попарно; следовательно, они пересекаются в одной точке P' (черт. 162).



Черт. 162.

Свойство точек S', P, T, β. Так как точка ω симметрична точке P относительно T, то ее проекция β на (D) симметрична точке P относительно S. Четырехугольник $S'PT\beta$ сложен, таким образом, из двух равных прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, и, значит, вокруг него можно описать окружность.

Свойство точек S', P' α, β. На основании предыдущего $\overline{SS'}\cdot\overline{ST}=\overline{S\beta}\cdot\overline{SP}$. Умножая обе части этого равенства на 2, получим $\overline{SS'}\cdot\overline{S\alpha}=\overline{S\beta}\cdot 2\overline{SP}$. Так как $SMP'M'$ — прямоугольник, то $2\overline{SP}=\overline{SP'}$ и, значит, $\overline{SS'}\cdot\overline{S\alpha}=\overline{S\beta}\cdot\overline{SP'}$. Отсюда следует, что четыре точки S', P', α, β расположены на одной окружности.

3°. Изучение прямой NN'. Пусть N и N' — вторые точки пересечения прямых SM и SM' с окружностью (Ω) и p — степень точки S относительно этой окружности. В инверсии (S, p) окружность, описанная вокруг прямоугольника $SMP'M'$, преобразуется в прямую NN'. Эта прямая будет перпендикулярна прямой, соединяющей центр инверсии с центром этой окружности; значит, она перпендикулярна (D). Пусть H — точка, в которой прямая NN' пересекает (D); точка P' есть образ точки H в инверсии (S, p) и, значит, $\overline{SH}\cdot\overline{SP'}=p$; далее, $p=\overline{SA}\cdot\overline{SA'}=-\overline{SP'}^2$ и, значит, $\overline{SH}=-\overline{SP'}=-2\overline{SP}$; итак, $SH=2SP$.

Свойство прямой $S'P'$. Выражая двумя способами степень точки S' относительно окружности, описанной вокруг прямоугольника $SMP'M'$, получим $\overline{S'M}\cdot\overline{S'M'}=\overline{S'S}^2$; с другой стороны, точка P' расположена на радикальной оси окружностей (C) и (Ω) и, значит, $\overline{P'M}\cdot\overline{P'A}=\overline{P'S}^2$. Каждое из этих равенств выражает также и то, что точки S' и P' имеют одну и ту же степень относительно (Ω) и S. Значит, $S'P'$ есть радикальная ось (Ω) и S.

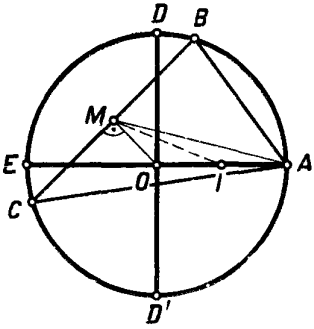
4°. Геометрическое место ω. Пусть OO' фиксирована и S фиксирована, R и R' изменяются так, что $R-R'=d=\text{const}$. Тогда $S\alpha=d$; точка α, значит, также фиксирована; следовательно, точка ω расположена постоянно на перпендикуляре (Δ) к OO' в точке α. Чтобы уточнить геометрическое место точки ω, заметим, что $\alpha\omega=SP=\sqrt{RR'}=\sqrt{R'(R'+d)}$. Если R' изменяется от 0 до ∞, то $\alpha\omega$ также изменяется от 0 до ∞ и, значит, точка ω описывает прямую (Δ) в целом.

Огибающая прямых MM'. Точка T фиксирована, $\angle TPM=90^\circ$ изменяется так, что одна его сторона проходит через фиксированную точку T, а вершина скользит по фиксированной прямой; значит, прямая PM (или MM') касается параболы с фокусом T, для которой (D) — касательная в вершине. Но точка P описывает прямую (D) в целом [как ω описывает в целом (Δ)]; значит, прямая MM' может занимать положение любой касательной к указанной параболе.

Огибающая прямых $S'P'$. Так как $S\alpha=2ST$ и $SP'=2SP$, то из подобия треугольников SPT и $S'SP$ следует подобие треугольников $PS\alpha$ и $S'SP'$. Значит, $\alpha P\perp S'P'$. Проведем через точку P' прямую, параллельную αP, и пусть она пересечет OO' в точке F. Эта прямая перпендикулярна $S'P'$, и точка F фиксирована, так как $SF=2S\alpha=2d$. Прямой угол перемещается так, что одна из его сторон проходит через фиксированную точку F, а вершина скользит по фиксированной прямой (D). Значит, прямая $S'P'$ касается параболы с фокусом F, причем касательной в вершине является прямая (D). Точка P' описывает (как и P) прямую (D) в целом; значит, прямая $S'P'$ может совпадать с любой касательной к указанной параболе.

42. 1°. Угол A острый. Имеем (черт. 163) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 + c^2 - a^2 = d^2$; отсюда $\cos A = \frac{d^2}{2bc} > 0$; отсюда, между прочим, следует, что прямая BC не может пересекать отрезок OA.

Выражение $MA^2 + MO^2$ постоянно. Пусть ABC — какой-нибудь треугольник, вписанный в окружность (O); тогда, обозначая через M середину стороны BC, будем иметь $b^2 + c^2 = 2MA^2 + \frac{a^2}{2}$, откуда $MA^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ и $MO^2 = OB^2 - MB^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Складывая, получим



Черт. 163.

$$MA^2 + MO^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + R^2, \qquad (1)$$

а для треугольника (T) —

$$MA^2 + MO^2 = \frac{d^2}{2} + R^2. \qquad (2)$$

Геометрическое место точек M. Пусть I — середина OA; рассматривая треугольник OMA, будем иметь

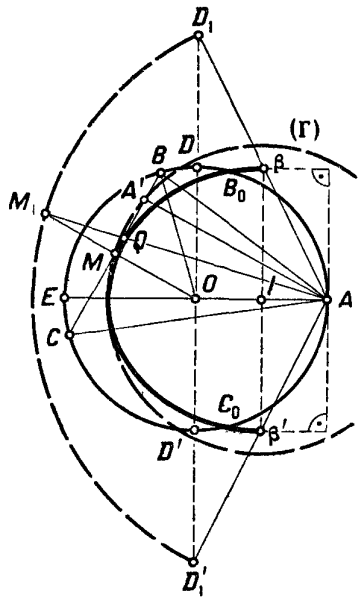
$$MA^2 + MO^2 = 2IM^2 + \frac{R^2}{2} \qquad (3)$$

или на основании (2) $2IM^2 + \frac{R^2}{2} = \frac{d^2}{2} + R^2$, значит,

$$IM^2 = \frac{R^2 + d^2}{4}. \qquad (4)$$

Таким образом, точка M всегда находится на окружности (Γ) с центром I и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{R^2 + d^2}$. Ясно, что при этом точка M должна находиться и внутри окружности (O).

Построение треугольника (T), если задана точка M. Точка M должна удовлетворять только что сформулированным требованиям. Проведем через нее прямую, перпендикулярную OM, и пусть эта прямая пересечет окружность (O) в точках C и B. Точка M будет серединой отрезка BC, и легко доказать, что полученный треугольник ABC удовлетворяет условию вопроса. В самом деле, в полученном треугольнике ABC соотношения (1) и (3) выполнены [только потому, что точки B и C лежат на окружности (O)]; выполнено и соотношение (4), так как точка M взята на окружности (Γ). Из (1), (3) и (4) находим $a^2 + b^2 - c^2 = d^2$, т. е. ABC — действительно треугольник (T). Это исследование позволяет высказать следующее утверждение: геометрическое место точек M — середин сторон BC треугольников (T), есть дуга окружности (Γ), расположенная внутри (O).



Черт. 164.

Существование (T). Условие существования треугольников (T) заключается в том, чтобы окружность (Γ) имела точки, заключенные внутри (O), т. е. $\frac{\sqrt{d^2 + R^2}}{2} < \frac{3R}{2}$ или $d < 2\sqrt{2}R$.

Положение точек пересечения (Γ) и DD'. Радиус $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + R^2}$ окружности (Γ) всегда больше $\frac{R}{2}$; значит, (Γ) и DD' всегда пересекаются в двух точках T и T'; легко находим $OT = \frac{d}{2}$. Точки T и T' легко построить на DD', а значит легко построить и (Γ). В частном случае $d = 2R$ точки T и T' совпадают соответственно с D и D'. Мы будем предполагать, что это имеет место во всем дальнейшем (черт. 164).

2°. Огибающая *BC*. Прямой угол OMB таков, что его вершина M все время расположена на окружности (Γ), а одна из сторон проходит через фиксированную точку O; значит, другая сторона BC постоянно касается эллипса с фокусом O, для которого (Γ) — главная окружность. Второй фокус этого эллипса есть точка A. Для того чтобы построить точку прикосновения BC с огибающей, надо построить точку M_1, симметричную точке O относительно BC; тогда прямая AM_1 пересечет BC в искомой точке Q. Точка M_1 гомотетична точке M в гомотетии $(O, 2)$; точка M описывает дугу $\overset{\smile}{DD'}$, и, значит, точка M_1 описывает дугу $\overset{\smile}{D_1D_1'}$, полученную из $\overset{\smile}{DD'}$ гомотетией $(0, 2)$. Полупрямая AM_1 находится, таким образом, все время внутри угла D_1AD_1'. Этим крайним положениям M_1 (т. е. точкам D_1 и D_1') соответствуют крайние положения точки Q — концы β и β' малой оси эллипса. Точка Q описывает, таким образом, половину эллипса, расположенную слева от его малой оси; этот полуэллипс и есть огибающая BC.

Построение треугольника (T), если задана (O) и или вершина B, или вершина C. Построение треугольника (T) в этом случае сводится к построению касательных, проведенных из точки B (или C) к указанному полуэллипсу. Это возможно прежде всего, если точка B (или C) расположена вне указанного эллипса. Кроме того, точка B (или C) должна лежать на части окружности (O), лежащей вне эллипса и между касательными к эллипсу, проведенными к нему в точках β и β'. Тогда касательные из B (или C) к указанному эллипсу коснутся его в точках, расположенных влево от $\beta\beta'$. Значит, точка B (и C) может описывать лишь дугу B_0EC_0 окружности (O), лежащую вне эллипса. Для построения границ этой дуги достаточно заметить, что, с одной стороны, известна сумма расстояний от любой из этих границ B_0 и C_0 до фокусов O и A — это двойной радиус 2ρ окружности (Γ); с другой стороны, их расстояние до O равно R; достаточно, таким образом, провести окружность радиуса $2\rho - R$ с центром A.

Построение треугольников (T) прямоугольных в *B* или *C*. Эти треугольники имеют вершину в точке E, диаметрально противоположной A, на окружности (O). Задача — частный случай предыдущей; искомые треугольники имеют третьей вершиной D или D'.

3°. Геометрическое место точек *A'*, *N*, *P*. Основание A' высоты, опущенной из A на сторону BC, есть проекция точки A на прямую BC, касающуюся эллипса с фокусом A, для которого (Γ) — главная окружность, и, значит, A', лежит на окружности (Γ). Точка A' описывает часть этой окружности; расположенную влево от прямой, проходящей через точку A параллельно DD'. Точки N и P — середины CA и AB — получаются соответственно из точек C и B гомотетией $\left(A, \frac{1}{2}\right)$. Геометрическое место любой из них есть, следовательно, образ дуги B_0EC_0 в этой гомотетии.

Соотношение $\overline{AB}\cdot\overline{AC'} = \overline{AC}\cdot\overline{AB'} = 2R$. Точки B' и C' — основания высот треугольника (T), опущенных из B и C, — суть вторые точки пересечения прямых AC и AB с окружностью, построенной на BC как на диаметре. Выражая тремя способами степень точки A относительно этой окружности, будем иметь $\overline{AB}\cdot\overline{AC'} = \overline{AC}\cdot\overline{AB'} = \overline{AM}^2 - \overline{MB}^2$. Но на основании (2), 1°, учитывая, что $d = 2R$, будем иметь $\overline{MA}^2 + \overline{MO}^2 = 3R^2$. С другой стороны, из прямоугольного треугольника OMB находим $\overline{MB}^2 + \overline{MO}^2 = R^2$. Вычитая, получим $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2R^2$ и окончательно $\overline{AB}\cdot\overline{AC'} = \overline{AC}\cdot\overline{AB'} = 2R^2$.

Геометрическое место точек *B'* и *C'*. Эти точки получаются из точек B и C в результате инверсии $(A, 2R^2)$. Геометрическое место точек B и C есть дуга B_0EC_0 окружности (O), проходящей через A; значит, геометрическое место точек B' и C' есть отрезок прямой, полученный при инверсии этой дуги — это отрезок прямой DD', заключенный между точками, в которых эта прямая пересекается с прямыми AB_0 и AC_0.

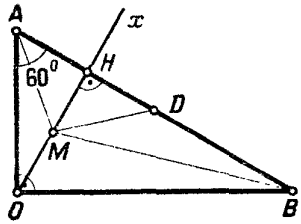
Огибающая прямых *BB'* и *CC'*. Каждая из этих прямых, на основании предыдущего, лежит на стороне прямого угла, вершина которого описывает прямую DD', а другая сторона проходит через фиксированную точку A; значит, BB' и CC' касаются параболы (Π) с фокусом A, для которой DD' — касательная в вершине. Граничные точки дуги параболы, которой касаются BB' и CC', суть точки прикосновения касательных, которые можно провести к этой параболе из граничных точек отрезка, описываемого точками B' и C'.

43. 1°. Значения *y* и *z* (черт. 165):

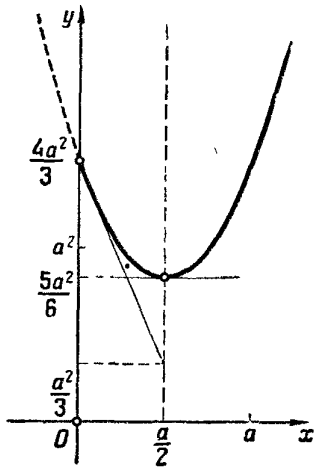
$$y = 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \frac{5a^2}{6},\quad z = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \frac{a^2}{12}.$$

Соотношение между y и z: $y-2z=\frac{2a^2}{3}$; это соотношение выражает теорему о медиане в треугольнике AMB. **График** $y=y(x)$. Часть параболы, соответствующая положительным значениям x; вершина $\left(\frac{a}{2}, \frac{5a^2}{6}\right)$, параметр $p=\frac{1}{4}$ (черт. 166).

Определение M для $y=m^2$. а) Если $m^2<\frac{5a^2}{6}$, задача не имеет решения; б) если $m^2=\frac{5a^2}{6}$, задача имеет одно решение: точка M совпадает с H; в) если $\frac{5a^2}{6}<m^2<\frac{4a^2}{3}$, задача имеет два решения: одно между O и H, другое, симметричное первому относительно H; г) если $m^2=\frac{4a^2}{3}$, задача имеет два решения. Это точка O и ей симметричная O' относительно H; д) если $m^2>\frac{4a^2}{3}$, задача имеет одно решение: точка M — на продолжении луча Ox за точку O'.

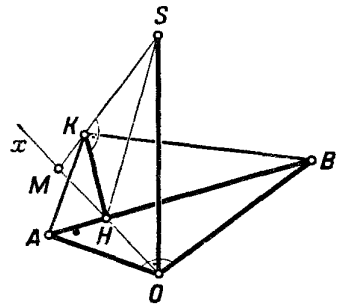


Черт. 165.

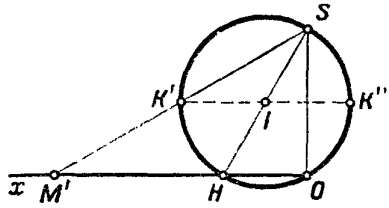


Черт. 166.

2°. **Двугранный угол $A(SM)B$.** $AB\perp Ox$; значит, ребро AB перпендикулярно плоскости SOx. Так как ребро SM расположено в этой плоскости и перпендикулярно HK и AB, то плоскость AKB перпендикулярна ребру SM и, значит, AKB — линейный угол двугранного угла $A(SM)B$. Этот двугранный угол будет прямой, если треугольник AKB будет прямоугольным ($\angle AKB=90°$), и так как H — основание перпендикуляра, опущенного из K на AB, то $\angle AKB$ будет равен 90° тогда и только тогда, когда $\triangle AKB=\triangle AOB$, т. е. $HK=HO$; значит, SH — биссектриса угла MSO, и так как $SM=\sqrt{x^2+a^2}$, то (черт. 167) $\frac{MH}{MS}=\frac{OH}{OS}$ или $\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{\frac{a}{2}}{a}$, откуда $x=\frac{4a}{3}$.



Черт. 167.



Черт. 168.

Геометрическое место AK и BK. Если M описывает Ox, то K описывает в плоскости SOx окружность (Γ) диаметром SH. Геометрическое место AK и BK — два конуса, вершины которых A и B, а направляющая — эта окружность.

Пересечение плоскостей, касательных в K этим конусам. Плоскости, касательные в K к этим конусам, обе проходят через касательную в точке K

к окружности (Γ) и потому пересекаются по касательной к окружности (Γ) в точке K.

Выбор точки M такой, что прямая пересечения указанных касательных плоскостей будет перпендикулярна OAB. В этом случае касательная к окружности (Γ) должна быть параллельна OS; положения точки K суть границы K' и K'' диаметра этой окружности, перпендикулярного OS (черт. 168); лишь одна из этих двух K' и K'' дает решение задачи. Мы видим, что $HM' = 2IK' = HS = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, значит $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$.

44. 1°. Выбор x, при котором треугольник $A'B'C'$ существует. Из $a > b > c$ следует всегда $a + x > b + x > c + x$. Треугольник $A'B'C'$ существует тогда и только тогда, когда $b + x + c + x > a + x$ или $x > a - (b + c)$.

2°. Определение x, при котором треугольник $A'B'C'$ прямоугольный в случае $a = 21$, $b = 19$, $c = 5$. Имеем: $(21 + x)^2 = (19 + x)^2 + (5 + x)^2$, откуда $x = -11$ или $x = 5$; так как должно быть $x > 21 - (19 + 5) = -3$, то $x = 5$. **Случай $a = 21$, $b = 19$, $c = 12$.** В этом случае $x = -16$ или $x = -4$, и так как $x > 21 - (19 + 12) = -10$, то только $x = -4$.

3°. Единственность решения общей задачи.

Имеем $(a + x)^2 = (b + x)^2 + (c + x)^2$ или

$$f(x) \equiv x^2 - 2[a - (b + c)]x + b^2 + c^2 - a^2 = 0. \quad (1)$$

Дискриминант этого уравнения положителен: $\Delta = 2(a - b)(a - c) > 0$; значит, корни всегда действительны и различны. Так как $f[a - (b + c)] = -2(a - b) \times (a - c) < 0$, то число $a - (b + c)$ лежит между корнями и потому существует только один корень уравнения (1), такой, что $x > a - (b + c)$; задача всегда имеет и притом только одно решение.

Исследование. Если A — острый угол, т. е. $a^2 < b^2 + c^2$, то оба корня отрицательны и искомое значение x — отрицательно; если $A = 90°$, то $x = 0$; если A — тупой угол, т. е. $a^2 > b^2 + c^2$, то корни уравнения (1) противоположных знаков, значит решение дает лишь положительный корень. Итак, если все углы треугольника ABC острые и $a > b > c$, то для получения прямоугольного треугольника надо уменьшить все его стороны на одну и ту же длину. Если же ABC — тупоугольный треугольник (A — тупой угол), то для получения прямоугольного треугольника надо все его стороны увеличить на одну и ту же длину.

45. 1°. Геометрическое место центров (γ). Медиатриса отрезка BC.

2°. Геометрическое место точек M' и M'. Окружность с центром A и радиусом $\frac{AC}{\sqrt{2}}$.

3°. $\frac{MB}{MC} = \text{const}$. Отношение $\frac{MB}{MC}$ постоянно равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

46. $BD = \frac{ac}{b+c}$, $DC = \frac{ab}{b+c}$, $AD = \sqrt{\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}}$, $AD \cdot DE = BD \cdot DC$, $DE = \frac{a^2}{b+c}\sqrt{\frac{bc}{(a+b+c)(b+c-c)}}$. Аналогично

$$FG = \frac{b^2}{c+a}\sqrt{\frac{ca}{(a+b+c)(c+a-b)}}.$$

Условие $DE = FG$ принимает вид $(a - b)(a + b + c)[a^2(a + c)(a + c - b) + ab(a + c)(b + c) + b^2(b + c)(b + c - a)] = 0$, откуда $a = b$.

47. $bc = 2R \cdot AN$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$, $BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, $HC = a - BH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, $BH \cdot HC = AH \cdot HI$, $HI = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2bc}R$; аналогично $JK = \frac{(b^2 + a^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2ab^2c}R$. Равенство $HI = JK$ приводится к виду $(a - b)(a + b + c)(a + b - c) = 0$, откуда $a = b$.

48. $AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, $AM \cdot MN = BM \cdot MC$, $MN = \frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$; аналогично $PQ = \frac{b^2}{2\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}$. Равенство $MN = PQ$ приводится к виду $(a^2 - b^2)(2a^4 + a^2b^2 + 2b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) = 0$, откуда $a = b$.

49. Указание. Выразить двумя способами степени точек D и D' относительно данной окружности.

50. 1°. $\triangle DEF$. Треугольник DEF — равносторонний:
2°. $\triangle SDT$. Треугольник SDT — равносторонний.
3°. $\triangle ACM$. Треугольник ACM — равносторонний.
4°. **Значение** AD. $AD = \dfrac{cb}{c+b}$.

51. 1°. **Точки** E, M, F **лежат на одной прямой.** $\angle EMC = 90°$, $\angle CMF = 90°$; значит, $\angle EMF = 180°$.

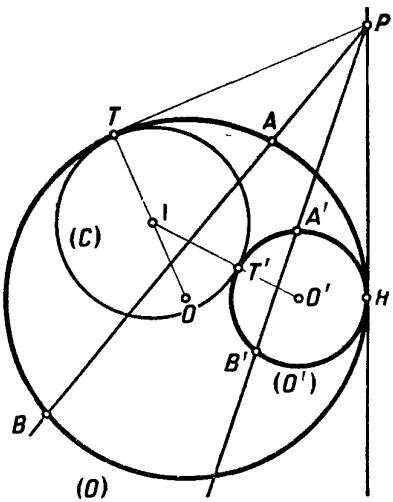
Точки A, M, C **лежат на одной прямой.** Так как $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, то прямые FB и ED — две высоты треугольника AEF; следовательно, AC — третья высота; но $CM \perp EF$; значит, точки A, C, M лежат на одной прямой (на этой третьей высоте).

Окружности, описанные вокруг треугольников ADE **и** ABF. Так как $\angle ADE = \angle AME = 90°$, то окружность, описанная вокруг треугольника ADE, проходит через M; точно так же, так как $\angle ABF = \angle AMF = 90°$, окружность, описанная вокруг треугольника ABF, проходит через M. Обе эти окружности пересекаются в точках A и M, AM — их радикальная ось.

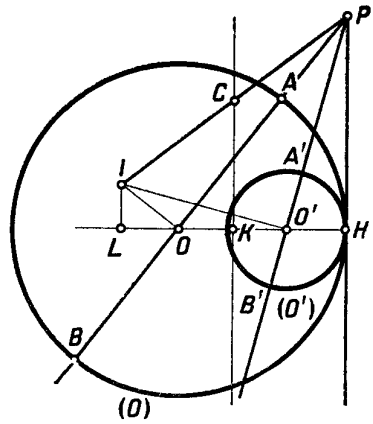
2°. **Вычисление углов** BME **и** DMF. $\angle BME = \angle BCE$, $\angle BCE = \angle BAD$, так как оба эти угла в сумме с углом BCD дают π; значит, $\angle BME = \alpha$; аналогично $\angle DMF = \alpha$. **Биссектриса угла** BMD. Так как $\angle FMC = \angle CME = 90°$, то $\angle CMB = \angle CMD = 90° - \alpha$, прямая MCA — биссектриса угла BMD.

3°. **Вид треугольника** BID. BI — медиана прямоугольного треугольника BEF; значит, $BI = \dfrac{1}{2} EF$; аналогично $DI = \dfrac{1}{2} EF$; значит, $BI = DI$, треугольник IBD — равнобедренный.

Точки I, O, J **лежат на одной прямой.** Точка I принадлежит медиатрисе отрезка BD и т. д. **Окружность, вписанная в** $OBID$. Четырехугольник $OBID$ имеет ось симметрии (OI). Центр вписанной в него окружности лежит в точке, в которой прямая OI пересекается с биссектрисой угла OBI.



Черт. 169.



Черт. 170.

4°. **Значения** $x = BE$ **и** $y = DF$. $x = R(2+\sqrt{3})$, $y = R(2\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

53. Если бы в треугольнике ABC мы имели бы $AB \neq BC$, $BC \neq CA$ и $CA \neq AB$, то окружность Эйлера пересекала бы все три стороны.

Обратное положение верно: если треугольник равнобедренный, то окружность Эйлера касается его основания.

54. 1°. **а) Четыре точки** A, B, A', B' **лежат на одной окружности.** $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \overline{PH}^2$.

б) Исследование центра I. Центр I лежит, например, на медиатрисах отрезков AB и $A'B'$ (эти медиатрисы проходят через фиксированные точки O и O').

в) Секущие PAB **и** $PA'B'$ **проходят через** O **и** O'. В этом случае I есть точка пересечения OT с $O'T'$. Окружность (C) в этом случае касается окружности (O) внутренним образом, а окружности (O') — внешним образом (черт. 169).

г) Соотношение между IO **и** IO'. $IO + IO' = R + R'$.

2°. **Центр окружности** $(ABA'B')$. Если PAB и $PA'B'$ перемещаются параллельно самим себе, перпендикуляры, опущенные из точек O и O' на эти прямые, не меняются; значит, точка I остается фиксированной.

3°. Случай, когда *PAB* и *PA'B'* проходят соответственно через *O* и *O'* (черт. 170). В этом случае медиатриса отрезка AB есть перпендикуляр в точке O к OP, а медиатриса отрезка $A'B'$ — перпендикуляр в точке O' к $O'P$. Углы IOP и $IO'P$ — прямые, и окружность с диаметром IP проходит через O и O'.

Линия, на которой расположен центр *C* окружности (*OIPO'*). Окружность $(OIPO')$ проходит через две фиксированные точки O и O'; значит, точка C лежит на медиатрисе (Δ) отрезка OO'. Проекция C на OO' есть середина K отрезка OO'. Но C — середина PI, значит, если L проекция I на OO', то K — середина проекции HL отрезка PI. **Линия, на которой остается точка *I*.** Так как точка L фиксирована (эта точка симметрична точке H относительно середины K отрезка OO'), то точка I расположена на прямой, проходящей через точку L перпендикулярно HL.

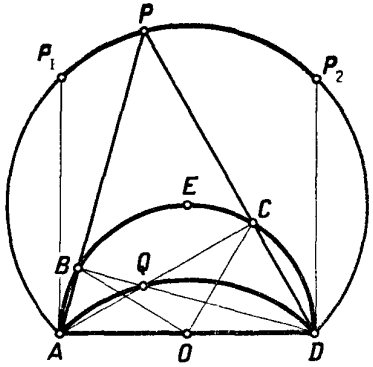
55. Соединим H с C' и B'. Прямые $C'H$ и $C'I$ симметричны относительно AB; значит, AB — одна из биссектрис угла C' треугольника $HB'C'$; аналогично и прямая AC — одна из биссектрис угла B' того же треугольника $HB'C'$. Так как AB и AC пересекаются в A, то AH — биссектриса угла H треугольника $HB'C'$; другая биссектриса этого угла, следовательно, есть BC, но тогда BB' и CC' — вторые биссектрисы углов B' и C' треугольника $HB'C'$, а значит BB' и CC' — соответственно перпендикулярны AC и AB.

56. 1°. Треугольники ABQ, DCQ, ACP и DBP равнобедренные, $\angle BAC = 45°$ и т. д.

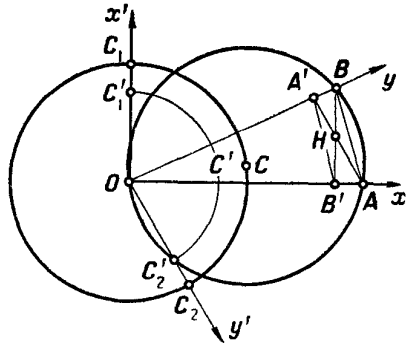
2°. **Высота треугольника *APD*.** AC и DB — две высоты; значит, PQ — третья высота.

3°. **Значения *BC*, *BD*, *BQ*, *QD* и *CD*.** $BC = R\sqrt{2}$, $BD = R\sqrt{3}$, $BQ = AB = R$, $QD = R(\sqrt{3}-1)$, $CD = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

4°. **Геометрическое место точек *P* и *Q*.** Треугольник BDP — равнобедренный прямоугольный ($\angle BPD = 45°$), значит, P лежит на дуге, для которой AD — хорда и которая вмещает угол 45°. Пусть E — середина данной полуокружности. Тогда точка P лежит на дуге радиуса EA с центром E. Из этой окружности надо взять лишь часть P_1P_2, высекаемую из нее касательными к полуокружности, проведенными в точках A и D (черт. 171). Так как $\angle BQC = 135°$, то точка Q



Черт. 171.



Черт. 172.

описывает дугу AQD, равную дуге $\overset{\frown}{P_1P_2}$. Длина отрезка PQ постоянна, он перемещается параллельно самому себе, его длина равна расстоянию между центрами дуг $\overset{\frown}{P_1P_2}$ и $\overset{\frown}{AQD}$, т. е. $2R$.

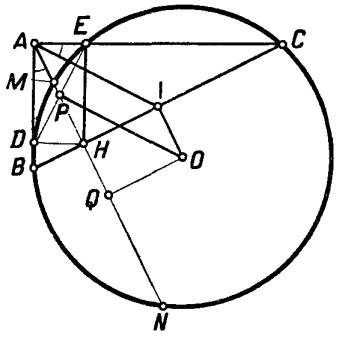
57. 1°. **Радиус окружности, описанной вокруг треугольника *OAB*.** Пусть C — центр окружности, описанной вокруг треугольника OAB, тогда $\angle ACB = 60°$; значит, $AC = AB = a$. Радиус описанной окружности равен a.

Геометрическое место точек *C*. Так как $OC = a$, то точка C лежит на окружности радиуса a с центром O. Однако точка C может занимать на этой окружности лишь все положения на дуге C_1CC_2, которая высекается из этой окружности лучами Ox' и Oy', перпендикулярными Ox и Oy (черт. 172).

2°. **Окружность, описанная вокруг четырехугольника *A'BAB'*.** Так как $\angle AB'B = \angle AA'B = 90°$, то точки A' и B' лежат на окружности с диаметром AB. Следовательно, вокруг четырехугольника $A'BAB'$ можно описать окружность диаметром $AB = a$. Угол $A'AB'$ в сумме с 30° дает 90°, значит, $\angle A'AB' = 60°$; значит, $A'B'$ — сторона правильного вписанного в окружность треугольника; если радиус окружности равен $\frac{a}{2}$, то $A'B' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3°. Геометрическое место точек C. Мы перейдем от C к C', если AB заменим на $A'B' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; значит, геометрическое место точек C' есть дуга $C_1'C'C_2'$ окружности с центром O и радиусом $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ограниченная лучами Ox' и Oy', соответственно перпендикулярными Ox и Oy.

Геометрическое место ортоцентров H треугольника OAB. Пусть H — точка пересечения AA' и BB' — это и есть ортоцентр треугольника OAB. Так как AA' и BB' соответственно перпендикулярны в точках A' и B' к OA' и OB', то эти две высоты пересекаются на окружности, описанной вокруг треугольника $OA'B'$ в точке H, диаметрально противоположной O. Точка H из точки C' получается в результате гомотетии $(O, 2)$; значит, геометрическое место точек H есть дуга H_1HH_2 окружности с центром O и радиусом $a\sqrt{3}$, ограниченная лучами Ox' и Oy'.



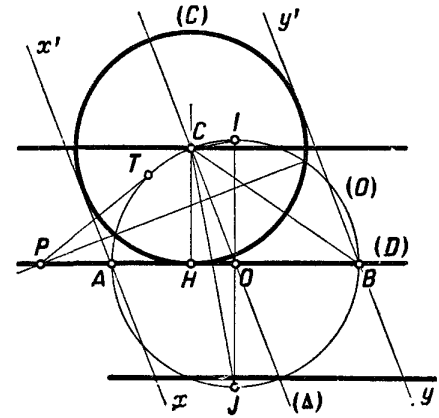
Черт. 173.

58. 1°. Вокруг четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность. Имеем $\overline{AB}\cdot\overline{AD} = \overline{AC}\cdot\overline{AE} = \overline{AH}^2$.

2°. Фиксированные точки, через которые проходит окружность ($BDEC$). Пусть O — центр этой окружности, P — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ADHE$, I и Q — ортогональные проекции точки O на BC и AH. Медиана AI и высота AH антипараллельны относительно AB и AC ($\angle BAH = \angle C = \angle IAC$). Аналогично DE и BC антипараллельны относительно AB и AC (ибо вокруг четырехугольника $BCED$ можно описать окружность). Так как $AH \perp BC$, то $AI \perp DE$. Кроме того, $OP \perp DE$. Значит, $OP \parallel AI$ и, конечно, $AP \parallel IO$. Значит, четырехугольник $APOI$ — параллелограмм и (черт. 173) $AP = IO = HQ$; следовательно, $AQ = \frac{3}{2}AH$ и потому точка Q фиксирована. Пусть M и N — точки пересечения окружности $(BDEC)$ с AH. Имеем: $\overline{AM}\cdot\overline{AN} = \overline{AB}\cdot\overline{AD} = \overline{AH}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{QM}^2$; следовательно, $\overline{QM}^2 = \overline{QN}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{AH}^2 = \frac{9}{4}\overline{AH}^2 - \overline{AH}^2 = \frac{5}{4}\overline{AH}^2$; следовательно, $QM = QN = \frac{\sqrt{5}}{2}AH$, а M и N — фиксированные точки прямой AH.

59. Предварительное замечание. AC и BC — биссектрисы углов, дополнительных к BAx и ABy; они, следовательно, перпендикулярны, и треугольник ABC прямоугольный ($\angle ACB = 90°$).

1°. Построение (C), если известна прямая (Δ). CO — медиана треугольника ACB; значит, $OC = \frac{1}{2}AB = a$ и, значит, на прямой (Δ) имеется два положения для точки C на расстоянии a от O (черт. 174).



Черт. 174.

2°. Геометрическое место точек C. Так как $OC = a$, то геометрическое место точек C при условии, что прямая (Δ) вращается вокруг O, есть окружность (O) с диаметром AB.

3°. Построение (C), если известен радиус R окружности. Центр C, с одной стороны, лежит на окружности (O), с другой стороны — на прямых, параллельных AB и отстоящих от AB на расстоянии R; значит, C — точка пересечения этой окружности с этими параллелями.

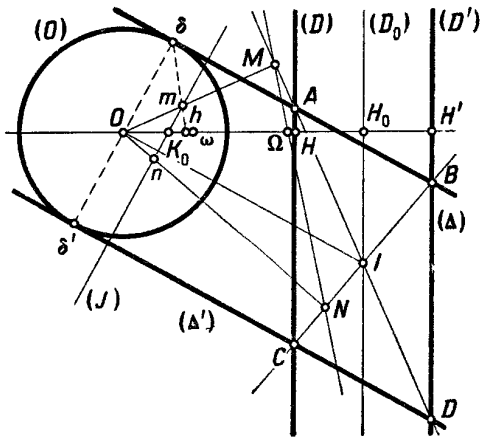
Исследование. Если $R < a$, то параллели, о которых говорилось выше, пересекают окружность (O) каждая в двух точках; имеется четыре решения. Если $R = a$, то параллели касаются (O) в точках I и J — концах диаметра (O), перпендикулярного AB; имеется только два решения. Если $R > a$ — решений нет.

4°. Построение (C), если известна точка P. Точка P есть точка радикальной оси окружностей (C) и (O), а потому она имеет одну и ту же степень

относительно этих окружностей: $\overline{PH}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Это соотношение определяет точку H; ее можно построить, например, так: проводим через точку P касательную PT к окружности (O) и от точки P откладываем отрезок $PH = PT$. Центр C окружности (C) расположен, с одной стороны, на окружности (O), с другой стороны — на перпендикуляре, проведенном через точку H к прямой AB.

5°. **Изучение CI и CJ.** Пучок (CI, CJ, CO, CH) гармонический, а так как $CI \perp CJ$, то CI и CJ — биссектрисы углов, образованных прямыми (Δ) и CH.

Касательные к (C), перпендикулярные (Δ). Касательные к (C), перпендикулярные (Δ), на основании предыдущего, суть прямые, симметричные прямой (D) [касающейся окружности (C) в точке H] относительно прямых CI и CJ. Следовательно, расстояние от I до касательной, симметричной (D) относительно CI, равно OI; эта касательная к окружности (C), значит, постоянно касается также окружности с центром I и радиусом $OI = a$; аналогично и вторая касательная к (C), перпендикулярная (Δ), касается окружности радиуса a с центром J.



Черт. 175.

60. 1°. Геометрическое место точек I. Четырехугольник $ABDC$ по построению — параллелограмм; его диагонали — AD и BC; значит, I — центр этого параллелограмма (черт. 175). Соединим точку I с центром O окружности (O). Прямая OI будет параллельна (Δ) и (Δ') и будет проходить от этих прямых на равных расстояниях, так как она проходит через середину BC и через середину O диаметра (O), соединяющего точки δ и δ' прикосновения касательных (Δ) и (Δ') к окружности (O). Центр I этого параллелограмма лежит на прямой (D_0), параллельной прямым (D) и (D') и проходящей на равных расстояниях от них; всякая точка прямой (D_0) может быть точкой I, так как для этого надо только выбрать касательные (Δ) и (Δ') параллельными OI. Итак, геометрическое место точек I есть прямая (D_0), параллельная (D) и (D'), которая пересекает OHH' в точке H_0 такой, что $OH_0 = 70$ *мм*.

2°. **Поляра точки I относительно (O).** Поляра (J) точки I перпендикулярна OI, а следовательно параллельна диаметру $\delta\delta'$, соединяющему точки прикосновения касательных (Δ) и (Δ') к окружности (O). Так как точка I описывает прямую (D_0), поляра точки I относительно (O) вращается вокруг фиксированной точки K_0 — полюса прямой (D_0) относительно (O). Имеем: $\overline{OK_0} \cdot \overline{OH_0} = R^2 = 30^2$, откуда $\overline{OK_0} = \frac{90}{7}$ *мм*.

3°. **Геометрическое место полюсов m и n прямых AD и BC относительно окружности (O).** Пусть m и n — полюсы прямых AD и BC относительно (O); прямые Om и On соответственно перпендикулярны AD и BC. Рассмотрим пучок $I(O, H_0; A, B)$; он гармонический, так как $AB \parallel OI$ и прямая (D_0) проходит через середину AB. Следовательно, пучок прямых $O(\delta, K_0; m, n)$ также гармонический, так как он образован перпендикулярами, опущенными из точки O на прямые первого пучка. Отсюда следует, что на поляре (J) прямые OK_0, Om, On высекают равные отрезки, иначе K_0 — середина mn. Можно сказать и так: точки m и n симметричны относительно точки K_0; с другой стороны, δ есть полюс прямой (Δ), m — полюс прямой AD, значит δm — поляра A и полюс h прямой (D) относительно (O) лежит на этой поляре. Точка h определяется из соотношения $\overline{Oh} \cdot \overline{OH} = R^2 = 30^2$, $\overline{Oh} = 18$ *мм* Точка h фиксирована и лежит на одной прямой с точками m и δ. Имеем $\frac{\overline{K_0m}}{\overline{O\delta}} = \frac{\overline{hK_0}}{\overline{hO}}$, отсюда $\overline{K_0m} = \frac{18 - \frac{90}{7}}{18} \cdot 30 = \frac{60}{7}$ *мм*. Отсюда следует, что геометрическое место точек m и n есть окружность с центром K_0 и радиусом $\frac{60}{7}$ *мм*.

4°. **Геометрическое место проекций M и N точки O на AD и BC.** Точки M и N являются точками пересечения Om и On с AD и BC соответственно, и так как m и n — полюсы AD и BC относительно (O), то $\overline{Om} \cdot \overline{OM} = \overline{On} \cdot \overline{ON} = R^2 = 30^2$. Эти соотношения показывают, что точки M и N получаются из точек m и n

в результате инверсии (O, R^2). Окружность, являющаяся геометрическим местом точек m и n, не проходит через полюс O инверсии, так как $OK_0 = \frac{90}{7} \neq \frac{60}{7} = K_0m$; значит, геометрическое место точек M и N есть окружность, полученная инверсией (O, R^2) окружности (f), являющейся геометрическим местом точек m и n. Точки μ и μ' окружности (f), лежащие на OH, определяются соотношениями $\overline{O\mu} = \frac{90}{7} - \frac{60}{7} = \frac{30}{7}$, $\overline{O\mu'} = \frac{90}{7} + \frac{60}{7} = \frac{150}{7}$. Если P и P' — образы точек μ и μ' в инверсии $(O, 30^2)$, то $\overline{O\mu} \cdot \overline{OP} = \overline{O\mu} \cdot \overline{OP'} = 30^2$, откуда $\overline{OP} = 210$, $\overline{OP'} = 42$. Центр окружности (F), являющейся геометрическим местом точек M и N, имеет абсциссу 126 *мм*, а радиус равен 84 *мм*.

5°. **Прямые MN проходят через фиксированную точку.** Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника Omn; так как $K_0m = K_0n = \frac{60}{7}$, то мы видим, что эта окружность проходит через две фиксированные точки OH; одна из них — точка O, другая ω — такая, что $\overline{K_0O} \cdot \overline{K_0\omega} = \overline{K_0m} \cdot \overline{K_0n}$, откуда $\overline{K_0\omega} = \frac{K_0m^2}{K_0O} = \left(\frac{60}{7}\right)^2 \frac{90}{7} = \frac{40}{7}$ *мм* и $\overline{O\omega} = \overline{OK_0} + \overline{K_0\omega} = \frac{90}{7} + \frac{40}{7} = \frac{130}{7}$. В инверсии $(0, 30^2)$ окружность, описанная вокруг треугольника Omn, преобразуется в прямую MN. Так как эта окружность (Omn) проходит через фиксированную точку ω, то и прямая MN проходит через фиксированную точку Ω такую, что $\overline{O\omega} \cdot \overline{O\Omega} = 30^2$, откуда $\overline{O\Omega} = \frac{630}{13}$ *мм*.

6°. **Огибающая прямых AD и BC.** В п. 4° мы видели, что геометрическое место точек M и N есть окружность (F) с диаметром PP'; таким образом, AD и BC — вторые стороны прямых углов OMA и ONB, первые стороны которых проходят через фиксированную точку O, а вершины описывают окружность (F). Так как абсцисса центра этой окружности равна 126 *мм*, а радиус равен 84 *мм*, то точка O лежит вне окружности (F). Огибающая AD и BC — гипербола с фокусом O, для которой окружность (F) является главной.

61. 1°. Построение (C). Квадрат расстояния d_1 от центра (C) до O_1 определяется формулой $d_1^2 = R_1^2 + R^2$, а квадрат расстояния d_2 от центра (C) до O_2 определяется формулой $d_2^2 = R_2^2 + R^2$. Проведем в произвольной точке A_1 окружности (C_1) касательную и отложим на ней отрезок $A_1T_1 = R$. Центр окружности (C) будет лежать на окружности (Ω_1) с центром O_1 и радиусом O_1T_1; аналогично, в произвольной точке A_2 окружности (C_2) проведем касательную и отложим на на ней отрезок $A_2T_2 = R$. Центр окружности (C) будет лежать на окружности (Ω_2) с центром O_2 и радиусом O_2T_2. Если окружности (Ω_1) и (Ω_2) пересекаются или касаются, их общая точка — центр окружности (C). Решения нет, если окружности (Ω_1) и (Ω_2) не пересекаются.

Геометрическое место центров окружности (C). Центр окружности (C) имеет одну и ту же степень R^2 относительно окружностей (C_1) и (C_2) и, значит, лежит на радикальной оси этих окружностей. С другой стороны, так как окружности (C_1) и (C_2) лежат одна вне другой, все точки их радикальной оси лежат вне этих окружностей и, значит, каждая точка радикальной оси (Δ) окружностей (C_1) и (C_2) может служить центром одной из окружностей (C). Итак, геометрическое место центров окружностей (C), ортогональных окружностям (C_1) и (C_2), есть вся радикальная ось (Δ) двух последних окружностей.

Фиксированные точки F и F'. Окружности (C) с центрами на (Δ) ортогональны окружностям (C_1) и (C_2) и, значит, образуют пучок, сопряженный с пучком, определяемым окружностями (C_1) и (C_2). Эти окружности (C) образуют, следовательно, пучок окружностей, проходящих через предельные точки пучка, определяемого окружностями (C_1) и (C_2). Для построения предельных точек F и F' пучка $[(C_1), (C_2)]$ достаточно построить окружность (Ω), ортогональную (C_1) и (C_2) и имеющую центром O — точку пересечения радикальной оси (Δ) окружностей (C_1) и (C_2) с их линией центров. Эти точки F и F' сопряжены и относительно (C_1) и относительно (C_2).

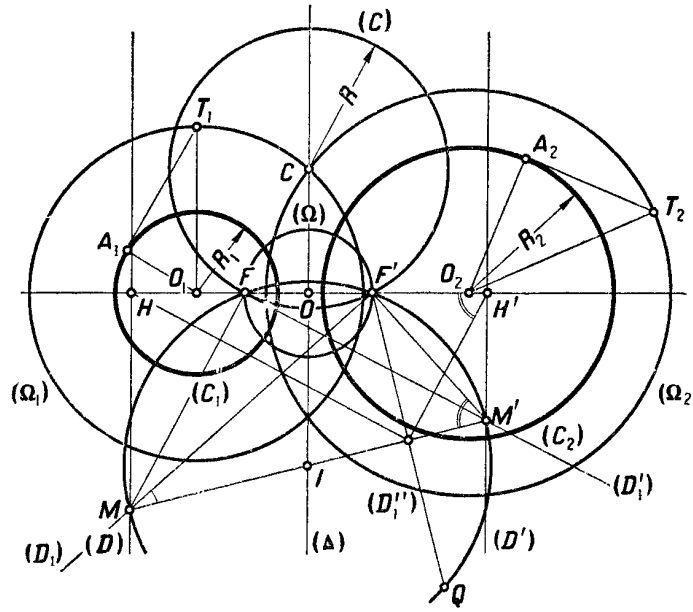
2°. **а) Точки M и M', сопряженные одновременно и относительно (C_1) и относительно (C_2).** Пусть дана какая-нибудь точка M. Геометрическое место точек, сопряженных с точкой M относительно окружности (C_1), есть поляра точки M относительно (C_1), а именно — это прямая, перпендикулярная O_1M; аналогично, геометрическое место точек, сопряженных точке M относительно окружности (C_2), есть поляра точки M относительно (C_2) — это прямая, перпендикулярная O_2M. Значит, если точка M не лежит на прямой O_1O_2, то эти поляры пересекаются, причем в единственной точке M', которая будет сопряжена точке M и относительно окружности (C_1) и относительно окружности (C_2). Если точка M лежит

на прямой O_1O_2, две указанные поляры, вообще говоря, параллельны и не имеют общей точки. Однако надо еще рассмотреть точки F и F', так как в этом случае указанные поляры совпадают и, значит, точке F, соответствуют все точки прямой, проходящей через F' перпендикулярно O_1O_2, а с точкой F' сопряжены все точки прямой, проходящей через F перпендикулярно O_1O_2. Итак, если точка M не лежит на прямой O_1O_2, ей всегда соответствует и притом только одна точка M', гармонически сопряженная относительно каждой из окружностей (C_1) и (C_2).

б) Построение M'. Если M не лежит на прямой O_1O_2, то через три точки F, F' и M можно провести и притом только одну окружность. Точка M' — это точка, диаметрально противоположная точке M этой окружности. Заметим, что $\angle MFM' = \angle MF'M' = 90°$, поэтому точка M' является также точкой пересечения прямой, перпендикулярной MF в точке F, с прямой, перпендикулярной MF' в точке F'.

в) Геометрическое место точек M и M', если MM' имеет данную длину l. Окружность $(MFF'M')$ ортогональна окружностям (C_1) и (C_2) и имеет диаметр $MM' = l$. На основании 1° можно построить лишь две окружности (симметричные относительно O_1O_2), ортогональные (C_1) и (C_2) и имеющие данный радиус $\frac{l}{2}$ — эти две окружности и образуют геометрическое место точек M и M'.

3°. Геометрическое место точек M' при условии, что точка M описывает прямую (D), перпендикулярную O_1O_2. Пусть H — точка пересечения (D) и O_1O_2 (черт. 176). Так как MM' — диаметр окружности (C), то середина I отрезка MM' лежит на радикальной оси (Δ) окружностей (C_1) и (C_2). Следовательно, ортогональные проекции H и H' точек M и M' на O_1O_2 симметричны относительно



Черт. 176.

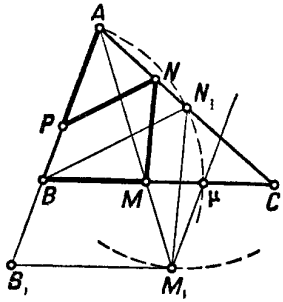
точки O. Так как H — фиксированная точка, то H' также фиксированная точка; значит, точка M' лежит на прямой (D'), проходящей через точку H' перпендикулярно O_1O_2. Обратно: если M' — любая точка прямой (D'), то существует точка M на прямой (D) такая, что $\angle M'FM = 90°$. Значит, все точки прямой (D') принадлежат геометрическому месту точек M'. Прямая (D') совпадает с (D), если (D) совпадает с (Δ). Заметим, что геометрическое место точек M' включает в себя и прямую O_1O_2, так как, если M — бесконечно удаленная точка прямой (D), то M' — любая точка прямой O_1O_2.

Огибающая MM'. Пусть K' — ортогональная проекция точки F' на MM'. Четырехугольники $HMK'F'$ и $H'M'K'F'$ вписанные; значит, $\angle K'HF' = \angle K'MF'$ и $\angle K'H'F' = \angle K'M'F'$. Следовательно, так как треугольник $MF'M'$ прямоугольный ($\angle MF'M' = 90°$), то $\angle HK'H' = 90°$. Геометрическое место точек K' есть окружность с диаметром HH'. Следовательно, огибающая MM' есть линия второго порядка с фокусами F и F'; для которой окружность, построенная на HH' как на диаметре, главная.

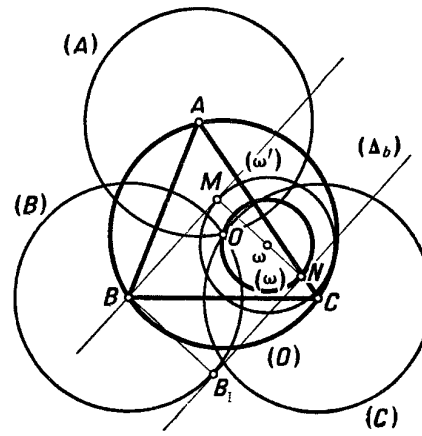
4°. **Геометрическое место точек M' при условии, что точка M описывает прямую, проходящую через F.** В этом случае $\angle MFM' = 90°$ и геометрическое место точек M' есть прямая (D_1'), перпендикулярная (D_1) и проходящая через F (черт. 176). Заметим для полной строгости, что геометрическое место точек M' включает в себя еще прямую (D_1''), проходящую через F' и перпендикулярную O_1O_2, так как точка M' есть любая точка этой прямой, если M совпадает с F.

Огибающая MM'. Пусть Q — точка, симметричная точке F' относительно MM'. Тогда прямая (D_1') — биссектриса угла $F'FQ$. Точка Q лежит, следовательно, на прямой (Δ_1), симметричной прямой FF' относительно прямой (D_1'). Прямая MM' — медиатриса отрезка $F'Q$, один конец F' которого фиксирован, а другой, т. е. Q, описывает прямую (Δ_1). Огибающая MM' есть, следовательно, парабола с фокусом F и директрисой (Δ_1).

62. Построим фигуру, гомотетичную искомой ломаной $BMNPA$ относительно точки A, следующим образом: построим окружность с центром B и радиусом BA; пусть эта окружность пересечет AC в точке N_1, а BC — в точке μ. Через точку μ проведем прямую, параллельную AB, затем построим окружность с центром N_1 и радиусом AB, пересекающую эту параллель в точке M_1, и, наконец, через точку M_1



Черт. 177.



Черт. 178.

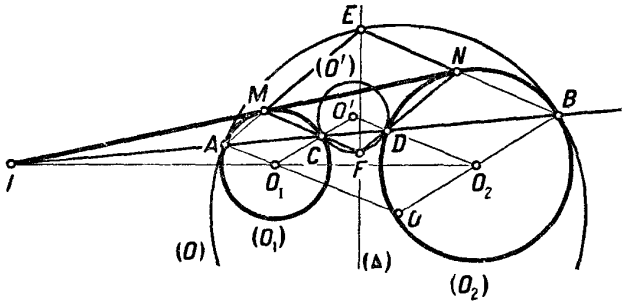
проведем прямую, параллельную BC. Ломаная $ABN_1M_1B_1$ такова, что $B_1M_1 = M_1N_1 = N_1B = BA$ (черт. 177). Пусть прямая AM_1 пересекает BC в точке M; проведем через точку M прямую, параллельную M_1N_1; пусть она пересечет AC в точке N; наконец, через точку N проведем прямую, параллельную N_1B_1 и пересекающую AB в точке P; точки M, N, P удовлетворяют условию вопроса, так как в силу гомотетии с центром A мы имеем: $BM = MN = NP = PA$. Вторая точка пересечения окружности с центром N_1 и радиусом AB также дает решение, однако при этом точки M, N, P будут лежать на продолжении сторон.

63. Обозначим через R радиус окружности (O), описанной вокруг треугольника ABC. Пусть (Δ_b) — общая касательная к (B) и (ω), касающаяся (B) в точке B_1, а (ω) — в точке N. Прямая $N\omega$ пересекает в точке M прямую, параллельную (Δ_b) и проходящую через точку B. Имеем (черт. 178): $NM = B_1B = R = N\omega + \omega M$, $\omega M = R - r$, где r — радиус окружности (ω); аналогично доказывается, что расстояние от точки ω до прямых (Δ_a) и (Δ_c), проходящих через A и C и параллельных соответственно общим касательным к окружностям (A) и (ω), (C) и (ω), равно $R - r$. Значит, окружность, концентричная (ω), радиуса $R - r$, касается всех трех прямых: (Δ_a), (Δ_b) и (Δ_c). С другой стороны, эта окружность касается и окружности (O), так как $O\omega = r = R - (R - r)$.

64. Геометрическое место точек E и F. Окружность (O_2) соответствует окружности (O_1) в гомотетии $\left(I, \pm\frac{R_2}{R_1}\right)$. Треугольнику MAC в этой гомотетии соответствует треугольник NDB; значит, их соответственные стороны параллельны и $MENF$ — действительно параллелограмм.

Хорды AM и BN антипараллельны; $\angle EAB = \angle ENM$, $\Delta EMN \sim \Delta AEB$, откуда $\overline{EA}\cdot\overline{EM} = \overline{EB}\cdot\overline{EN}$; значит, точка E лежит на радикальной оси окружностей (O_1) и (O_2); аналогично и хорды MC и ND пересекаются в точке F, лежащей на радикальной оси окружностей (O_1) и (O_2). Обратно. Пусть E и F — две точки радикальной оси (Δ), симметричные относительно точки пересечения (Δ) с общей касательной MN к окружностям (O_1) и (O_2). Тогда четырехугольник $MENF$ —

параллелограмм. прямые EM и EN определяют на окружностях (O_1) и (O_2) точки A и B (антигомологические); прямая AB проходит, следовательно, через точку I. Таким образом, геометрическое место точек E и F — вся радикальная ось (Δ) окружностей (O_1) и (O_2) (черт. 179).



Черт. 179.

Окружности (AEB) и (CFD) касаются данных. Так как точка E лежит на радикальной оси (Δ) окружностей (O_1) и (O_2), то $\overline{EM}\cdot\overline{EA}=\overline{EN}\cdot\overline{EB}$. Произведем инверсию $(E, \overline{EM}\cdot\overline{EA})$. Окружности (O_1) и (O_2) перейдут соответственно в себя. Общая же касательная MN к ним преобразуется в окружность, проходящую через точку E и касающуюся данных окружностей в точках A и B. Итак, окружность (EAB) касается данных окружностей; аналогично доказывается, что и окружность (FCD) касается данных; для этого надо рассмотреть инверсию $(F, \overline{FC}\cdot\overline{FM})$.

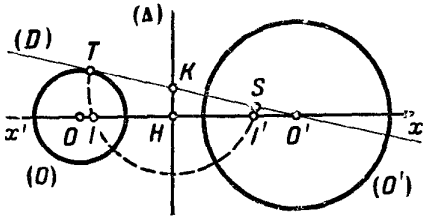
65. 1°. Степень точки M относительно данных окружностей. $P=x^2-1$, $P'=(x-5)^2-4=x^2-10x+21$.

Абсцисса точки H. Абсцисса точки H определяется из уравнения $P=P'$, что дает $x=\frac{11}{5}$. Степень точки H относительно (O) и (O') равна $\left(\frac{11}{5}\right)^2-1=\frac{96}{25}$.

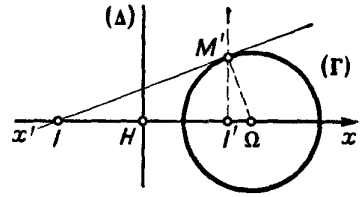
Положение точки M, для которого $P'=kP$. Получаем уравнение $(k-1)x^2+10x-(k+21)=0$. Его дискриминант $\Delta=k^2+20k+4$ положителен или равен нулю, если или $k\leqslant -10-4\sqrt{6}$ или $k\geqslant -10+4\sqrt{6}$. Уравнение $P'=kP$ имеет два действительных различных корня, если исключаются знаки равенства; если же $k=-10\pm 4\sqrt{6}$, то корень двойной. Для того чтобы показать, что при наличии различных решений M' и M'' эти точки соответствуют друг другу в одной и той же инверсии относительно H, заметим, что (α — координата точки H) $\overline{HM'}\cdot\overline{HM''}=(x'-\alpha)(x''-\alpha)=x'x''-\alpha(x'+x'')+\alpha^2$. Подставляя сюда $x'x''$, $x'+x''$ и $\alpha=\frac{11}{5}$, получим $\overline{HM'}\cdot\overline{HM''}=\frac{96}{25}$. Точки M' и M'' соответствуют друг другу в инверсии $\left(H, \frac{96}{25}\right)$. Степень инверсии оказалась равной степени $\frac{96}{25}$ точки H относительно (O) и (O') вот почему: если $k=0$, то точки M' и M'' являются точками, в которых окружность (O') пересекает ось $x'x$, и произведение $\overline{HM'}\cdot\overline{HM''}$ должно быть равно степени точки H относительно (O') [и (O)].

2°. Окружности, проходящие через H, касающиеся (O) и ортогональные (O'). Обозначим через p степень только что рассмотренной инверсии. В инверсии (H, p) окружности (O) и (O') инвариантны, а всякая окружность, удовлетворяющая условию задачи, преобразуется в прямую, касающуюся (O) и ортогональную (O'), т. е. в касательную, проведенную из точки O' к окружности (O). Таких касательных существует две; значит, и окружностей, удовлетворяющих условию задачи, также две. Пусть (C) — одна из них и (D) — прямая, полученная из (C) инверсией (H, p). Если окружность (Γ) пучка (F), определяемого окружностями (O) и (O'), касается (C), то так как (Γ) инвариантна в инверсии (H, p), то (Γ) касается и прямой (D). Остается установить, что в пучке (F) существуют окружности, отличные от (C) и касающиеся прямой (D). Мы знаем уже одну окружность пучка (F), касающуюся (D) — это окружность (O); пусть T — точка прикосновения прямой (D) к окружности (O). Если K — точка, в которой пересекаются (D) и радикальная ось (Δ) окружностей (O) и (O'), то другая окружность (Γ) пучка (F), касающаяся прямой (D), должна касаться (D) в точке S, симметричной T относительно K. Центр этой окружности (Γ) лежит в точке пересечения прямой OO' с перпендикуляром, проведенным в точке S к прямой $O'T$.

3°. Окружности, проходящие через точки H и I и касающиеся данной окружности пучка (F). Окружность, построенная на TS как на диаметре, ортогональна окружности (O), а ее центр K лежит на радикальной оси окружностей (O) и (O'); значит, эта окружность принадлежит пучку, сопряженному с (F); следовательно, проходит через предельные точки I и I' пучка (F) (чертеж 180). Обозначим через I одну из них, например ту, которая лежит внутри (O). Точка H лежит вне любой окружности пучка (F); значит, для того чтобы через точки H

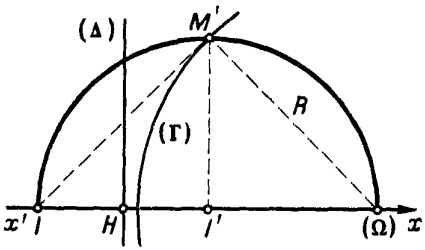


Черт. 180.



Черт. 181.

и I можно было провести окружность, касательную к данной окружности (Γ) пучка (F), необходимо и достаточно, чтобы и точка I лежала вне (Γ), т. е. чтобы (Γ) была любой из тех окружностей, которые содержат внутри себя вторую предельную точку I'. Предположим, что окружность (Γ) пучка (F) изменяется, удовлетворяя этому условию. Пусть M — точка прикосновения с ней какой-нибудь из двух окружностей, проходящих через I и H и касающихся ее. Для того чтобы найти геометрическое место точек M, произведем инверсию (H, HI^2) (черт. 181). В этой инверсии точка I и окружность (Γ) инвариантны, а каждая окружность, проходящая через I и H и касающаяся (Γ), преобразуется в прямую, проходящую через I и касающуюся (Γ); точка M преобразуется, следовательно, в точку M' прикосновения касательной, проведенной из I к (Γ). Окружность с диаметром IM' принадлежит пучку, сопряженному с пучком (F), ибо эта окружность ортогональна окружности (Γ) и «окружности-точки» I. Значит, эта окружность проходит и через точку I', а потому $\angle II'M' = 90°$. Таким образом, точка M' расположена на перпендикуляре к OO', проведенном через точку I'; точка M' при изменении (Γ) может занимать на этом перпендикуляре всевозможные положения; значит, указанная прямая и есть геометрическое место точек M'. Геометрическое место точек M получается из этого геометрического места в результате инверсии (H, HI^2) — это окружность, построенная на $I'H$ как на диаметре.



Черт. 182.

Определение такой окружности (Γ), для которой две предыдущие окружности будут ортогональны. Для того чтобы две окружности, проходящие через точки I и H и касающиеся (Γ), были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы прямые, полученные из них в инверсии (H, HI^2), были также ортогональны, иначе говоря, чтобы касательные, проведенные из точки I к окружности (Γ), были наклонены под углом 45° к оси $x'x$. Это будет так, если прямоугольный треугольник $IM'\Omega$ (черт. 182) [Ω — центр окружности (Γ)] равнобедренный и I' — середина $I\Omega$. Итак, центр окружности (Γ), для которой окружности, проходящие через точки I и H и касающиеся окружности (Γ) пучка (F), будут ортогональны, есть точка Ω, симметричная I относительно I'.

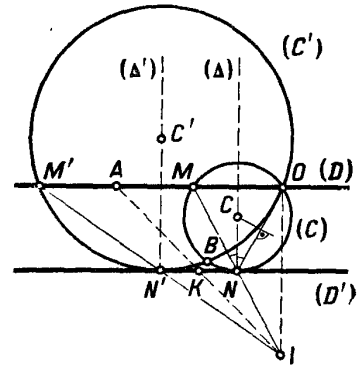
Вычисление радиуса (Γ). В п. 1° мы нашли, что степень точки H относительно всякой окружности пучка (F) равна $\frac{96}{25}$. Значит, в частности, $HI^2 = \frac{96}{25}$, $HI = \frac{4\sqrt{6}}{5}$, $II' = 2IH = \frac{8\sqrt{6}}{5}$, $I'\Omega = \frac{8\sqrt{6}}{5}$, значит, $R = I'\Omega\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{3}}{5}$.

66. 1°. Построение центров C и C' окружностей (C) и (C'). Центр C окружности (C) лежит на медиатрисе (Δ) отрезка OM; точка прикосновения окружности (C) к прямой (D') есть точка, в которой (Δ) пересекает (D'). Центр C окружности (C) лежит в точке пересечения прямой (Δ) и медиатрисы отрезка ON (черт. 183); аналогично строится центр C' окружности (C').

Свойства прямых MN и $M'N'$. Прямые (Δ) и (D') являются биссектрисами углов между прямыми MN и ON. Прямая MN, следовательно, симметрична

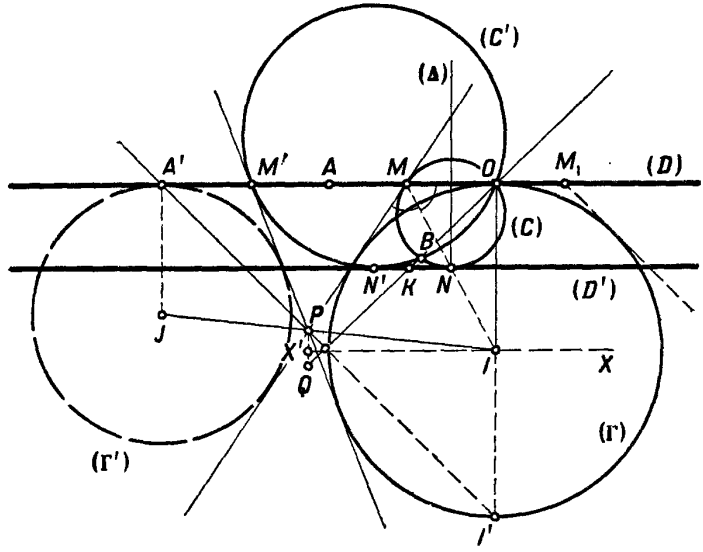
прямой ON относительно (D'); значит, она проходит через фиксированную точку I, полученную из O симметрией в (D'). Прямая $M'N'$ также проходит через ту же фиксированную точку I.

Геометрическое место точек B. Пусть K — точка, в которой прямая IA пересекает (D'). Это фиксированная точка, и поскольку A — середина MM', то K — середина NN'. Точка K имеет, следовательно, одну и ту же степень относительно окружностей (C) и (C'), поэтому лежит на радикальной оси этих двух окружностей, которая есть фиксированная прямая OK. Итак, точка B лежит на фиксированной радикальной оси OK окружностей (C) и (C'). Для определения геометрического места точек B установим на прямой KO положительное направление от K к O. Тогда $\overline{KB} = \dfrac{\overline{KN}^2}{\overline{KO}}$. Знаменатель — постоянный и положительный, числитель также положителен и в силу $\overline{KN} = \dfrac{1}{2}\overline{AM}$ может принимать все действительные значения от 0 до $+\infty$. Значит, геометрическое место точек B есть полупрямая, выходящая из точки K и проходящая через O.



Черт. 183.

2°. Свойства касательных в точках M и M' к окружностям (C) и (C'). Точка N, в которой прямая MI пересекает (C), есть середина дуги $\overset{\frown}{OM}$ окружности (C). Значит углы, образованные этой прямой с прямой (D) и с касательной MP к окружности (C) в точке M, равны между собой (один из них вписан в дугу, другой образован касательной и хордой, отсекающей ту же дугу). Значит, точка I равноотстоит от прямой (D) и от прямой MP; аналогично доказывается, что точка I равноотстоит от прямой (D) и от касательной $M'P$ в точке M' к окружности (C'). Так как точка I равноотстоит от трех прямых: (D), MP и $M'P$, то она расположена на биссектрисе одного из углов, образованных прямыми MP и $M'P$, и, значит, все эти три прямые касаются окружности (Γ) с центром I и радиусом OI.



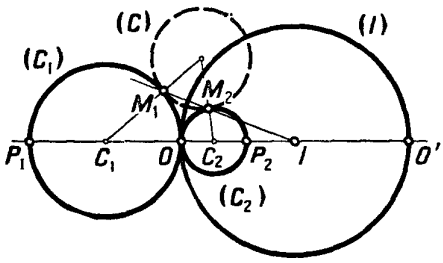
Черт. 184.

Геометрическое место точек P. Точка O есть точка прикосновения окружности (Γ) со стороной MM' треугольника MPM'; значит, точка A', симметричная O относительно середины A отрезка MM', также является точкой прикосновения к MM' другой окружности (Γ'), касающейся этих трех прямых; центр окружности (Γ') расположен на той же биссектрисе угла P, что и точка I [если точка M расположена между A и O, как на черт. 184, то окружности (Γ) и (Γ') —

обе вневписанные окружности в углы M' и M треугольника $PM'M$; если же точка M лежит вне отрезка AO, то (Γ') будет окружностью, вписанной в треугольник MPM', а (I) — окружность, вневписанная в угол P]. Окружности (Γ) и (Γ') гомотетичны по отношению к центру P; значит, точка A' окружности (Γ') и точка I' окружности (Γ), диаметрально противоположная точке O, лежат на одной прямой с точкой P. Итак, точка P лежит на фиксированной прямой, проходящей через две фиксированные точки: A' и I'. Для того чтобы найти геометрическое место точек P, можно рассматривать точку P как точку пересечения фиксированной прямой $A'I'$ с касательной, отличной от (D), проведенной из точки M к окружности (Γ). Если точка M приближается к A, то точка M' также приближается к A. Касательные, проведенные из этих двух точек к (Γ), стремятся к совпадению, и точка P также стремится к совпадению с общей точкой касания; так как точка P всегда расположена на прямой $A'I'$, то, когда точка M совпадает с A, точка P есть вторая точка E пересечения прямой $A'I'$ с окружностью (Γ). Когда точка M удаляется от точки A вправо, точка P описывает отрезок EA', в то время как точка M описывает отрезок OA. Затем, когда точка M описывает отрезок OM_1 [точка M_1 такова, что касательная, проведенная из нее к окружности (Γ), параллельна $A'I'$], точка P описывает все продолжение отрезка EA' за точку A'; наконец, когда точка M переходит через точку M_1 и неограниченно удаляется вправо, точка P описывает продолжение отрезка $A'I'$ за точку I'. Итак, геометрическое место точек P есть прямая EI' за вычетом отрезка EI'.

Положения точек M и M', при которых окружности (C) и (C') будут ортогональны. Направления касательных к окружностям (C) и (C') в точке O симметричны направлениям касательных к этим окружностям, проведенным в точках M и M' относительно прямой, перпендикулярной (D). Поэтому для того чтобы окружности (C) и (C') были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы прямые MP и $M'P$ были ортогональны и, следовательно, чтобы точка P принадлежала геометрическому месту точек, для каждой из которых окружность (Γ) видна под прямым углом — это окружность $(I, IO\sqrt{2})$. Она пересекает $A'I'$ в двух точках; каждой из них соответствует пара точек: M и M'. Задача всегда имеет два решения.

3°. Преобразование фигуры инверсией $(O, \overline{OI}^2)$. В этой инверсии прямая (D') перейдет в окружность (Γ), а окружности (C) и (C'), касающиеся (D'), — в касательные к (Γ), параллельные соответственно касательным в точке O к окружностям (C) и (C'). Их направления, как это указывалось выше, симметричны направлениям прямых MP и $M'P$ относительно перпендикуляра к (D) или, что то же самое, относительно любой прямой, параллельной (D). Значит, прямые, в которые перейдут (C) и (C'), будут прямыми, симметричными прямым MP и $M'P$ относительно прямой $X'X$, проходящей через точку I параллельно (D). Образ Q точки B в этой инверсии есть, следовательно, точка, симметричная P относительно $X'X$. Для того чтобы окружности (C) и (C') были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы прямые, в которые они преобразуются, были ортогональны; значит, точка Q, следовательно и P, принадлежит геометрическому месту точек, для каждой из которых окружность (Γ) видна под прямым углом. Мы приходим к тому, что выше было получено иным путем.



Черт. 185.

67. 1°. Образ (C) в инверсии (I, R^2). Всякая окружность, ортогональная окружности (I), инвариантна в инверсии (I, R^2).

2°. Изучение окружностей (C), ортогональных окружности (I) и касающихся окружности (C_1). Всякая окружность (C), ортогональная окружности (I) и касающаяся (C_1), инвариантна в инверсии (I, R^2) и, значит, касается окружности (C_2), полученной инверсией (C_1). Точки прикосновения M_1 и M_2 окружности (C) к окружностям (C_1) и (C_2) соответствуют друг другу в этой инверсии, и, значит, прямые M_1M_2 постоянно проходят через точку I. Линия (C_2), которая есть, вообще говоря, окружность, касающаяся в точке O окружности (I), вырождается в прямую [касающуюся также в точке O окружности (C_2)] в случае, если (C_1) проходит через точку I.

Соотношение между R, R_1 и R_2. Пусть P_1 и P_2 — точки, диаметрально противоположные точке O относительно окружностей (C_1) и (C_2) (черт. 185). Имеем: $\overline{IP_1}\cdot\overline{IP_2}=\overline{IO}^2$; отсюда следует, что точки P_1 и P_2 гармонически сопряжены относительно пары точек O, O'; это можно записать и так:

$$\frac{1}{\overline{OP_1}}+\frac{1}{\overline{OP_2}}=\frac{2}{\overline{OO'}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{R}. \qquad (1)$$

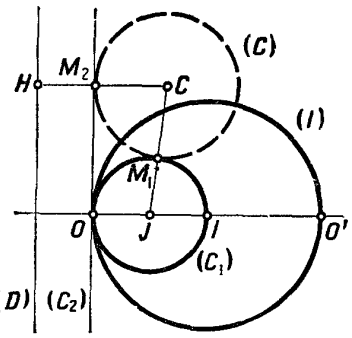
3°. Определение (C_1) и (C_2) таких что

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\frac{1}{a^2}. \qquad (2)$$

Вопрос сводится к решению системы (1), (2) или $x_1+x_2=2\beta$, $x_1^2+x_2^2=a^2$, где $x_1=\frac{1}{R_1}$, $x_2=\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{a}=\alpha$, $\frac{1}{R}=\beta$. Второе уравнение можно переписать так: $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2$, откуда $x_1x_2=2\beta^2-\frac{a^2}{2}$. Таким образом, x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-2\beta x+2\beta^2-\frac{a^2}{2}=0. \qquad (3)$$

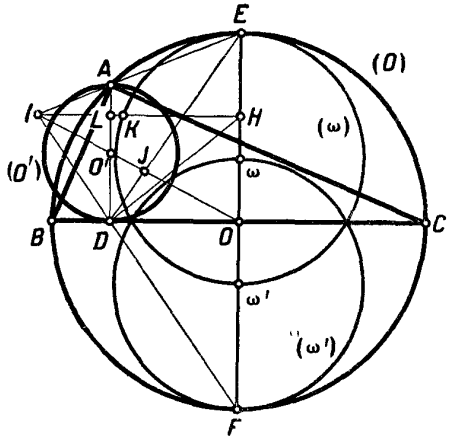
Единственное условие возможности решения — это действительность корней этого уравнения, что дает $a\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}}$. Итак, для любого $a\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}}$ мы имеем единственную пару окружностей: (C_1), (C_2), удовлетворяющую условию задачи; (C_1) — любая из них.



Черт. 186

Частный случай: $a=\frac{R}{2}$. В этом случае один из корней уравнения (3) равен нулю, другой 2β, т. е. $\frac{2}{R}$. Нулевому корню соответствует прямая, касающаяся в точке O окружности (I). Корню $\frac{2}{R}$ соответствует окружность с центром J таким, что $\overline{OJ}=\frac{R}{2}$; это окружность, построенная на OI как на диаметре.

4°. Геометрическое место центров окружностей (C), если $a=\frac{R}{2}$. В этом случае окружность (C_1) — это окружность, построенная на OI как на диаметре, а (C_2) — касательная к окружности (I) в точке O (черт. 186). Продолжим радиус CM_2 окружности (C) на длину M_2H, равную $\frac{R}{2}$; получим точку H, всегда расположенную на фиксированной прямой (D), параллельной прямой (C_2), проходящей на расстоянии $\frac{R}{2}$ от прямой (C_2) по другую сторону от точки I. Из равенства отрезков CM_1 и CM_2 следует равенство отрезков CJ и CH; значит, точка C лежит на параболе (P) с фокусом J и директрисой (D). Так как точка M_2 описывает прямую (C_2) в целом, точка H описывает прямую (D) в целом, а значит C описывает параболу (P) в целом.

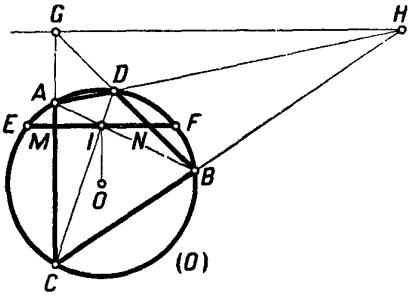


Черт. 187.

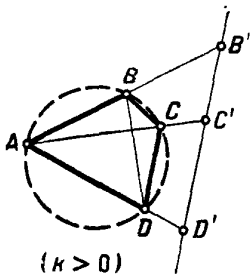
68. Пусть (O') — окружность с диаметром AD, где AD — высота треугольника ABC. Проведем диаметр EF окружности (O), лежащий на медиатрисе отрезка BC. Центры I и J гомотетий окружностей (O) и (O') суть точки пересечения линии OO' центров этих окружностей с прямыми EA и ED, соединяющими концы параллельных радиусов; прямая ID проходит через F. Заметим, что если A стремится к E, то точка I стремится также к точке E, а J — к точке ω отрезка OE такой, что $\overrightarrow{O\omega}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$. $O\omega=\frac{R}{3}$; аналогично, если точка A стремится к точке F, точка I стремится также к F, а точка J стремится к точке ω' отрезка OF такой, что $\overrightarrow{O\omega'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$, $O\omega'=\frac{R}{3}$ (черт. 187). Проведем окружность (ω) с центром ω и радиусом ωE и окружность (ω') с центром ω' и радиусом $\omega'F$; эти окружности

проходят соответственно через точки ω' и ω. Опустим из точки I перпендикуляр IH на диаметр EF; он пересечет AD в точке L, а окружность (ω) — в точке K. Имеем $\frac{HI}{HL}=\frac{OI}{OO'}=1:\left(1-\frac{IO'}{IO}\right)=1:\left(1-\frac{AD}{2R}\right)$, откуда $HI^2=\frac{4R^2(R^2-AD^2)}{(2R-AD)^2}$. Так как HK — перпендикуляр к диаметру $E\omega'$ окружности (ω), то $HK^2=\overline{EH}\cdot\overline{H\omega'}=\overline{EH}\left(\frac{4}{3}R-\overline{EH}\right)$. В силу гомотетии имеем $\frac{DL}{DA}=\frac{FH}{FE}$, откуда $\frac{OH}{DA}=\frac{FH}{2R}=\frac{R}{2R-AD}$; следовательно, $OH=\frac{R\cdot AD}{2R-AD}$, $EH=R-\frac{R\cdot AD}{2R-AD}=2R\frac{R-AD}{2R-AD}$, $\frac{4}{3}R-\overline{EH}=\frac{2R}{3}\frac{R+AD}{2R-AD}$; значит, $HK^2=\frac{4R^2}{3}\cdot\frac{R^2-AD^2}{(2R-AD)^2}=\frac{IH^2}{3}$, откуда $\frac{HI}{HK}=\sqrt{3}$. Точка I принадлежит, следовательно, эллипсу (E_1), полученному из окружности (ω) аффинным сжатием (в данном случае — фактически растяжением) к оси EF с коэффициентом сжатия, равным $\sqrt{3}$; в то же время точка I лежит вне окружности (O), аналогично можно доказать, что точка J принадлежит эллипсу (E_2), полученному из окружности (ω') тем же сжатием; однако точки J при этом лежат внутри окружности (O). Если точка A описывает окружность (O) в целом, то точки I и J описывают дуги указанных эллипсов: точка I описывает дугу эллипса (E_1), расположенную вне окружности (O), а точка J — дугу эллипса (E_2), расположенную внутри окружности (O).

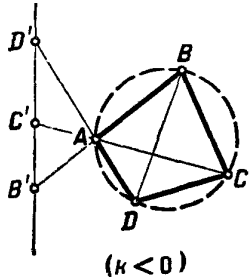
69. Пусть G — точка пересечения прямых CA и BD, а H — точка пересечения прямых AD и BC. Тогда пучок $G(C, B; I, H)$ гармонический. Прямая GH — поляра



Черт. 188.



Черт. 189.



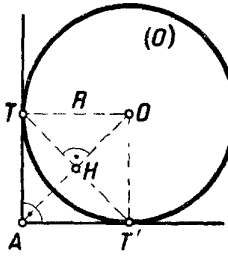
Черт. 190.

точки I по отношению к окружности (O), и, значит, $GH\perp OI$; но, с другой стороны, $OI\perp EF$; значит, $GH\parallel EF$. Рассмотрим гармонический пучок $G(C, B; I, H)$; прямая EF пересекает прямые этого пучка в точках M, N, I и в бесконечно удаленной точке; значит, I — середина MN (черт. 188).

70. Если B' и C' — точки, полученные инверсией (A, k) из точек B и C, то (черт. 189 и 190) $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'=|k|$, отсюда $\frac{AB'}{AC}=\frac{AC'}{AB}$; значит, $\triangle AB'C'\sim\triangle ACB$, поэтому $\frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'}{AC}$, откуда $B'C'=BC\frac{AB'}{AC}=BC\frac{AB'\cdot AB}{AB\cdot AC}=BC\frac{|k|}{ABAC}$; аналогично $C'D'=CD\frac{|k|}{AC\cdot AD}$ и $D'B'=DB\frac{|k|}{AD\cdot AB}$. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда точки B', C' и D' расположены на одной прямой, т. е. если $D'C'+C'B'=D'B'$ (точка C' расположена между точками B' и D', так как $ABCD$ — выпуклый четырехугольник). Последнее соотношение можно переписать в виде $CD\frac{|k|}{AC\cdot AD}+BC\frac{|k|}{AB\cdot AC}=BD\frac{|k|}{AB\cdot AD}$, или $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$. Итак, для того чтобы вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений противоположных сторон была равна произведению его диагоналей (теорема Птоломея и ей обратная).

71. Необходимое и достаточное условие того, что окружность принадлежит данному семейству окружностей. Если окружность (O) с центром O и радиусом R принадлежит заданному семейству (черт. 191), то $OA=R\sqrt{2}$; (1)

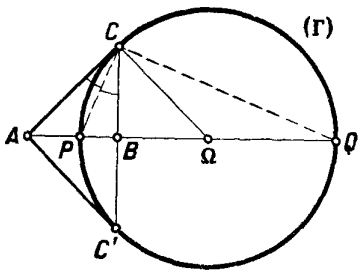
обратно, если для окружности с центром O и радиусом R выполнено соотношение (1), то четырехугольник, образованный касательными, проведенными из точки A к окружности (O), и радиусами, проведенными в точку касания, есть квадрат; значит, окружность (O) принадлежит заданному семейству. Соотношение (1), таким образом, есть необходимое и достаточное условие того, что окружность с центром O и радиусом R принадлежит заданному семейству окружностей.



Черт. 191.

1°. **Окружности (O), проходящие через данную точку B.** Для того чтобы окружность, проходящая через данную точку B, принадлежала данному семейству, необходимо и достаточно, чтобы $OA = OB\sqrt{2}$ или $\frac{OA}{OB} = \sqrt{2}$. Геометрическое место центров O окружности данного семейства, проходящих через точку B, есть, таким образом, геометрическое место точек, отношение расстояний каждой из которых до точек A и B равно $\sqrt{2}$. Это окружность (Γ), имеющая центр на прямой AB, точки пересечения которой с прямой AB строятся, например, так (черт. 192): пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник (B — прямой угол); проведем биссектрисы внутреннего и внешнего угла C; эти биссектрисы пересекут AB в точках P и Q, в которых окружность (Γ) пересекает прямую AB. Пусть Ω — центр (Γ); треугольник $AC\Omega$ — прямоугольный и равнобедренный; эта окружность (Γ) касается AC в точке C. Точки прикосновения T и T' получаются из точки O (черт. 191) подобиями $\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Геометрические места этих точек состоят из двух окружностей, полученных из (Γ) этими подобиями. Треугольник $AC\Omega$ подобием $\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right)$ преобразуется в треугольник ABC', где C' — точка прикосновения к окружности (Γ) второй касательной, проведенной из A. Значит, одна из окружностей (геометрическое место точек T') есть окружность с центром C', проходящая через B (эта окружность касается прямой AB в точке B); другая окружность симметрична этой относительно AB.

2°. **Окружности, касающиеся данной прямой.** Для того чтобы окружность, касающаяся (Δ), принадлежала данному семейству, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояние от ее центра до точки A к расстоянию от центра до прямой (Δ) было равно $\sqrt{2}$. Геометрическое место центров O окружностей (O), касающихся прямой (Δ), есть, следовательно, гипербола (H) с фокусом A и соответствующей этому фокусу директрисой (Δ). Пусть B — проекция точки A на прямую (Δ). Тогда вершины P и Q гиперболы (H) строятся так же, как точки P и Q на чертеже 192; (H) — равносторонняя гипербола.



Черт. 192.

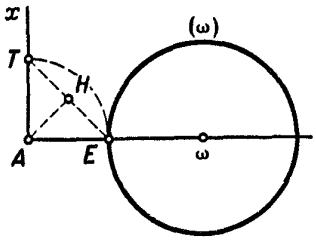
Окружности семейства, касающиеся двух данных прямых: (Δ) и (Δ'). Для того чтобы окружность данного семейства, касающаяся (Δ), касалась бы и (Δ'), необходимо и достаточно, чтобы ее центр лежал на любой из биссектрис углов между прямыми (Δ) и (Δ') или на прямой, находящейся на равных расстояниях от (Δ) и (Δ'), в случае, если эти прямые параллельны. Таким образом, вопрос о нахождении окружности семейства, касающейся прямых (Δ) и (Δ'), сводится к нахождению точек пересечения прямой с равносторонней гиперболой (H).

3°. **Вычисление $\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AH}}$. Приложение.** Сразу находим $\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AH}} = 2$, поэтому, если известна точка H, можно построить точку O, продолжая отрезок AH за точку H на расстояние, равное его длине. Радиус искомой окружности семейства равен стороне квадрата с диагональю AO.

4°. **Радикальная ось двух окружностей рассматриваемого семейства.** Для того чтобы доказать, что эта радикальная ось есть медиатриса отрезка H_1H_2, достаточно доказать, что центр I окружности (AH_1H_2) — точка, лежащая на этой медиатрисе, имеет одинаковую степень относительно окружностей (O_1) и (O_2). Точка H_1 — есть основание поляры точки A относительно окружности (O_1). Значит, точки A и H_1 делят гармонически тот из диаметров этой окружности, который лежит на прямой AO_1; окружность (AH_1I_2), проходящая через точки A и H_1, следовательно, ортогональна окружности (O_1); аналогично она ортогональна и

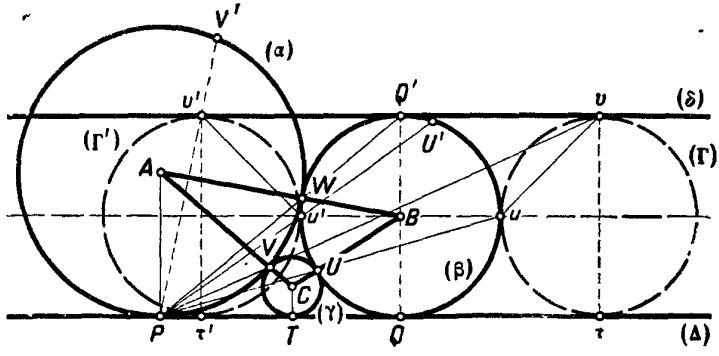
окружности (O_2). Значит, центр I этой окружности имеет одну и ту же степень относительно окружностей (O_1) и (O_2) (квадрат ее радиуса).

5°. Геометрическое место точек H, если окружность (O) остается ортогональной данной фиксированной окружности. Пусть (O_1) — какая-нибудь фиксированная окружность рассматриваемого семейства, ортогональная окружности (ω) радиуса ρ, а (O) — произвольная окружность данного семейства, ортогональная (ω); пусть O_1 и O — центры этих окружностей, а H_1 и H — середины отрезков AO_1 и AO. Точка ω имеет одну и ту же степень ρ^2 относительно каждой из рассматриваемых окружностей, лежит на их радикальной оси, а также на медиатрисе отрезка H_1H (см. 4°); значит (черт. 193), $\omega H_1 = \omega H$, откуда следует, что точка H расположена на окружности с центром ω, проходящей через точку H_1. Обратно: пусть H — какая-нибудь точка этой окружности, а (O) — соответствующая окружность семейства; тогда точка ω, расположенная на медиатрисе отрезка H_1H, имеет одну и ту же степень относительно окружностей (O_1) и (O), и так как ее степень относительно окружности (O_1) равна ρ^2, то ее степень относительно окружности (O) также равна ρ^2; значит, окружности (O) и (O_1) ортогональны. Таким образом, если окружность (O) данного семейства меняется, оставаясь ортогональной окружности (ω), то геометрическое место точек H есть вся окружность с центром ω. Чтобы уточнить положение этой окружности, достаточно построить одну ее точку. Пусть E — одна из точек, в которой окружность (ω) пересекает прямую $A\omega$. Построим одну из точек H, соответствующую окружности семейства, ортогональной окружности (ω) в точке E. Эта окружность должна касаться прямой $A\omega$ в точке E и должна быть вписана в прямой угол с вершиной A; значит, она должна касаться любой из полупрямых, выходящих из A и перпендикулярных $A\omega$; пусть Ax — такая полупрямая; точка T прикосновения окружности (O) с Ax такова, что $AT = AE$; точка H — середина TE.



Черт. 193.

Замечание. Нетрудно вычислить радиус этой окружности. Пусть O — центр, а R — радиус окружности семейства, соответствующей построенной точке H; точка H — середина OA. Из треугольника $A\omega O$, применяя теорему о медиане, получим $\omega A^2 + \omega O^2 = 2\omega H^2 + 2AH^2$; полагая $\overline{\omega A} = d$, в силу ортогональности окружностей будем иметь $\omega O^2 = R^2 + \rho^2$, откуда $d^2 + R^2 + \rho^2 = 2\omega H^2 + R^2$, следовательно, $\omega H = \sqrt{\frac{d^2 + \rho^2}{2}}$. Геометрическое место центров O получается из геометрического места точек H гомотетией (A, 2).



Черт. 194.

72. Изучение фигуры, образованной окружностями (α), (β), (γ), касающимися внешне друг друга и имеющими общую внешнюю касательную.

I. **Построение (γ), если известны (α) и (β).** Произведем инверсию (P, $PQ^2 = 4d^2$). Окружность (β) остается инвариантной так же, как и общая внешняя касательная (Δ); окружность (α) преобразуется в прямую (δ), параллельную (Δ) и касающуюся окружности (β) в точке Q', диаметрально противоположной Q на окружности (β) (черт. 194). Искомая окружность (γ) преобразуется, вообще говоря, в окружность (Γ), касающуюся (β), (Δ) и (δ). Эта окружность (Γ) равна окружности (ξ) и касается окружности (β) по одну или по другую сторону в точках u

и u', расположенных на диаметре окружности (β), параллельном (Δ). Имеется, следовательно, вообще говоря, два решения: (γ) и (γ'). Окружности (Γ) и (Γ') касаются (δ) соответственно в точках v и v', а (Δ) — в точках τ и τ' таких, что $Q'v = Q'v' = Q\tau = Q\tau' = 2R_2$. Построим центр C окружности (γ). Прямая Pv вторично пересекает (α) в точке V, а прямая Pu вторично пересекает (β) в точке U. Центр C есть точка пересечения AV и BU. Центр C' окружности (γ') строится аналогично. Построение точек T и T' прикосновения просто.

Исследование. Существуют две окружности: (γ) и (γ'), если точки τ и τ' отличны от P. Одна из точек τ или τ' совпадает с P, если окружности (α) и (β) равны; в этом случае существует только одна окружность (γ), а вторая вырождается во вторую общую внешнюю касательную (δ) к (α) и (β).

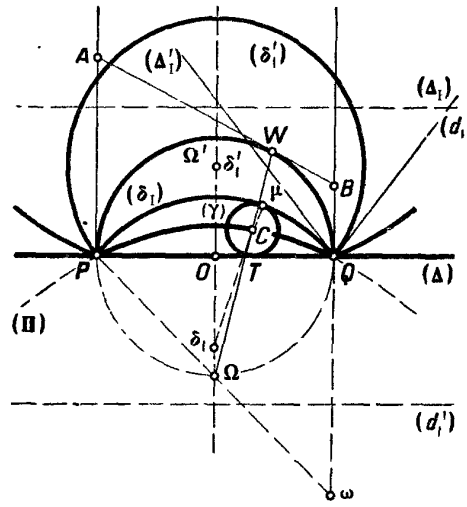
Вычисление отношений $\frac{\overline{TP}}{\overline{TQ}}$ и $\frac{\overline{T'P}}{\overline{T'Q}}$. Заметим, что τ и τ' симметричны относительно Q; значит, их образы T и T' в инверсии $(P, 4d^2)$ гармонически сопряжены с P и Q, т. е. $\frac{\overline{T'P}}{\overline{T'Q}} = -\frac{\overline{TP}}{\overline{TQ}}$. Так как T — образ τ в инверсии $(P, 4d^2)$, то $\overline{PT}\cdot\overline{P\tau} = \overline{PT}(2d + 2R_2) = 4d^2$, откуда $\overline{PT} = \frac{2d^2}{d+R_2}$ и $\overline{TQ} = \overline{PQ} - \overline{PT} = \frac{2dR_2}{d+R_2}$.

Окончательно $\frac{\overline{T'P}}{\overline{T'Q}} = -\frac{\overline{TP}}{\overline{TQ}} = \frac{d}{R_2}$.

Соотношение между радиусами (α), (β) и (γ). Рассмотрим прямоугольную трапецию, образованную центрами A и B окружностей (α) и (β) и их точками прикосновения P и Q к (Δ). Имеем $AB^2 = PQ^2 + (AP - BQ)^2$, откуда $(R_1 + R_2)^2 = 4d^2 + (R_1 - R_2)^2$ или $4d^2 = 4R_1R_2$; аналогично, рассматривая пары окружностей (β), (γ) и (γ), (α), найдем: $\overline{PT}^2 = 4R_1R_3$, $\overline{TQ}^2 = 4R_2R_3$. Итак, $PQ = 2\sqrt{R_1R_2}$, $PT = 2\sqrt{R_1R_3}$, $QT = 2\sqrt{R_2R_3}$. Так как точки P, Q и T лежат на одной прямой, то $PQ = |PT \pm TQ|$, или $\sqrt{R_1R_2} = |\sqrt{R_1R_3} \pm \sqrt{R_2R_3}|$, или

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \left|\frac{1}{\sqrt{R_2}} \pm \frac{1}{\sqrt{R_1}}\right|. \qquad (1)$$

Окружность, проходящая через U, V, U', V'. Рассмотрим четырехугольник $vuu'v'$, образованный точками прикосновения (Γ) и (Γ') с (β) и (δ). Ясно, что фигура $vuu'v'$ — равнобочная трапеция, а потому вокруг нее можно описать окружность. Образы точек u, v, u', v' в инверсии $(P, 4d^2)$, т. е. точки U, V, U', V' также будут лежать на одной окружности. Выражение $\frac{UU'\cdot VV'}{UV\cdot U'V'}$ инвариантно во всякой инверсии *, значит, в частности, и в инверсии $(P, 4d^2)$; следовательно, $\frac{UU'\cdot VV'}{UV\cdot U'V'} = \frac{uu'\cdot vv'}{uv\cdot u'v'} = \frac{2R_2\cdot 4R_2}{R_2\sqrt{2}\cdot R_2\sqrt{2}} = 4$.



Черт. 195.

II. В этой части окружности (α) и (β) изменяются так, что, с одной стороны, внешне касаются друг друга, а с другой стороны, касаются фиксированной прямой (Δ) в фиксированных точках P и Q. При этом мы будем рассматривать окружности (α) и (β), расположенные только с одной стороны от прямой (Δ).

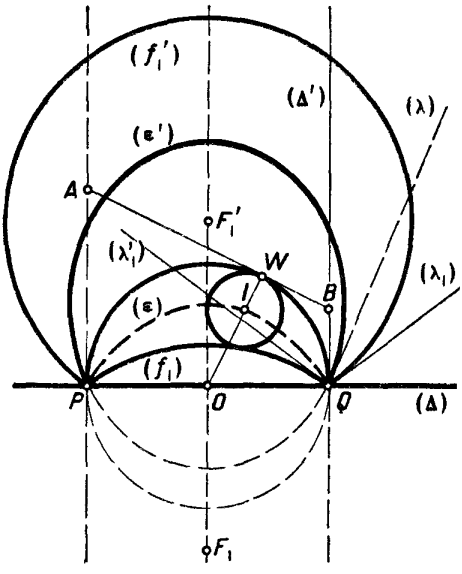
1°. **Геометрическое место точки W и огибающая AB.** В инверсии $(P, 4d^2)$ точка W инвертируется в точку Q', диаметрально противоположную Q на (β). Геометрическое место точек Q' есть полупрямая, перпендикулярная в точке Q прямой (Δ). Значит, геометрическое место точек W есть полуокружность с диаметром PQ (черт. 195). Эта полуокружность ортогональна окружностям (α) и (β) в точках P и Q (см. черт. 194), а значит, она ортогональна им в точке W и

* Это сразу следует из формулы $A'B' = AB\frac{|k|}{OA\cdot OB}$, определяющей длину $A'B'$ образа отрезка AB в инверсии (O, k) (см., например, задачу № 70 этой главы).

касается их линии центров AB. Таким образом, огибающая прямых AB есть полуокружность, являющаяся геометрическим местом точек W.

2°. Фиксированная точка WT. В инверсии $(P, 4d^2)$ прямая WT преобразуется в окружность, проходящую через полюс инверсии P, через точку Q', полученную инверсией W, и через точку τ, полученную инверсией T. Эта окружность вторично пересекает прямую QQ' в точке ω такой, что $\overline{QP}\cdot\overline{Q\tau} = \overline{QQ'}\cdot\overline{Q\omega}$; но $Q\tau = QQ'$ $(= 2R_2)$, значит, $\omega Q = QP$; треугольник $PQ\omega$ поэтому равнобедренный. Отсюда следует, что прямая WT проходит через точку Ω, полученную из ω в результате инверсии $(P, 4d^2)$, — это точка пересечения $P\omega$ с полуокружностью, симметричной относительно (Δ) той полуокружности, которая является геометрическим местом точек W; аналогично для окружности (γ'), прямая WT' проходит через точку Ω', симметричную Ω относительно (Δ). Итак, прямые WT и WT' проходят через фиксированные точки Ω и Ω' — середины дуг полуокружностей с диаметром PQ.

3°. Огибающая окружностей (γ). Рассмотрим снова окружность (Γ), полученную из (γ) инверсией $(P, 4d^2)$. Если (β) изменяется, эта окружность (Γ) остается гомотетичной любому из своих положений, так как ее центр описывает полупрямую, выходящую из точки Q и образующую с (Δ) угол $\theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Следовательно, огибающая окружностей (Γ) состоит из полупрямой (Δ), ограниченной точкой Q, и другой полупрямой (Δ_1), выходящей из Q и образующей с (Δ) угол $2\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Отсюда следует, что огибающая окружностей (γ) состоит из отрезка PQ и дуги (δ_1) окружности, ограниченной точками P и Q и пересекающей (Δ) под углом 2θ; центр δ_1 этой дуги есть точка медиатрисы отрезка PQ, расположенная под прямой (Δ) и такая, что $O\delta_1 = \frac{3}{4}d$ (O — середина отрезка PQ); радиус этой дуги равен $\frac{5}{4}d$, касательная к этой дуге в точке Q есть полупрямая (Δ_1'), симметричная (Δ_1) относительно QB. Аналогично рассуждая по отношению к (γ'), приходим к выводу, что огибающая окружностей (γ') состоит из всех точек прямой (Δ), лежащих вне отрезка PQ и дуги (δ_1') окружности, ограниченной точками P и Q и касающейся в точке Q прямой (Δ_1); эта дуга симметрична относительно (Δ) дуге, дополняющей до полной окружности дугу (δ_1). Итак, огибающая (γ) и (γ') состоит из всей прямой (Δ) и дуг (δ_1) и (δ_1') двух указанных окружностей.



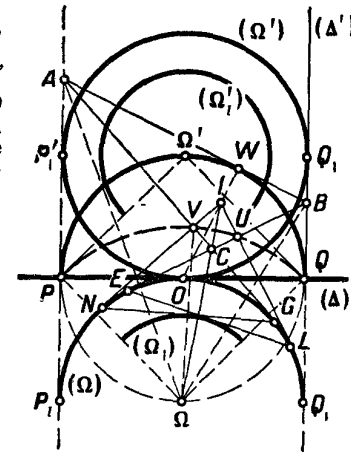
Черт. 196.

Геометрическое место центров C. Пусть (d_1) — прямая, параллельная (Δ) и расположенная на расстоянии $\frac{5d}{4}$ от (Δ) над этой прямой. Если точка прикосновения (γ) с (δ_1) есть μ, то $CT = C\mu$, $\delta_1\mu = \frac{5d}{4}$; мы видим, что расстояния от C до точки δ_1 и до прямой (d_1) равны между собой; значит, точка C лежит на параболе с фокусом δ_1 и директрисой (d_1). Геометрическое место точек C есть дуга этой параболы, расположенная над прямой (Δ) и ограниченная точками P и Q. Аналогично доказывается, что геометрическое место центров C' окружностей (γ') образовано двумя дугами параболы [расположенными над прямой (Δ)] с фокусом δ_1' и директрисой (d_1'), где δ_1' и (d_1') симметричны δ_1 и (d_1) относительно (Δ). Если мы рассмотрим параболу (π) с фокусом δ_1 и директрисой (d_1), то в целом геометрическое место центров окружностей (γ) будет состоять из дуги этой параболы, расположенной над (Δ), и дуг, симметричных относительно (Δ) тем, которые расположены под прямой (Δ).

4°. Огибающая окружности, вписаной в треугольник ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABC, есть окружность UVW. В инверсии $(P, 4d^2)$ эта окружность преобразуется в окружность, проходящую через точки u, v, Q'; эта окружность касается в точке Q' прямой QQ' [прямую QQ' будем в дальнейшем называть прямой (Δ') — черт. 196]. Геометрическое место центров окружностей (uvQ')

есть полупрямая (λ), образующая с (Δ') угол $\theta' = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; значит, ее огибающая состоит из полупрямой $Q\Delta'$ и другой полупрямой (λ_1), образующей с $Q\Delta'$ угол $2\theta' = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ — это продолжение полупрямой $\delta_1 Q$. Отсюда следует, что огибающая окружностей, вписанных в треугольник ABC, состоит из полуокружности с диаметром PQ и дуги окружности, ограниченной точками P и Q, касающейся в точке Q прямой $\lambda_1' Q$. Эта дуга (f_1) имеет центр F_1, расположенный на медиатрисе отрезка PQ под прямой (Δ), причем $OF_1 = \frac{4}{3}d$; радиус этой дуги равен $\frac{5}{3}d$; аналогично, огибающая окружностей, вписанных в треугольник ABC', есть полуокружность с диаметром PQ и дуга (f_1') окружности с центром F_1', симметричным F_1 относительно (Δ), проходящая через точки P и Q [берется дуга над (Δ)].

Геометрическое место центров I. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одновременно дуги (f_1) и полуокружности с диаметром PQ. Геометрическое место I ее центров есть, следовательно, дуга эллипса (E) с фокусами O и F_1, бо́льшая ось которого $\frac{8}{3}d$. Аналогично окружность вписанная в треугольник ABC', касается одновременно дуги (f_1') и полуокружности с диаметром PQ; геометрическое место ее центра есть дуга эллипса (E') с фокусами O и F_1' и большей осью $\frac{8}{3}d$. Итак, геометрическое место точек I состоит из части эллипса (E) с фокусами O и F_1 и большей осью $\frac{8}{3}d$, расположенной над прямой (Δ), и части, симметричной относительно (Δ) дуге этого эллипса, расположенной под прямой (Δ).



Черт. 197.

Фиксированная точка CI. Точки U, V, Q преобразуются инверсией (P, $4d^2$) в точки u, v, Q, расположенные на одной прямой — биссектрисе угла (Δ, Δ'). Значит, точки P, U, V, Q расположены на одной окружности, центр которой есть точка Ω, в которой медиатриса отрезка PQ пересекает прямую Quv (черт. 197). Медиатриса отрезка UV проходит, следовательно, через точку Ω, но эта медиатриса есть прямая CI — биссектриса угла ACB; значит, прямая CI проходит через фиксированную точку Ω. Аналогично, рассматривая точки P, U', V', Q' и прямую CI', установим, что CI' проходит через фиксированную точку Ω'. Прямые CI и CI' проходят через фиксированные точки Ω и Ω', которые мы уже имели в п. 2°.

5°. Огибающая прямых AC и BC. Так как точки P, U, V, Q лежат на одной окружности, то медиатрисы отрезков PV и QU суть прямые $A\Omega$ и $B\Omega$. Значит, AV и BU симметричны прямым AP и BQ относительно прямых $A\Omega$ и $B\Omega$, проходящих через фиксированную точку Ω. Расстояния от точки Ω до AC и BC, значит, постоянны и равны d; эти прямые AC и BC, следовательно, касаются окружности (Ω) с центром Ω и радиусом d. Прямая AC огибает четверть OQ_1 окружности, прямая BC — четверть OP_1; аналогично прямые AC' и BC' касаются окружности (Ω') с центром Ω' и радиусом d. Огибающая AC' — дуга $OP_1'Q_1'$, а огибающая BC' — дуга $OQ_1'P_1'$; каждая из этих дуг равна трем четвертям полной окружности.

6°. Огибающая прямых IU и IV. Прямые AC и $V\Omega$ симметричны прямым AP и ΩP относительно ΩA; значит, угол между ними равен $\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$. Но $IV \perp AC$; значит, прямые IV и AC симметричны относительно ΩV. Значит, расстояние от Ω до IV равно расстоянию от Ω до AC; оно, значит, постоянно и равно d; прямая IV также касается окружности (Ω). То же самое можно повторить и относительно прямой IU. Итак, прямые IU и IV касаются окружности (Ω). Огибающая прямых IU — четверть OQ_1 дуги окружности (Ω), огибающая IV — четверть OP_1 дуги этой окружности. Аналогично устанавливаем, что прямые $I'U'$ и $I'V'$ имеют огибающими дуги $Q_1'P_1'O$ и $OQ_1'P_1'$ окружности (Ω'), каждая из которых составляет $\frac{3}{4}$ полной окружности.

7°. **Огибающая прямых *EL* и *GN*.** $AC \perp IV$; значит, V — вершина квадрата, описанного вокруг окружности (Ω): NG, следовательно, — сторона квадрата, вписанного в эту окружность так же, как и EL. Значит, прямые NG и EL касаются окружности (Ω_1), концентричной (Ω) и радиуса $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Аналогичны и результаты для $N'G'$ и $E'L'$; они касаются окружности (Ω_1'), концентричной (Ω') и радиуса $\frac{d}{\sqrt{2}}$. В соответствии с границами огибающих, найденных выше, заключаем, что огибающая прямых NG и EL есть четверть окружности (Ω_1), ограниченная радиусами ΩP и ΩQ, а огибающая $N'G'$ и $E'L'$ составляет $\frac{3}{4}$ полной окружности (Ω_1'), ограниченной радиусами $\Omega' P$ и $\Omega' Q$.

III. 1°. Необходимое и достаточное условие того, что треугольник *ABC* есть треугольник (*T*). В части I мы видели, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \left| \frac{1}{\sqrt{R_1}} \pm \frac{1}{\sqrt{R_2}} \right|. \tag{1}$$

Этим соотношением связаны длины $R_1 + R_2$, $R_2 + R_3$ и $R_3 + R_1$ сторон треугольника (T). Так как возможны все комбинации знаков, заключающие в себе один знак минус, то (1) эквивалентно соотношению

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R_3}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{R_3}} - \frac{1}{\sqrt{R_1}} - \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{R_3}} - \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{R_3}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} - \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right) = 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 - \frac{4}{R_1 R_2} = 0. \tag{1'}$$

Обозначая через r радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, имеем

$$r = R_1 \operatorname{tg}\frac{A}{2} = R_2 \operatorname{tg}\frac{B}{2} = R_3 \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Значит,

$$\frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} = \operatorname{tg}\frac{A}{2} : \operatorname{tg}\frac{B}{2} : \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

и (1′) эквивалентно соотношению

$$\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^2 - 4 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0. \tag{1''}$$

Но в любом треугольнике $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$. Отсюда и из (1″) находим *

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 2. \tag{2}$$

Обозначая через r_1, r_2, r_3 радиусы окружностей, вневписанных в треугольник ABC, будем иметь: $r_1 = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $r_2 = p \operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $r_3 = p \operatorname{tg}\frac{C}{2}$, откуда и из (2) $r_1 + r_2 + r_3 = 2p$.

2°. **Определение углов (*T*), если известно отношение $\frac{r}{p} = k$.** Положим $t_1 = \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $t_2 = \operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $t_3 = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$. Тогда $t_1 + t_2 + t_3 = 2$, $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 1$.

---

* Сначала получим $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = 2$, затем

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 4$$

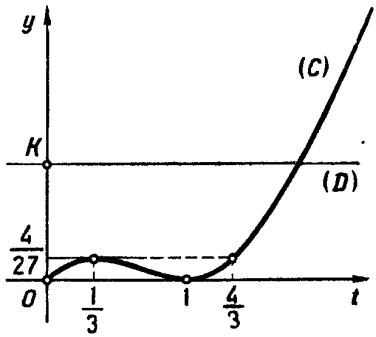
и т. д.

Далее: $t_1t_2t_3 = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-a}\cdot\frac{r}{p-b}\cdot\frac{r}{p-c} = \frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pr^3}{s^2} = \frac{pr^3}{p^2r^2} = \frac{r}{p}$. Если известно отношение $\frac{r}{p} = k$, то t_1, t_2, t_3 — корни уравнения

$$t^3 - 2t^2 + t = k, \qquad (3)$$

где $t > 0$.

Исследование. Рассмотрим функцию $y = t^2 - 2t^2 + t$. 1) Если $0 < t \leqslant \frac{1}{3}$, то она возрастает от 0 до $\frac{4}{27}$; 2) если $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1$, то она убывает от $\frac{4}{27}$ до 0; 3) если $t \geqslant 1$, то она возрастает от 0 до $+\infty$ (черт. 198). Значит, если $0 < k < \frac{4}{27}$, прямая $y = k$ пересекает кривую $y = t^3 - 2t^2 + t$ в трех различных точках; абсциссы t_1, t_2, t_3 точек пересечения удовлетворяют неравенствам $0 < t_1 < \frac{1}{3} < t_2 < 1 < t_3 < \frac{4}{3}$ [$\frac{4}{3}$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = \frac{4}{27}$ и кривой (C), при этом два корня совпадают]. Если $k = \frac{4}{27}$, имеется двойной корень $t_1 = t_2 = \frac{1}{3}$, $t_3 = \frac{4}{3}$. Если $k > \frac{4}{27}$, прямая $y = k$ пересекает кривую (C) только в одной точке с абсциссой, большей $\frac{4}{3}$. Задача, значит, возможна, если $0 < k \leqslant \frac{4}{27}$. В этом случае углы A, B, C определены тангенсами их половин. Из предыдущего следует, что если мы будем считать $C < B < A$, то $0 < \frac{C}{2} < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{A}{2} < \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ или $0 < C < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < B < \frac{\pi}{2} < A < 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.



Черт. 198.

Треугольник (T) равнобедренный. Треугольник (T) равнобедренный тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет двойной корень; это будет при $k = \frac{4}{27}$. Углы треугольника ABC в этом случае таковы: $C = B = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $A = 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

3°. **Новая форма необходимого и достаточного условия того, что треугольник ABC есть треугольник (T).** Соотношение (2) можно переписать так: $\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c} = 2$, или

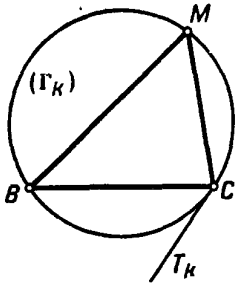
$$r\,\frac{bc + ca + ab - p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)} = 2. \qquad (4)$$

Но $pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; значит, $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) = p(bc + ca + ab - p^2) - abc$, а так как $abc = 4Rs = 4Rpr$, то $bc + ca + ab - p^2 = r(4R + r)$. Соотношение (4) принимает вид $r\frac{r(4R+r)}{pr^2} = 2$ или $4R + r = 2p$. Это необходимое и достаточное условие того, что треугольник ABC есть треугольник (T).

73. I. а) Геометрическое место точек M таких, что $(MB, MC) = \alpha \left(\operatorname{mod}\frac{\pi}{n}\right)$. Заметим, что если в плоскости фиксированы точки B и C, то геометрическое место точек M таких, что $(MB, MC) = \alpha \pmod{\pi}$, где (MB, MC) — ориентированный угол от неориентированной прямой MB до неориентированной прямой MC, а α — данный угол, есть, вообще говоря, окружность (Γ), проходящая через точки B и C и касающаяся прямой CT такой, что $(CB, CT) = \alpha \pmod{\pi}$. Рассмотрим теперь в той же плоскости точки M такие, что

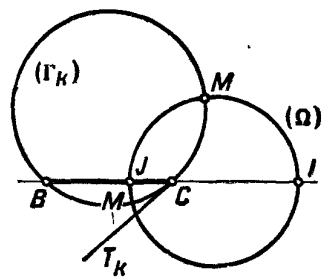
$$(MB, MC) = \alpha \left(\operatorname{mod}\frac{\pi}{n}\right), \qquad (1)$$

где n—данное целое положительное число. Соотношение (1) равносильно следующему: $(MB, MC) = \alpha + k\frac{\pi}{n}$, где k — какое угодно целое число. Каждому значению k соответствует окружность (Γ_k), проходящая через B и C и касающаяся прямой CT_k такой, что $(CB, CT_k) = \alpha + k\frac{\pi}{n}$ (черт. 199). Двум различным значениям k_1 и k_2 соответствует одна и та же окружность, если $k_2 - k_1 = 0 \pmod n$. Мы видим, что достаточно дать для k следующие значения: 0, 1, 2, ..., $n-1$, чтобы получить полностью все геометрическое место. Оно состоит, таким образом, из n окружностей (Γ_k), проходящих через B и C и касающихся прямых CT_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, таких, что $(CB, CT_k) = \alpha \left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{n}\right)$. Если для какого-нибудь значения k мы будем иметь $\alpha + \frac{k\pi}{n} = 0$, то соответствующая окружность вырождается в прямую линию.



Черт. 199.

б) Определение точек M таких, что $(MB, MC) = 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{n}\right)$ и $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}$. На основании а) геометрическое место точек M таких, что $(MB, MC) = 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{n}\right)$ состоит из прямой BC и $n-1$ окружностей (Γ_k), проходящих через B и C и касающихся CT_k в точке C, причем $(CB, CT_k) = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Геометрическое место точек M таких, что $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}$ есть окружность (Ω), имеющая диаметром отрезок IJ прямой BC, заключенный между точками I и J такими, что $\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{JC}}{\overline{JB}} = \frac{1}{2}$. Точка I симметрична B относительно C, а J находится на отрезке BC и отстоит от точки C на расстоянии одной трети BC (черт. 200). Искомые точки M суть точки пересечения BC и окружностей (Γ_k) с окружностью (Ω). Прямая BC пересекает (Ω) в точках I и J; точка I лежит вне каждой окружности (Γ_k), а J — внутри; значит, (Ω) пересекает каждую из окружностей (Γ_k) в двух точках. Мы получаем окончательно $2n$ искомых точек, лежащих на (Ω).



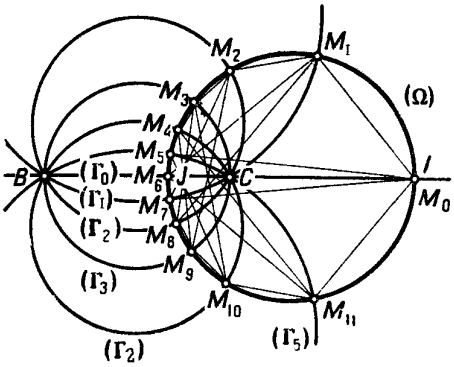
Черт. 200.

Многоугольники P_1 и P_p. Если мы соединим найденные точки последовательно в том порядке, как мы их встречаем на окружности (Ω), описывая ее в произвольном направлении, то мы получим выпуклый многоугольник P_1, вписанный в окружность (Ω). Пусть $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{2n-1}$ — последовательные вершины этого многоугольника. Если мы будем соединять точку M_0 с точкой M_p, затем с точкой M_{2p} и т. д., то получим звездчатый многоугольник, вписанный в окружность (Ω).

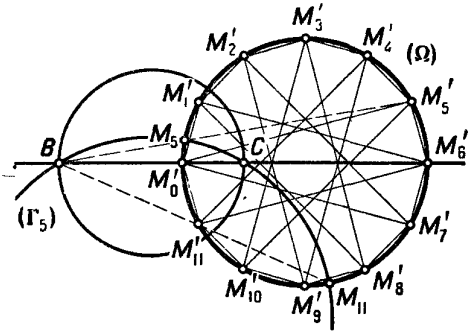
Выбор p, при котором P_1 и P_p будут иметь одинаковое число сторон. Рассмотрим многоугольник P_p; его вершина номера λ (M_0 — нулевая, M_p — первая и т. д.) есть $M_{\lambda p}$, и мы впервые вернемся к M_0 тогда, когда λp есть наименьшее общее кратное чисел p и $2n$. Следовательно, как известно из арифметики, λ есть частное от деления $2n$ на наибольший общий делитель p и $2n$. Следовательно, для того чтобы P_p имел то же число сторон, что и P_1, необходимо и достаточно, чтобы числа p и $2n$ были взаимно простые, т. е. их наибольший общий делитель был равен 1. Но соединяя точки M в порядке $M_0, M_p, M_{2p}, \ldots$ и соединяя их в обратном порядке $M_0, M_{2n-p}, \ldots$, мы получим тот же многоугольник. Значит, можно считать, что p меньше половины n от $2n$. Итак, для того чтобы P_1 и P_p имели одинаковое число сторон, необходимо и достаточно, чтобы числа p и $2n$ были взаимно-простые и $p < n$.

в) Инверсия, преобразующая точки M в вершины M' правильного многоугольника. Окружности (Γ_k), проходящие через точки B и C, сопряженные точкам I и J, ортогональны окружности (Ω). Произведем инверсию с полюсом B и степенью $\overline{BI} \cdot \overline{BJ}$. Окружность (Ω) инвариантна в этой инверсии, а окружности (Γ_k) преобразуются в прямые, ортогональные к (Ω), т. е. в ее диаметры. Далее, эти диаметры должны быть параллельны касательным CT_k в точке C к окружностям (Γ_k);

но эти касательные образуют последовательно углы, равные $\frac{\pi}{n}$, и значит прямые, в которые преобразуются окружности (Γ_k), образуют между собой последовательно равные углы. Значит, точки M, преобразующиеся в концы диаметров окружности (Ω) образующих последовательно углы $\frac{\pi}{n}$, являются вершинами правильного $2n$-угольника, вписанного в (Ω). Таким образом, выпуклому многоугольнику соответствует



Черт. 201.



Черт. 202.

выпуклый правильный многоугольник Q_1, а звездчатому многоугольнику P_p соответствует звездчатый правильный многоугольник Q_p, имеющий вершинами точки M'. В случае $n=6$ единственное число, меньшее n и взаимно-простое с ним, есть 5. На черт. 201 и 202 изображены P_1, P_5, Q_1 и Q_5.

II. а) Геометрическое место центров окружностей, вписанных и вневписанных в треугольник *ABC*.

Если точка A описывает окружность (Γ), проходящую через фиксированные точки B и C, то $(AB, AC)=\alpha \pmod{\pi}$, где α — постоянный угол. Центры I, I_a, I_b, I_c окружностей, вписанных и вневписанных в треугольник ABC, суть точки пересечения биссектрис внутренних и внешних углов треугольника ABC. Биссектрисы (δ) угла B определяются соотношением $(BA, BC)=2(\delta, BC) \pmod{\pi}$, а биссектрисы (δ') угла C — соотношением $(BC, CA)=2(BC, \delta') \pmod{\pi}$. Если точка M лежит на пересечении (δ) и (δ'), то мы имеем (складывая) $(AB, AC)=2(MB, MC) \pmod{\pi}$, откуда $(MB, MC)=\frac{1}{2}(AB, AC)\left(\mod \frac{\pi}{2}\right)$, или

$$(MB, MC)=\frac{\alpha}{2}\left(\mod \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2)$$

На основании I, а), геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию (2), состоит из двух окружностей: (C_0) и (C_1), определяемых соотношениями

$$(C_0) \qquad (MB, MC)=\frac{\alpha}{2} \pmod{\pi},$$

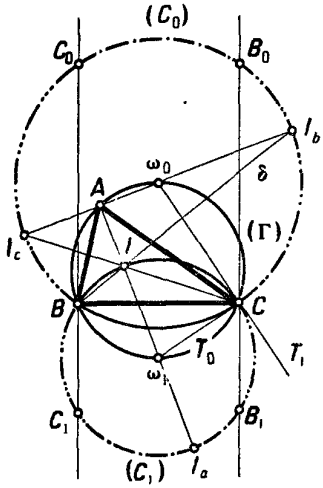
$$(C_1) \qquad (MB, MC)=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Окружности (C_0) и (C_1) проходят через B и C и касаются в точке C прямых CT_0 и CT_1, которые определяются равенствами $(CB, CT_0)=\frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$, $(CB, CT_1)=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Это прямые, соединяющие точку C с серединами ω_0 и ω_1 дуг (Γ), на которые эта окружность (Γ) разделяется хордой BC. Точки ω_0 и ω_1 суть центры окружностей (C_0) и (C_1), и эти окружности ортогональны.

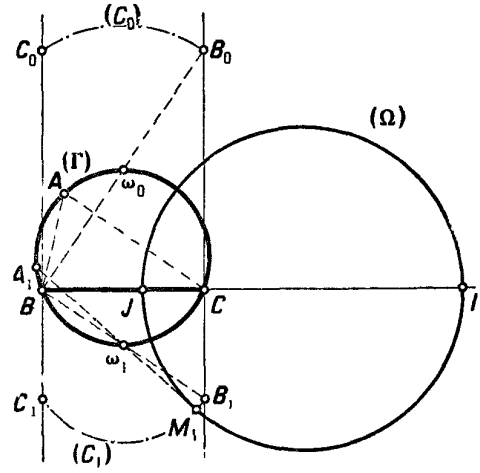
Выделение из (C_0) и (C_1) геометрического места центра вписанной окружности и геометрических мест центров вневписанных окружностей в треугольник *ABC*. Легко проследить по непрерывности, что описывают точки I, I_a, I_b, I_c на найденном геометрическом месте в целом. Для этого следует заметить, что если точка A описывает дугу $C\omega_0 B$ окружности (Γ), то биссектриса внутреннего угла A вращается вокруг точки ω_1, а биссектриса внешнего угла A вращается вокруг ω_0, в то время как, если A описывает дугу $B\omega_1 C$ окружности (Γ), биссектриса внутреннего угла A вращается вокруг ω_0, а биссектриса внешнего угла

A — вокруг ω_1. На черт. 203 сплошной линией выделено геометрическое место центров вписанных окружностей. Пунктиром вида —·—·— обозначено геометрическое место точек I_a, пунктиром —··—··— обозначено геометрическое место точек I_b, а пунктиром —···—···— обозначено геометрическое место точек I_c. Заметим, что части дуг ограничены точками B_0, C_0, B_1, C_1, в которых окружности (C_0) и (C_1) пересекаются прямыми, проходящими через B и C перпендикулярно BC.

б) **Построение треугольника ABC, если дано BC, описанная окружность и отношение $\frac{MB}{MC} = m$, где M — центр окружности, вневписанной в угол A треугольника ABC.** Зная сторону BC и окружность (Γ), описанную вокруг треугольника ABC, на основание п. а) можно построить геометрическое место



Черт. 203.



Черт. 204.

точек M центра окружности, вневписанной в угол A треугольника ABC (черт. 204) — это две дуги: одна $\overset{\frown}{B_0C_0}$ окружности (C_0) с центром ω_0 и радиусом ω_0B_0 и другая $\overset{\frown}{B_1C_1}$ окружности (C_1) с центром ω_1 и радиусом ω_1B [берутся дуги вне (Γ), заключенные между перпендикулярами к BC в точках B и C]. С другой стороны, известно, что $m = \frac{MB}{MC}$ — второе геометрическое место точек M есть окружность (Ω), диаметром IJ которой является отрезок прямой BC между точками I и J такими, что $\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{JC}}{\overline{JB}} = m$. Если точка M_1 — точка, общая для $\overset{\frown}{B_1C_1}$ и (Ω), то прямая ω_1M_1 пересекает (Γ) во второй точке A_1, которая есть искомая вершина. Аналогично, если M_0 есть точка пересечения $\overset{\frown}{B_0C_0}$ и (Ω), то прямая ω_0M_0 пересекает (Γ) во второй точке A_0, которая также искомая вершина. Имеется, таким образом, столько решений, в скольких точках (Ω) пересекает дуги $\overset{\frown}{B_0C_0}$ и $\overset{\frown}{B_1C_1}$.

Исследование. При исследовании будем предполагать, что $0 < m < 1$ и что ω_1 — середина наименьшей дуги (Γ), расположенной под хордой BC; в этом случае угол $\angle B\omega_0C$ острый, который мы обозначим через α. Заметим, что B_1 — точка, диаметрально противоположная точке B на (C_1); если M_1 описывает B_1C_1, то отношение $\frac{M_1C}{M_1B}$ (в котором числитель растет, а знаменатель убывает) будет возрастать и, значит, минимум этого отношения $\frac{B_1C}{B_1B} = \sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично точка B_0 диаметрально противоположна точке B на (C_0); если M_0 описывает $\overset{\frown}{B_0C_0}$, то отношение $\frac{M_0C}{M_0B}$, в котором числитель растет, а знаменатель убывает, будет расти, и, значит, минимум этого отношения равен $\frac{B_0C}{B_0B} = \cos\frac{\alpha}{2}$. Мы видим, что если

$m < \sin\frac{\alpha}{2}$, то (Ω) не пересекает $\overset{\smile}{B_1C_1}$; значит, решений нет; если $m = \sin\frac{\alpha}{2}$, то (Ω) пересекает $\overset{\smile}{B_1C_1}$ в точке B_1; этому случаю соответствует треугольник, выродившийся в отрезок BC; если $\sin\frac{\alpha}{2} < m < \cos\frac{\alpha}{2}$, то (Ω) пересекает $\overset{\smile}{B_1C_1}$, но не пересекает $\overset{\smile}{B_0C_0}$; значит, имеется только одно решение; если $m = \cos\frac{\alpha}{2}$, то (Ω) пересекает $\overset{\smile}{B_1C_1}$ (это будет настоящий треугольник) и проходит через B_0 (что дает решение, выродившееся в отрезок BC); наконец, если $\cos\frac{\alpha}{2} < m < 1$, то (Ω) пересекает $\overset{\smile}{B_1C_1}$ и $\overset{\smile}{B_0C_0}$, что дает два решения A_1BC и A_0BC.

в) Тригонометрическое решение треугольника ABC; дано $BC = a$, радиус R описанной окружности (Γ) и отношение $\frac{MC}{MB} = m$, где M — центр окружности, вневписанной в угол A треугольника ABC. Достаточно подсчитать углы треугольника ABC, так как значение радиуса R описанной окружности сразу позволяет определить и стороны $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Углы треугольника ABC удовлетворяют соотношениям $A + B + C = \pi$; $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2} = m$ (последнее соотношение получается, если использовать теорему синусов для треугольника MBC). Предположение $a \leqslant 2R$, конечно, имеет место [ибо BC есть хорда (Γ)], и мы видим, что соотношение $\sin A = \frac{a}{2R}$ позволяет определить два значения для A: одно $A = \alpha$, где α — острый угол, другое $A = \pi - \alpha$. Остается определить B и C. Имеем: $B + C = \pi - \alpha$, $\cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2} = m$; отсюда

$$\frac{\cos\frac{B}{2}}{m} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{1} = \frac{\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}}{1-m} = \frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}}{1+m},$$

или

$$\frac{2\cos\frac{C+B}{4}\cos\frac{C-B}{4}}{1+m} = -\frac{2\sin\frac{C+B}{4}\sin\frac{C-B}{4}}{1-m},$$

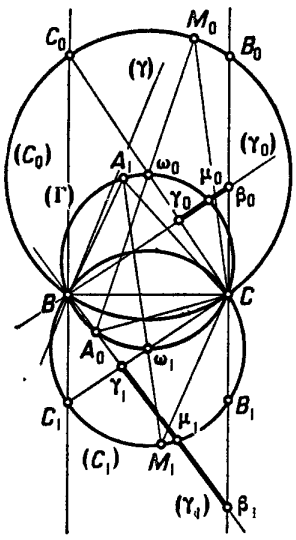
откуда $\operatorname{tg}\frac{C-B}{4} = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{ctg}\frac{C+B}{4}$, а так как $C + B = \pi - A$, то $\operatorname{tg}\frac{C-B}{4} = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right)$.

Если мы обозначим через β угол, заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ такой, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right)$, то так как C и B меньше π, то $\frac{C-B}{4} = \beta$, откуда $C - B = 4\beta$, и так как $C - B = \pi - A$, то $C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + 2\beta$, $B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - 2\beta$. Углы A, B, C найдены, и треугольник решен.

Исследование. Будем предполагать, что $0 < m < 1$ (напомним, что α — острый угол такой, что $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$). Возьмем сначала $A = \alpha$. Мы имеем: $C = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2\beta$, $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - 2\beta$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)$. Угол β отрицательный, ибо $m < 1$, значит $B > 0$. Для того чтобы и угол C был положителен, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} > -\beta$, или $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) > -\operatorname{tg}\beta$, или $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) > \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)$, откуда, упрощая, $m > \sin\frac{\alpha}{2}$. Имеется, значит, решение с острым углом A, если $m > \sin\frac{\alpha}{2}$. Возьмем теперь $A = \pi - \alpha$. Будем иметь: $C = \frac{\alpha}{2} + 2\beta$, $B = \frac{\alpha}{2} - 2\beta$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$. Угол β опять отрицателен, ибо $m < 1$, значит $B > 0$. Для того чтобы и угол C был положителен, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\alpha}{4} > -\beta$,

или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} > -\operatorname{tg}\beta$, или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} > \frac{1-m}{1+m}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, или $m > \cos\frac{\alpha}{2}$. Имеется, значит, решение с тупым углом A, если $m > \cos\frac{\alpha}{2}$. Мы снова приходим к результатам п. в): нет треугольника ABC, если $m < \sin\frac{\alpha}{2}$, один треугольник ABC, если $\sin\frac{\alpha}{2} < m < \cos\frac{\alpha}{2}$, и два треугольника ABC, если $m > \cos\frac{\alpha}{2}$.

г) Инверсия с центром C, сохраняющая B. Это инверсия $(C, \overline{CB}^2)$. В ней окружности (Γ), (C_1) и (C_0) преобразуются в три прямые: (γ), (γ_1) и (γ_0), проходящие через точку B и параллельные касательным в точке C и (Γ), (C_1) и (C_0) (черт. 205). Дуга $\overset{\frown}{B_1C_1}$ преобразуется в отрезок $\beta_1\gamma_1$ прямой (γ_1), заключенный между пересечениями (γ_1) с перпендикуляром к BC в точке C к прямой CC_0; дуга $\overset{\frown}{B_0C_0}$ преобразуется в отрезок $\beta_0\gamma_0$ прямой (γ_0), заключенный между точками пересечения (γ_0) с перпендикуляром к BC в точке C к прямой CC_0. Пусть M' образ M в рассматриваемой инверсии. На основании свойств инверсии $BM' = \frac{BM\cdot CB}{MC} = \frac{CB}{m}$ и, значит, BM' имеет постоянную длину, ибо $\frac{MC}{MB} = m$ и $BC = \text{const}$. Точка M' — это одна или другая из точек μ_1 и μ_0 прямых (γ_1) и (γ_0) таких, что $B\mu_1 = B\mu_0 = \frac{BC}{m}$. Если μ_1 лежит на $\beta_1\gamma_1$, то $C\mu_1$ пересекает (C_1) в точке M_1, а зная M_1, мы проведем $M_1\omega_1$ и найдем точку A_1, следовательно, решение A_1BC; аналогично, если μ_0 лежит на отрезке $\beta_0\gamma_0$, то $C\mu_0$ пересекает (C_0) в точке M_0, а зная M_0, мы найдем второе решение A_0BC. Рассматриваемая инверсия дает, таким образом, другое решение п. б).



Черт. 205.

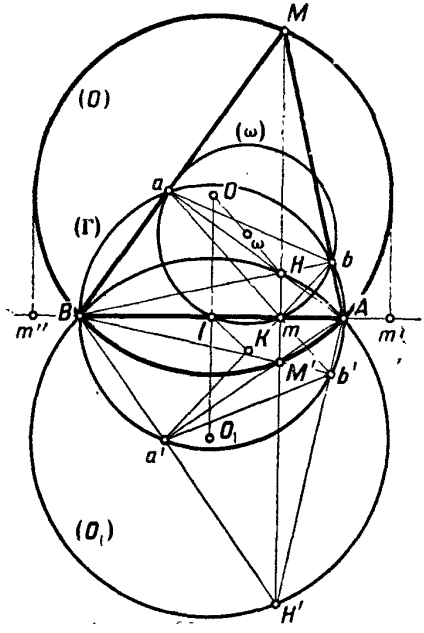
Исследование. Заметим, что $B\gamma_1 = BC\sin\frac{\alpha}{2}$, $B\beta_1 = \frac{BC}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Решение A_1BC существует, если $BC\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{BC}{m} < \frac{BC}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Первое неравенство всегда выполняется, так как $0 < m < 1$; второе дает $m > \sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично $B\gamma_0 = BC\cos\frac{\alpha}{2}$, $B\beta_0 = \frac{BC}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Решение A_0BC существует, если $BC\cos\frac{\alpha}{2} < \frac{BC}{m} < \frac{BC}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Первое неравенство всегда выполняется, второе дает $m > \cos\frac{\alpha}{2}$. Мы снова приходим к результатам п. б): если $m < \sin\frac{\alpha}{2}$, нет решений; если $\sin\frac{\alpha}{2} < m < \cos\frac{\alpha}{2}$ — одно решение A_1BC; если $m > \cos\frac{\alpha}{2}$, то два решения: A_1BC и A_0BC.

74. I. Изучение некоторых элементов, относящихся к треугольнику MAB, где M — переменная точка окружности (O), проходящей через две фиксированные точки: A и B.

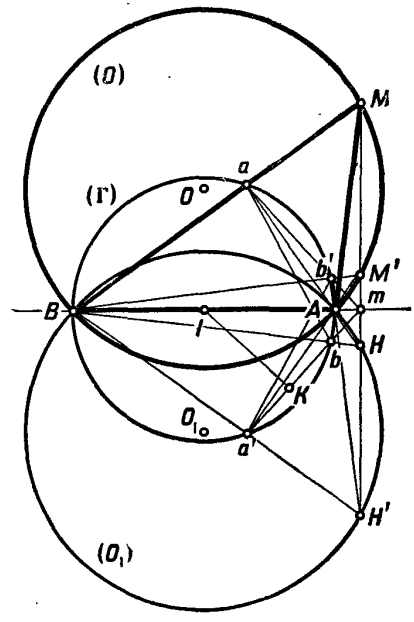
1°. Геометрическое место ортоцентра H треугольника MAB. Обозначим через (MA, MB) ориентированный угол от неориентированной прямой MA до неориентируемой прямой MB, лежащими в ориентированной плоскости. Если точка M описывает окружность (O), то $(MA, MB) = \alpha \pmod\pi$, где α — постоянный угол (положительный или отрицательный). Пусть H — ортоцентр треугольника ABM; тогда $(HA, HB) = (HA, MB) + (MB, MA) + (MA, HB) \pmod\pi$, а так как $(HA, MB) = \frac{\pi}{2} \pmod\pi$, $(MA, HB) = \frac{\pi}{2} \pmod\pi$, то $(HA, HB) = (MB, MA) = -\alpha \pmod\pi$. Отсюда следует, что геометрическое место точек H есть окружность (O_1), симметричная (O) относительно AB (черт. 206).

Геометрическое место вершин треугольника *mab*. Точка m — ортогональная проекция M на AB; значит, геометрическое место точек m есть отрезок $m'm''$ с центром I и длиной $2R$. Так как $(bA, bB) = (aA, aB) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, то геометрическое место точек a и b есть окружность (Γ) с диаметром AB.

Огибающая сторон треугольника *mab*. Точки H, m, B, a лежат на одной окружности, так как $(aH, aB) = (mH, mB) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Значит $(ma, mB) = (HA, HB) = -\alpha \pmod{\pi}$, а потому ma имеет фиксированное направление и, следовательно,



Черт. 206.



Черт. 207.

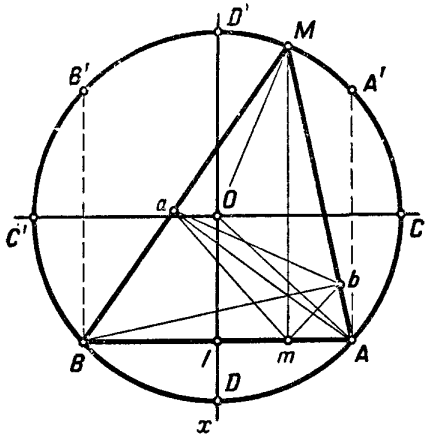
не имеет огибающей. Аналогично и точки H, b, A, m лежат на одной окружности, а так как $(bH, bA) = (mH, mA) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, то и $(mb, mA) = (HB, HA) = \alpha \pmod{\pi}$; mb имеет фиксированное направление и, значит, не имеет огибающей. Далее, точки a, b, I, m лежат на окружности Эйлера треугольника ABM, значит, $(Ia, Ib) = (ma, mb) \pmod{\pi}$; далее, $(ma, mb) = (ma, mB) + (mA, mb) = -2\alpha \pmod{\pi}$ и, значит, $(Ia, Ib) = -2\alpha \pmod{\pi}$. Точки a и b, кроме того, лежат на окружности (Γ) с центром I; следовательно, хорда ab окружности (Γ) огибает окружность, концентричную окружности (Γ). Определим радиус этой окружности. Так как радиус окружности Эйлера равен $\frac{R}{2}$, то $\frac{ab}{2} = \frac{R}{2} |\sin 2\alpha| = R |\sin \alpha \cos \alpha|$; значит, расстояние от I до ab равно $\frac{ab}{2} |\operatorname{tg} \alpha| = R \sin^2 \alpha$.

Геометрическое место центра окружности, описанной вокруг треугольника *mab*. Окружность, описанная вокруг треугольника mab, есть окружность (ω) Эйлера треугольника MAB. Ее центр ω — середина OH; он соответствует точке H в гомотетии $\left(O, \frac{1}{2}\right)$; значит, геометрическое место центров ω окружности (ω) есть окружность, полученная гомотетией $\left(O, \frac{1}{2}\right)$ окружности (O_1); центр полученной окружности есть точка I, а радиус равен $\frac{R}{2}$.

Сравнение треугольников *mab* и *ma'b'*, соответствующих точкам *M* и *M'*, если *MM'* $\perp$ *AB*. Ортоцентр H треугольника MAB симметричен вершине M' треугольника $M'AB$ по отношению к AB. Значит (черт. 207), высоты треуголь-

ника $M'AB$, выходящие из A и B, суть прямые, симметричные сторонам треугольника MAB относительно AB, и обратно — вершины треугольника $ma'b'$ симметричны вершинам треугольника mab относительно AB. Заметим (это будет использовано в 2°), что в случае, если MM' пересекает отрезок AB, стороны треугольника $ma'b'$, выходящие из m, являются продолжениями сторон треугольника mab, выходящими из m [это следует из равенств $(ma, mB) = -\alpha$, $(mb, mA) = \alpha$]; в этом случае ba' есть сумма сторон ma и mb. Напротив, в случае, изображенном на чертеже 207 (MM' пересекает прямую AB в точке, лежащей вне отрезка AB), стороны треугольника $ma'b'$ покрывают частично стороны треугольника mab; хорда ba' есть в этом случае разность сторон ma и mb, выходящих из m в треугольнике mab.

2°. **Площадь треугольника mab в функции α и φ.** Ориентируем (черт. 208) медиатрису отрезка AB в направлении от O к I и положим $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \alpha \pmod{2\pi}$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi \pmod{2\pi}$. При выбранной ориентации оси Ox угол α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$*.



Черт. 208.

Заметим, что двум точкам M и M', расположенным на одном перпендикуляре к AB (т. е. для двух дополнительных до π значений α), соответствуют два равных треугольника: mab и $ma'b'$. Аналогично производя симметрию фигуры относительно диаметра Ox, получим, что точке M_1, симметричной M (т. е. для двух противоположных значений φ), соответствуют два равных треугольника: mab и ma_1b_1, симметричных относительно Ox. Это замечание позволяет ограничить изменение φ так: $\alpha < \varphi < \pi$. Мы имеем тогда $(MA, MB) = -(Ox, OA) = -\alpha \pmod{\pi}$, $(AB, AM) = \frac{1}{2}(OB, OM) = \frac{\varphi + \alpha}{2} \pmod{\pi}$, $(BA, BM) = \frac{1}{2}(OA, OM) = \frac{\varphi - \alpha}{2} \pmod{\pi}$. Мы видели, что $(ma, mb) = -2(MA, MB) = 2\alpha \pmod{\pi}$; аналогично $(ab, am) = -2(AB, AM) = -(\varphi + \alpha) \pmod{\pi}$, $(mb, ab) = -2(BM, BA) = -(\varphi - \alpha) \pmod{\pi}$. Треугольник mab есть треугольник, вписанный в окружность (ω) Эйлера диаметра R; значит, $ab = R \sin 2\alpha$, $ma = R \sin(\varphi - \alpha)$, $mb = R|\sin(\alpha + \varphi)|$, $S = \frac{1}{2} ma \cdot mb \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha \cos\alpha |\cos 2\varphi - \cos 2\alpha|$.

Экстремальными значениями $|\cos 2\varphi - \cos 2\alpha|$ будут $1 + \cos 2\alpha$ и $1 - \cos 2\alpha$. Соответствующие положения точки M суть концы C и D' радиусов OC и OD' таких, что $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ и $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OD'}) = \pi \pmod{2\pi}$. Площадь обращается в нуль для $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \pi - \alpha$; соответствующие положения точки M суть A и A', где A' лежит на перпендикуляре к AB в точке A. Ко всем этим положениям точки M надо присоединить ей симметричные относительно двух взаимно-перпендикулярных диаметров CC' и DD' и относительно O.

Определение M, если задана площадь k^2 треугольника mab. В этом случае мы имеем или

$$\cos 2\varphi = \frac{2k^2}{R^2 \sin\alpha \cos\alpha} + \cos 2\alpha, \qquad (1)$$

или

$$\cos 2\varphi = \cos 2\alpha - \frac{2k^2}{R^2 \sin\alpha \cos\alpha}. \qquad (2)$$

Первое значение для $\cos 2\varphi$ больше, чем $\cos 2\alpha$ (и, следовательно, больше, чем -1); для возможности решения надо только, чтобы оно было < 1, т. е. $\frac{2k^2}{R^2 \sin\alpha \cos\alpha} < 1 - \cos 2\alpha$ или $k^2 < R^2 \sin^3\alpha \cos\alpha$. Если это условие выполнено, то единственное решение φ уравнения (1), удовлетворяющее условию $\alpha < \varphi < \pi$, будет $\varphi = \pi - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2k^2}{2R \sin\alpha \cos\alpha} + \cos 2\alpha\right)$. Ему соответствует лишь одна точка M_1, расположенная на дуге $\overset{\frown}{A'D'}$; второе значение $\cos 2\varphi$ меньше, чем $\cos 2\alpha$, и значит

* Заметим, что здесь через α обозначено то, что раньше мы обозначали через $-\alpha$.

меньше, чем 1. Условие возможности решения, значит, будет только $\cos 2\alpha - \frac{2k^2}{R^2 \sin\alpha\cos\alpha} > -1$ или $k^2 < R^2 \sin\alpha\cos^3\alpha$. В этом случае уравнение (2) имеет два решения такие, что $\alpha < \varphi < \pi$: $\varphi = \frac{1}{2}\arccos\left(\cos 2\alpha - \frac{2k^2}{R^2\sin\alpha\cos\alpha}\right)$ и $\varphi = \pi - \frac{1}{2}\arccos\left(\cos 2\alpha - \frac{2k^2}{R^2\sin\alpha\cos\alpha}\right)$. Им соответствуют две точки M_2 и M_3, одна из них на дуге $\overset{\smile}{AC}$, другая — на дуге $\overset{\smile}{CA'}$. Для того чтобы уточнить результаты исследования, надо рассмотреть еще два случая: $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Получаем. Случай первый: $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. 1) $0 < k^2 < R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ — три решения: M_1, M_2 и M_3; 2) $k^2 = R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ — три решения: D, M_2, M_3; 3) $R^2\sin^3\alpha\cos\alpha < k^2 < R^2\sin\alpha\cos^3\alpha$ — два решения: M_2, M_3; 4) $k^2 = R^2\sin\alpha\cos^3\alpha$ — два решения: C и M_1; 5) $k^2 > R^2\sin\alpha\cos^3\alpha$ — ни одного решения. Случай второй: $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 1) $0 < k^2 < R^2\sin\alpha\cos^3\alpha$ — три решения: M_1, M_2, M_3; 2) $k^2 = R^2\sin\alpha\cos^3\alpha$ — два решения: C и M_1; 3) $R^2\sin\alpha\cos^3\alpha < k^2 < R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ — одно решение: M_1; 4) $k^2 > R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ — нет решений. Разумеется, сюда надо присоединить точки, симметричные найденным относительно CC' и DD' и относительно точки O.

Периметр треугольника *amb*. $2p = R\sin 2\alpha + R\sin(\varphi - \alpha) + R|\sin(\varphi + \alpha)|$. Если $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$, то $2p = 2R\cos\alpha(\sin\varphi + \sin\alpha)$. Экстремальные значения $2p$ в этом случае суть $4R\sin\alpha\cos\alpha$ и $2R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$; они соответствуют: первое для $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \pi - \alpha$; второе для $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Соответствующие положения точки M суть A и A' в первом случае и C — во втором. Если $\pi - \alpha < \varphi < \pi$, то $2p = 2R\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)$. Экстремумы: $4R\sin\alpha\cos\alpha$ и $2R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$. Первый при $\varphi = \pi - \alpha$, второй при $\varphi = \pi$; соответствующие положения точки M суть A' и D.

Определение M для заданного периметра $2p = 2l$. Имеем: $l = R\cos\alpha \times (\sin\varphi + \sin\alpha)$, если $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$, или $l = R\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)$, если $\pi - \alpha < \varphi < \pi$. Первое уравнение дает $\sin\varphi = \frac{l}{R\cos\alpha} - \sin\alpha$, и мы должны иметь $\sin\alpha < \sin\varphi < 1$, откуда $2R\sin\alpha\cos\alpha < l < R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$. Если это условие выполнено, мы имеем два решения: $\varphi = \arcsin\left(\frac{l}{R\cos\alpha} - \sin\alpha\right)$ и $\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{l}{R\cos\alpha} - \sin\alpha\right)$, которым соответствуют точки M_1 и M_2: одна на дуге $\overset{\smile}{AC}$, другая на дуге $\overset{\smile}{CA'}$. Второе уравнение дает $\cos\varphi = \cos\alpha - \frac{l}{R\sin\alpha}$, и мы должны иметь $-\cos\alpha > \cos\varphi > -1$, откуда $2R\sin\alpha\cos\alpha < l < R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$. Если это уравнение выполнено, то задача имеет только одно решение: $\varphi = \arccos\left(\cos\alpha - \frac{l}{R\sin\alpha}\right)$, которому соответствует точка M_3, расположенная на дуге $\overset{\smile}{A'D'}$. Для того чтобы уточнить результаты исследования, надо еще разделить случаи $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

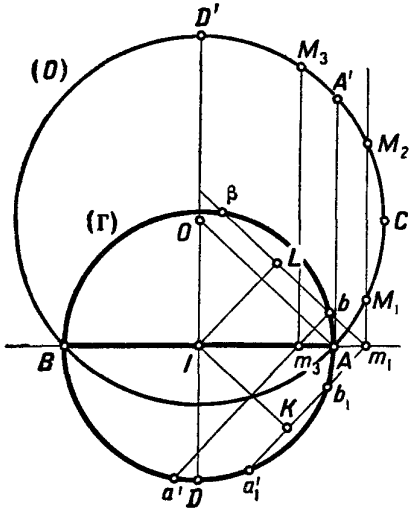
$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. 1) если $2R\sin\alpha\cos\alpha < l < R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$, три решения: M_1, M_2 и M_3; 2) если $l = R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$, то три решения: M_1, M_2 и D'; 3) если $R\sin\alpha(1 + \cos\alpha) < l < R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$, то два решения: M_1, M_2; 4) если $l = R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$, то одно решение: C; 5) если $l > R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$, то нет решений.

$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 1) Если $2R\sin\alpha\cos\alpha < l < \cos\alpha(1 + \sin\alpha)$, то три решения: M_1, M_2, M_3; 2) если $l = R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$, то два решения: C и M_3; 3) если $R\cos\alpha(1 + \sin\alpha) < l < R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$, то одно решение: M_3; 4) если $l = R\sin\alpha \times (1 + \cos\alpha)$, то одно решение: D'; 5) если $l > R\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$, то нет решений. К каждому решению надо присоединить точки, получаемые симметричным отражением найденных решений в прямых CC', DD' и в точке O.

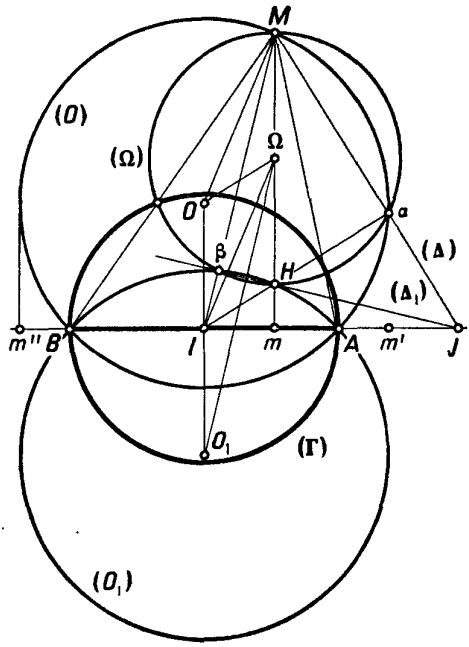
Геометрическое решение. Мы видели, что mb имеет фиксированное направление, определяемое условием $(mb, mA) = -\alpha \pmod\pi$, и, следовательно, $mb \perp OA$. Если точка M лежит на дуге $\overset{\smile}{A'D'}$, то, как мы видели (конец п. 1°), ba' — сумма сторон ma и mb. Значит, чтобы найти точку M такую, что $2p = 2l$, надо найти хорду (Γ), перпендикулярную OA и равную $2l - R\sin 2\alpha$. Если на перпендикуляре,

опущенном из I на OA, мы отложим длину $IL = l - R\sin\alpha\cos\alpha$ и проведем через точку L прямую, параллельную OA, то она пересечет (Γ) в точках b и β (черт. 209). Для решения надо взять только b; параллель прямой IL, проведенная через b, пересечет IA в точке m_3, откуда найдем и M_3. Это построение приведет к точке M_3 тогда и только тогда, когда $l - R\sin\alpha\cos\alpha$ заключено между радиусом $R\sin\alpha$ окружности (Γ) и полухордой (Γ), проходящей через A перпендикулярно OA, т. е. $R\sin\alpha\cos\alpha < l - R\sin\alpha\cos\alpha < R\sin\alpha$, откуда $2R\sin\alpha\cos\alpha < l < R\sin\alpha(1+\cos\alpha)$.

Если M лежит на дуге AA', то мы видели (окончание п. 1°), что ba' — разность между сторонами ma и mb треугольника mab. Расстояние от точки m до середины K хорды ba' равно в этом случае полусумме сторон ma и mb, поэтому



Черт. 209.



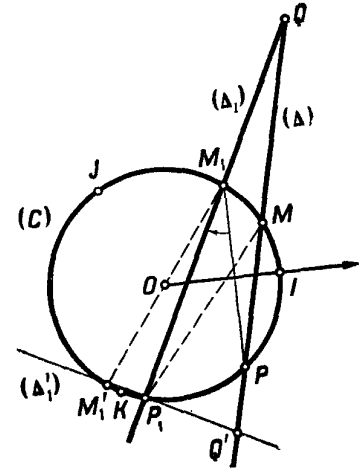
Черт. 210.

(черт. 209), если мы продолжим βb до пересечения в точке m_1 с продолжением AB и если прямая, проходящая через m_1 параллельно IL, пересечет (Γ) в точках b_1 и a_1', то $m_1b_1 + m_1a_1' = 2IL = 2l - 2R\sin\alpha\cos\alpha$. Перпендикуляр к AB в точке m_1 пересечет (O) в двух точках: M_1 и M_2, расположенных на дуге $\overset{\smile}{AA'}$ и удовлетворяющих решению вопроса. Это решение существует, если Im_1 заключено между R и $IA = R\sin\alpha$; но $Im_1 = \dfrac{IL}{\cos\alpha} = \dfrac{l - R\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$; значит, $R\sin\alpha < \dfrac{l - R\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} < R$, или $2R\sin\alpha\cos\alpha < l < R\cos\alpha(1+\sin\alpha)$. Мы получаем снова результаты предыдущего исследования.

3°. **Изученне окружностн (Ω) с днаметром *MH*.** Рассмотрим (черт. 210) окружность (Ω) с диаметром MH. Окружность (O_1) получается из (O) переносом, определяемым вектором $\overrightarrow{OO_1}$; точка H получается в результате этого переноса из точкн M, т. е. $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OO_1}$. Окружность (Ω) имеет, значит, постоянный диаметр, равный OO_1, а ее радиус равен OI. Из $\frac{1}{2}\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OI}$ следует, что $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{OM}$; значит, степень точки I относительно (Ω) равна $\overline{I\Omega}^2 - \overline{M\Omega}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{OA}^2$. Отсюда следует, что окружность (Ω) остается ортогональной к окружности с центром I и радиусом IA, т. е. к окружности (Γ). Так как $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{\Omega H}$, то $O\Omega \parallel IH$; раднкальная ось (Δ) окружностей (O) и (Ω) перпендикулярна линии их центров и, следовательно, перпендикулярна IH. Аналогично — так как $\overrightarrow{IO_1} = \overrightarrow{M\Omega}$, то $\Omega O_1 \parallel IM$; радикальная ось (Δ_1) окружностей (O_1) и (Ω) перпендикулярна линии $O_1\Omega$ их центров и, следовательно, перпендикулярна IM. Обозначим через J точку пересечения радикальных осей (Δ) и (Δ_1). Так как (M) — точка, лежащая на (Δ), то (Δ) — высота на сторону IH треугольника IMH. Точно так же H — точка, лежащая на (Δ_1); значит, (Δ_1) — высота на сторону IM в том же треугольнике IMH. Но AB — высота на

сторону MH; значит, J лежит на AB. Это видно и из того, что J есть радикальный центр окружностей (Ω), (O) и (O_1). Мы видим, что J есть ортоцентр треугольника MIH. Пусть α — вторая точка, общая (O) и (Ω); это основание высоты (Δ) на IH. Четыре точки H, m, J, α расположены на одной окружности; значит, $\overline{Im}\cdot\overline{IJ}=\overline{IH}\cdot\overline{I\alpha}=\overline{IA}^2$; значит, J гармонически сопряжена с m по отношению к A и B. Так как m описывает отрезок $m'm''$ прямой AB, то точка J описывает геометрическое место точек, гармонически сопряженных относительно точек A и B со всеми точками отрезка $m'm''$.

Огибающая (Δ) и (Δ_1). Проекция α фиксированной точки I на (Δ) описывает окружность (O); значит, огибающая (Δ) есть эллипс (e), для которого I — фокус, а (O) — главная окружность; аналогично вторая точка β, общая (Δ_1) и (O_1), есть ортогональная проекция фиксированной точки I на (Δ_1). Эта точка β описывает окружность (O_1); значит, огибающая прямых (Δ_1) есть эллипс (e_1) с фокусом I и соответствующей ему главной окружностью (O_1); заметим, что эти эллипсы симметричны относительно AB.



Черт. 211.

75. 1°. а) Число прямых (Δ), проходящих через данную точку окружности (C). Рассмотрим данную точку ориентированной окружности (C), определяемую криволинейной абсциссой α (mod 2π). Если мы эту точку примем за точку M, то ей будет соответствовать одна и только одна точка P такая, что $\overset{\smile}{IP}=-2\overset{\smile}{IM}$, ибо $\overset{\smile}{IP}=-2\alpha$ (mod 4π). Но если мы примем эту точку за точку P, то ей будут соответствовать две точки M такие, что $\overset{\smile}{IP}=-2\overset{\smile}{IM}$, так как $\overset{\smile}{IM}=-\frac{\alpha}{2}$ (mod π). Следовательно, через эту точку проходят три прямые (Δ). Заметим, что две последние из них взаимно-перпендикулярны, поскольку они соединяют точку окружности (C) с двумя ее диаметрально противоположными точками.

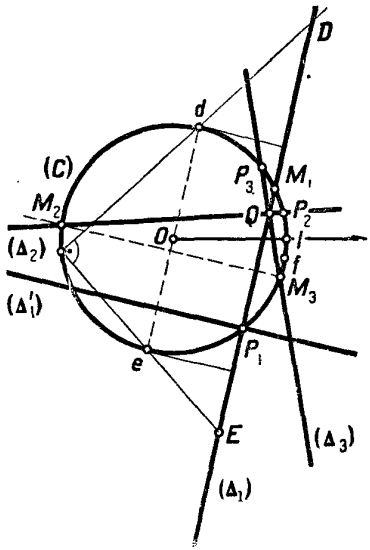
Геометрическое место точек пересечения двух ортогональных прямых (Δ). Рассмотрим (черт. 211) две прямые (Δ): PM и P_1M_1. Имеем: $\overset{\smile}{IP}=-2\overset{\smile}{IM}$, $\overset{\smile}{IP}_1=-2\overset{\smile}{IM}_1$; следовательно, $\overset{\smile}{PP}_1=-2\overset{\smile}{MM}_1$, поэтому $(M_1P,\ M_1P_1)=(PM_1,\ PM)+(QM,\ QM_1)$ (mod π) откуда $(QM,\ QM_1)=(PM_1,\ PM)$ (mod π); отсюда следует, что прямые PM и P_1M_1 ортогональны тогда и только тогда, когда M и M_1 — две диаметрально противоположные точки (C), а потому эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности (C). На основании замечания, сделанного в начале, заключаем, что геометрическим местом точек пересечения двух взаимно-перпендикулярных прямых (Δ) является вся окружность (C).

Прямые (Δ), касательные к (C). Прямая (Δ) касается (C), если точки M и P совпадают, т. е. $\overset{\smile}{PM}=0$ (mod 2π), а так как $\overset{\smile}{PM}=3\overset{\smile}{IM}$, то $\overset{\smile}{IM}=0\left(\text{mod }\frac{2\pi}{3}\right)$. Мы видим, что имеется три точки M окружности (C) такие, что (Δ) касается (C); это точки I и J такие, что $\overset{\smile}{IJ}=\frac{2\pi}{3}$, и точка K такая, что $\overset{\smile}{IK}=-\frac{2\pi}{3}$. Эти три точки образуют равносторонний треугольник с вершиной I, вписанный в окружность (C); соответствующие прямые (Δ) — касательные к (C) в точках I, J, K.

Замена I на J на K. (Δ) определяется соотношением $\overset{\smile}{IP}=-2\overset{\smile}{IM}$ (mod 2π) или $\overset{\smile}{IJ}+\overset{\smile}{JP}=-2(\overset{\smile}{IJ}+\overset{\smile}{JM})$ (mod 2π), откуда $\overset{\smile}{JP}=-2\overset{\smile}{JM}$ (mod 2π). Прямая (Δ) определена по отношению к J так же, как и по отношению к I (аналогично и для K).

б) M — середина QQ'. Рассмотрим две ортогональные прямые: (Δ_1) и (Δ_1'), пересекающиеся в точке P_1 окружности (C). Пусть (Δ) — какая-нибудь прямая, пересекающая (Δ_1) и (Δ_1') соответственно в точках Q и Q'. Имеем $(P_1M_1,\ P_1M)=(PM_1,\ PM)$ (mod π). На основании п. 1° имеем $(PM_1,\ PM)=(QM,\ QM_1)$ (mod π); следовательно, $(P_1M_1,\ P_1M)=(QM,\ QM_1)$ (mod π). Треугольник P_1MQ равнобедренный, а так как $\triangle P_1QQ'$ прямоугольный, то P_1M — медиана, относящаяся к гипотенузе QQ', а QQ' есть прямая (Δ). Обратно. Рассмотрим ортогональные прямые P_1M_1 и P_1M_1', проходящие через точку P_1 окружности (C), и пусть прямая PM

пересекает P_1M_1 и P_1M_1' в точках Q и Q' таких, что середина M отрезка QQ' лежит на (C). На основании п. 1°, а) существует равносторонний треугольник IJK такой, что P_1M_1 (и значит P_1M_1') суть прямые (Δ). Возьмем одну из его вершин I.

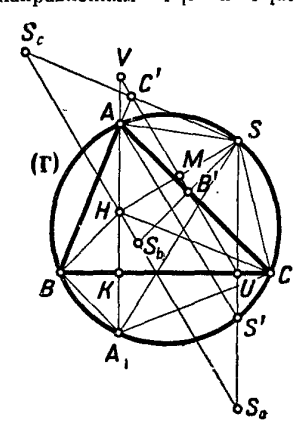


Черт. 212.

Будем иметь $\overset{\smile}{IP_1} = -2\overset{\smile}{IM_1}$. Треугольник P_1QQ' прямоугольный ($\hat{P} = 90°$), P_1M — его медиана; треугольник P_1MQ равнобедренный и, следовательно, $(P_1M_1, P_1M) = (QM, QM_1) \pmod{\pi}$. Обозначим через P вторую точку пересечения QQ' с (C). Тогда $(P_1M_1, P_1M) = (PM_1, PM) \pmod{\pi}$, $(PM_1, PM) = (QM, QM_1)$; следовательно, $(M_1P, M_1P_1) = (PM_1, PM) + (PM, M_1P_1) = (PM_1, PM) + (QM, QM_1) = 2(PM_1, PM) \times$ $\times \pmod{2\pi}$; отсюда $\overset{\smile}{PP_1} = -2\overset{\smile}{MM_1}$ и, значит, $\overset{\smile}{IP} = -2\overset{\smile}{IM}$, т. е. QQ' есть прямая (Δ), ассоциированная с точкой I.

2°. **Прямые (Δ), проходящие через данную точку Q прямой (Δ_1).** Рассмотрим (черт. 212) прямую (Δ_1), ассоциированную с окружностью (C) и точкой I и пересекающую (C) в точках M_1 и P_1. Проведем через точку P_1 прямую $(\Delta_1') \perp (\Delta_1)$. Возьмем на прямой (Δ_1) произвольную точку Q. Прямая, проходящая через точку Q, на основании п. 1°, б) будет прямой (Δ), если она пересечет (Δ_1') в точке Q' и (C) в точке M так, что M будет серединой отрезка QQ'. Геометрическое место середин отрезков, исходящих из Q и имеющих вторую граничную точку на (Δ_1'), есть медиатриса отрезка QP_1. Пусть M_2 и M_3 — пересечения (если они существуют) этой медиатрисы с (C). Искомые прямые (Δ_2) и (Δ_3) суть QM_2 и QM_3. Если медиатриса отрезка QP_1 заключена между касательными к (C), перпендикулярными к (Δ_1), имеется две прямые: (Δ_2) и (Δ_3); если она вне, то таких прямых не существует. Прямые существуют, если точка Q лежит на отрезке DE, где D и E — точки, симметричные P_1 по отношению к касательным к (C), в концах d и e диаметра (C), параллельного (Δ_1). Если Q совпадает с D или E, прямая (Δ) совпадает соответственно с Dd и Ee. Эти прямые пересекаются в точке (C) под прямым углом, так как их направления симметричны ортогональным направлениям P_1e и P_1d.

Вычисление суммы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Построение прямых (Δ_2) и (Δ_3) показывает, что точки M_2 и M_3 — окончания дуг α_2 и α_3 — симметричны относительно диаметра (C), параллельного (Δ_1); значит, $\alpha_2 + \alpha_3 = 2\overset{\smile}{Id} \pmod{2\pi}$. Пусть f — середина $P_1\overset{\smile}{M_1}$; тогда $2\overset{\smile}{If} = I\overset{\smile}{M_1} + I\overset{\smile}{P_1} = -\alpha_1 \pmod{2\pi}$, а так как $\overset{\smile}{fd} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, то $2\overset{\smile}{fd} - 2\overset{\smile}{Id} - 2\overset{\smile}{If} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pmod{2\pi}$. Итак, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi \pmod{2\pi}$. Сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ постоянна, если Q описывает (Δ_1), и даже не зависит от выбора (Δ_1).



Черт. 213.

Прямые (Δ_2) и (Δ_3), для которых $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$; (Δ_1) — задана. Пусть прямая (Δ_1) задана и ей соответствует дуга α_1. На основании предыдущего: $-2\overset{\smile}{If} = \alpha_1$, а так как $2\overset{\smile}{Id} - 2\overset{\smile}{If} = 2\overset{\smile}{fd} = \pi \pmod{\pi}$, то $2\overset{\smile}{Id} = \pi - \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$. Отсюда следует, что точки M_2 и M_3 симметричны относительно диаметра (C), параллельного (Δ_1), и соответствующие прямые (Δ_2) и (Δ_3), симметричные P_1M_2 и P_1M_3 относительно M_2M_3, пересекаются в точке Q прямой (Δ_1).

3°. **а) Точка A_1, симметричная H относительно BC.** Угол между прямыми HB и HC, соответственно перпендикулярными AC и AB, равен углу между этими последними (черт. 213): $(HB, HC) = (AC, AB) \pmod{\pi}$. Симметрия относительно BC дает $(A_1B, A_1C) = -(HB, HC) = (AB, AC) \pmod{\pi}$, откуда и следует, что точка A_1 лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Точки C', U, B лежат на одной прямой. Соединим S с A и C. Точки S, A, B, C лежат на одной окружности (Γ); следовательно, $(SC, SA) = (BC, BA) \pmod{\pi}$.

Прямые SU и SC' соответственно перпендикулярны BC и BA; значит, $(SU, SC') = (BC, BA) \pmod{\pi}$. Отсюда следует, что $(SC, SA) = (SU, SC') \pmod{\pi}$, и, отнимая от обеих частей по (SU, SA), получим $(SC, SU) = (SA, SC') \pmod{\pi}$. Так как точки S, C, U, B' лежат на одной окружности с диаметром SC, то $(SC, SU) = (B'C, B'U) \pmod{\pi}$. Аналогично, четыре точки S, B', A, C' лежат на одной окружности с диаметром AS; значит, $(SA, SC') = (B'A, B'C') \pmod{\pi}$. Таким образом, $(B'C, B'U) = (B'A, B'C') \pmod{\pi}$, откуда и следует, что точки B', U, C', лежат на одной прямой.

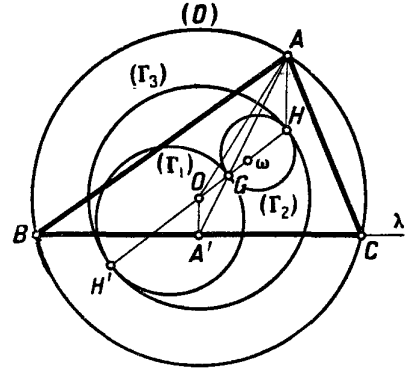
Параллелизм $S'A$ и $B'UC'$. Точки A, S, C, S' лежат на окружности (Γ). Значит $(AC, AS') = (SC, SS') \pmod{\pi}$. Но мы видели, что угол (SC, SS') или (SC, SU) равен $(B'C, B'U)$, значит, $(AC, AS') = (B'C, B'U) \pmod{\pi}$, откуда и следует, что $S'A \parallel B'UC'$.

Симметрия S относительно сторон треугольника. Точки S_a, S_b, S_c, симметричные S относительно BC, CA и AB, гомотетичны точкам U, B', C' в гомотетии $(S, 2)$ и, значит, лежат на прямой, гомотетичной $UB'C'$, т. е. $S_aS_bS_c \parallel UB'C'$. Соединим S' с A_1. Трапеция $ASS'A_1$ равнобедренная; значит, $(SA_1, SS') = (S'S, S'A) \pmod{\pi}$ или, так как $S'A \parallel S_aS_bS_c$, то $(SA_1, SS') = (S_aS, S_aS_b) \pmod{\pi}$. Так как S и S_a симметричны относительно BC, то прямые SA_1 и $S_aS_bS_c$ так же симметричны относительно BC; следовательно, прямая $S_aS_bS_c$ проходит через ортоцентр H.

б) Прямые UV образуют семейство (Δ). Соединим H с S и пусть M — точка пересечения HS с $B'UC'$. Мы видели, что M — середина HS; следовательно, M — середина UV, поскольку $AH \parallel SU$. Далее, $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HS}$ и, значит, точка M лежит на окружности (C) девяти точек треугольника ABC, которая проходит через основание K высоты AH. Мы возвращаемся к п. 2°: BC и AK — две взаимно-перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке K окружности (C); прямые UV таковы, что середина M отрезка UV лежит на (C); они, следовательно, образуют семейство (Δ) по отношению к (C) и точке I этой окружности такой, что $\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{Ia}$, где a — середина BC. Отсюда ясно, что AK и BC составляют пару взаимно-перпендикулярных прямых (Δ) и что каждая высота треугольника вместе с соответствующей ей стороной также образует такую пару; в самом деле, середина любой из сторон AC и AB треугольника ABC лежит на окружности Эйлера, а концы этих отрезков AC и AB лежат на взаимно-перпендикулярных прямых AK и BC (аналогично — середины BH и CH лежат на окружности Эйлера). Итак, все три стороны и все высоты треугольника ABC входят в семейство прямых (Δ), ассоциированных с окружностью девяти точек треугольника ABC.

76. Зная ортоцентр H треугольника (T) и центр круга, описанного вокруг этого треугольника, можно построить центр тяжести (точку пересечения медиан) G и центр ω окружности Эйлера: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{O\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$.

1°. Геометрическое место вершин треугольника (T). Пусть A — произвольная вершина треугольника (T); середина A' противоположной стороны BC есть образ точки A в гомотетии с центром G и коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{2}$. Прямая (λ), на которой лежит сторона BC, перпендикулярна OA' в точке A'; вершины B и C суть точки пересечения прямой (λ) с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Имеем $OA' < OA$, откуда $AH < 2OA$ (так как $AH = 2OA'$) или $\frac{AH}{OA} < 2$; значит, точка A лежит вне окружности Апполония, для любой точки M которой отношение MH к MO равно 2; это окружность (Γ_1), построенная на $H'G$ как на диаметре, где H' — точка, симметричная точке H относительно точки O. Далее, OA' не перпендикулярна $A'G$ (в противном случае точки A, B и C лежали бы на одной прямой); значит, $\angle OA'G = \angle HAG$ не прямой и точка A не лежит на окружности (Γ_2), построенной на GH как на диаметре. Указанные необходимые признаки ограничения расположения вершины A треугольника (T) и достаточны в том смысле, что если точка A лежит вне круга (Γ_1) и не на окружности (Γ_2), то существует треугольник (T), у которого A — вершина. Итак, геометрическое место вершин треугольников (T) есть часть плоскости, которую мы получим, удаляя из нее круг (Γ_1) и окружность (Γ_2) (черт. 214).

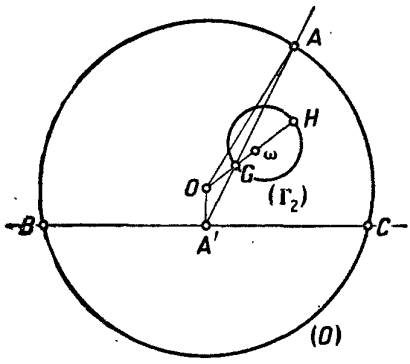


Черт. 214.

Геометрическое место вершин тупых углов. Треугольник (T) будет тупоугольный, если ортоцентр H лежит вне окружности, описанной вокруг него, и обратно, т. е. если $OA < OH$; иначе говоря, точка A должна лежать внутри окружности (Γ_3) с центром в точке O и радиусом OH. Итак, геометрическое место вершин тупоугольных треугольников есть часть плоскости, заключенная между окружностями (Γ_1) и (Γ_3), за исключением точек окружности (Γ_2). Угол A будет при этом тупым тогда и только тогда, когда медиана AA' будет меньше половины $A'B$ стороны BC, т. е. $A'A < A'B$ или $A'A^2 < A'B^2$; но $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$, $A'B^2 = OA^2 - OA'^2 = OA^2 - \frac{1}{4}AH^2$; значит, $\frac{9}{4}AG^2 < OA^2 - \frac{1}{4}AH^2$, или

$$9AG^2 < 4OA^2 - AH^2. \qquad (1)$$

С другой стороны, применяя теорему Стюарта * к треугольнику AOH и к секущей AG, будем иметь $OA^2 \cdot \overline{GH} - AG^2 \cdot \frac{3}{2}\overline{GH} + AH^2 \cdot \frac{1}{2}\overline{GH} - \overline{GH} \cdot \frac{3}{2}\overline{GH} \cdot \frac{1}{2}\overline{GH} = 0$, откуда $4OA^2 = 6AG^2 - 2AH^2 + 3GH^2$. Отсюда и из (1) находим $AH^2 + AG^2 < GH^2$; значит, точка A лежит внутри круга (Γ_2). Обратно: если точка A лежит внутри круга (Γ_2), то, повторяя выкладки в обратном порядке, мы получим, что $AA' < A'B$, т. е. угол A тупой. Итак, геометрическое место вершин A тупых углов треугольника — внутренность круга (Γ_2).



Черт. 215.

Изучение прямых (λ). Рассмотрим произвольную прямую (λ) плоскости, на которой расположена сторона BC треугольника (T) (черт. 215). Ортогональная проекция точки O на прямую (λ) есть середина A' стороны BC. Вершина A получается из A' в результате гомотетии с центром G и коэффициентом гомотетии, равным -2. Точки B и C суть точки пересечения прямой (λ) с окружностью с центром O и радиусом OA. Имеем: $OA' < OA$ или $OA' < 2\omega A'$ $(OA \parallel \omega A')$. Значит, точка A' должна лежать вне окружности (Γ_2) с диаметром GH. Отметим еще, что (λ) не проходит через точку G, так как в противном случае (λ) как прямая, проходящая через точку A', совпадала бы с прямой $A'G$, на которой лежит и вершина A. Указанные необходимые признаки (λ) достаточны. Таким образом, все прямые (λ) — это такие прямые, для которых ортогональные проекции на них точки O лежат вне окружности (Γ_2). Пусть теперь на плоскости задана точка M и ставится вопрос о том, какие прямые, проходящие через M, будут (λ)-прямые. Заметим сначала, что геометрическое место проекций точки O на прямые, проходящие через точку M, есть окружность (γ), для которой OM является диаметром. Значит (λ)-прямые, проходящие через M, — это суть те и только те прямые, которые соединяют точку M с точками дуги σ окружности (γ), лежащими вне (Γ_2), за исключением прямой MG. Если точки пересечения окружностей (γ) и (Γ_2) мы обозначим через α и α' (конечно, если эти окружности пересекаются), то прямые $M\alpha$ и $M\alpha'$ будут касательными к гиперболе (H) с фокусом O, для которой окружность (Γ_2) является главной, т. е. окружностью с центром в центре гиперболы и

---

* Теорема Стюарта: если P — произвольная точка, лежащая на стороне BC треугольника ABC, то

$$\overline{PC} \cdot AB^2 + \overline{BP} \cdot AC^2 - AP^2 \cdot \overline{BC} - \overline{BP} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{BC} = 0. \qquad (\alpha)$$

Доказательство. Пусть H — проекция точки A на BC. Тогда из треугольников ABP и ACP находим:

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2\overline{PB} \cdot \overline{PH}, \quad AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2\overline{PC} \cdot \overline{PH}.$$

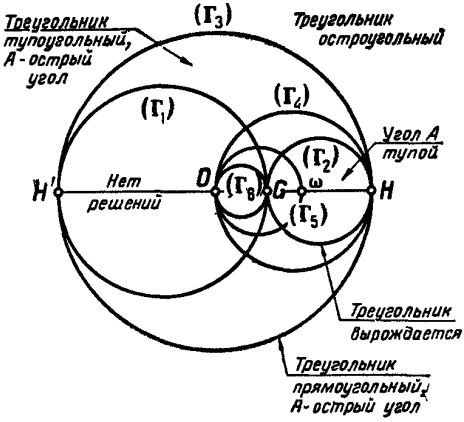
Умножая первое из этих равенств на $\overline{PC}$, а второе — на $\overline{BP}$ и складывая, мы и получим соотношение (α), так как

$$BP^2 \cdot \overline{PC} + CP^2 \cdot \overline{BP} = \overline{BP}^2 \cdot \overline{PC} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{BP} =$$
$$= \overline{BP} \cdot \overline{PC}\,(\overline{BP} + \overline{PC}) = \overline{BP} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{BC},$$

а последние члены уничтожаются в силу

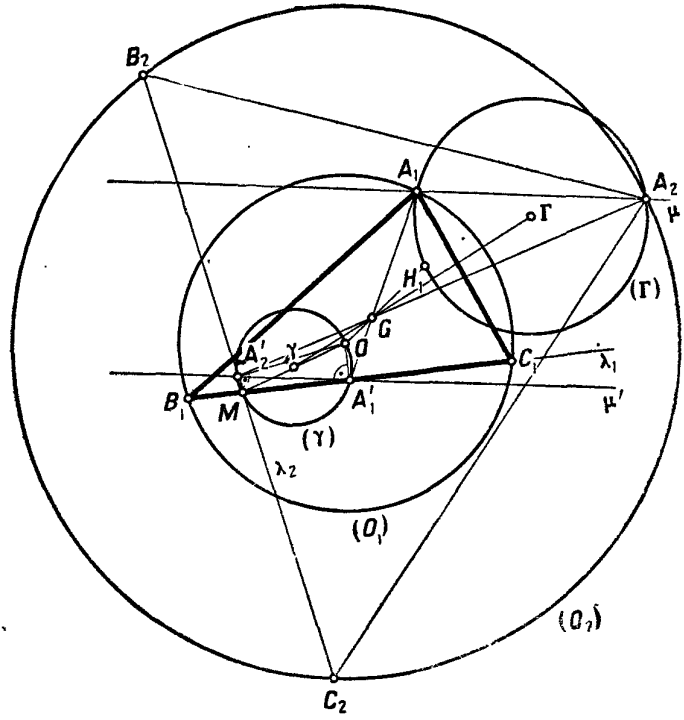
$$\overline{PB} \cdot \overline{PH} \cdot \overline{PC} + \overline{PC} \cdot \overline{PH} \cdot \overline{BP} = \overline{PH} \cdot \overline{PC}\,(\overline{PB} + \overline{BP}) = 0.$$

радиусом, равным половине ее действительной оси. Известно, что прямая пересекает гиперболу, если проекция ее фокуса на эту прямую лежит вне главной окружности, не пересекает, если эта точка лежит внутри главной окружности и касается ее при условии, что проекция лежит на главной окружности. Таким образом, (λ)-прямые, проходящие через точку M, — это те прямые, которые пересекают гиперболу (H), за исключением прямой MG. Значит, для того чтобы все прямые, проходящие через точку M, пересекали гиперболу (H), т. е. чтобы все они были (λ)-прямыми, необходимо и достаточно, чтобы точка M была бы внутренней точкой гиперболы (H) (прямая MG исключается). Рассмотрим еще несколько частных случаев: если A лежит на окружности (Γ_1), но не совпадает с точками G и H', то точка A' располагается на окружности (Γ_2) так, что $OA = OA'$; значит, точки B и C совпадают с точкой A' и треугольник (T) вырождается в отрезок AA'; в этом случае прямая (λ) касается гиперболы (H). Если A совпадает с точкой G, то с этой точкой совпадает и точка A', так же как и точки B и C, поэтому треугольник (T) вырождается в точку G; прямая (λ) — касательная к гиперболе в точке G. Если A совпадает с точкой H', то точка A' совпадает с точкой H, точки B и C также совпадают с точкой H и треугольник (T) вырождается в отрезок HH', прямая (λ) — касательная к гиперболе (H) в точке H. Если A расположена на окружности (Γ_2), но не совпадает с H, то $OA' \perp AA'$ (ибо $\angle OA'G = \angle GAH = 90°$). В этом случае одна из точек B или C совпадает с A, другая симметрична A относительно A'; треугольник (T) вырождается в отрезок AA'; прямая (λ) пересекает гиперболу (H) и проходит через точку G. Если A совпадает с точкой H, то A' совпадает с точкой O и всякий диаметр круга (Γ_3) есть сторона BC [треугольник (T) — прямоугольный, угол A — прямой, гипотенуза — произвольный диаметр (Γ_3)]; прямая (λ) проходит через фокус O гиперболы (H) и пересекает эту гиперболу. Если A расположена на окружности (Γ_3), A' располагается на окружности (Γ_4) с диаметром OH [так как при гомотетии с центром G и коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{2}$, окружность (Γ_3) переходит в окружность (Γ_4)]; прямая (λ) совпадает с прямой $A'H$ ($\angle OA'H = 90°$), одна из точек B или C совпадает с H; если, например, с точкой H совпадает точка B, то точка C будет второй точкой пересечения прямой (λ) с окружностью (Γ_3). Так как вершина B лежит на окружности (Γ_3) с центром O и эта окружность описана вокруг треугольника ABC, то угол B прямой, а гипотенузой AC является диаметр окружности (Γ_3). Наконец, если точка A расположена на части окружности (Γ_4), заключенной между (Γ_1) и (Γ_3), точка A' расположена на окружности (Γ_5) с диаметром $O\omega$; прямая (λ) проходит через точку ω. Подведем итог: если точка A находится внутри окружности (Γ_1), треугольник (T) не существует, точка A' находится внутри окружности (Γ_2), а прямая (λ) пересекает гиперболу (H). Если точка A находится внутри окружности (Γ_3), но вне окружностей (Γ_1) и (Γ_2), треугольник (T) тупоугольный, но A—угол острый, прямая (λ) (т. е. BC) пересекает гиперболу (H) и встречает прямую OH между G и H [так как точка A' будет находиться внутри (Γ_4) и вне (Γ_6) и (Γ_2) — эта область получается в результате гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ рассматриваемых областей, в которых лежит точка A]. Если точка A лежит внутри окружности (Γ_2), то треугольник (T) тупоугольный, угол A тупой, прямая (λ) пересекает гиперболу (H) (так как точка A' лежит вне ее направляющей окружности) и пересекает OH в точке, лежащей между O и G [так как точка A' лежит внутри окружности (Γ_6)]. Наконец, если A лежит вне окружности (Γ_3), то треугольник (T) остроугольный, прямая (λ) пересекает гиперболу (H) и пересекает OH в точке, лежащей вне этого отрезка OH [так как точка A' лежит в этом случае вне окружности (Γ_4), в которую переходит окружность (Γ_3) в результате гомотетии с центром в точке G и коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{2}$]. Результаты исследования приведены схематически на чертеже 216.



Черт. 216.

Построение треугольника (T) по следующим данным: прямая (μ), на которой лежит вершина A, и точка M, лежащая на стороне BC (черт. 217). Если точка A лежит на прямой (μ), то середина A' стороны BC лежит на прямой (μ'), получающейся из (μ) в результате гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$; прямая ($\lambda$) *, на которой лежит сторона BC, касается параболы (П) с фокусом в точке O, для которой прямая (μ) служит касательной в вершине [так как проекция A' точки O на прямую (λ) лежит на (μ)]. Так как прямая (λ) должна пройти через данную точку M, то построение треугольника (T) сводится к проведению касательных к параболе (П) из точки M; как мы видели, такая касательная определит треугольник (T), если



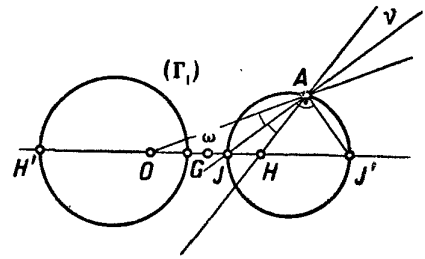
Черт. 217.

она пересекает гиперболу (H) и не проходит через точку G. Если прямая (λ), на которой лежит сторона BC, должна пройти через точку M, то точка A' должна быть расположена на окружности (γ) с диаметром OM (так как $\angle OA'M = 90°$), а значит точка A должна лежать на окружности (Γ), полученной из (γ) в результате гомотетии (G, -2). Но точка A должна лежать и на прямой (μ); следовательно, построение треугольника (T) сводится к отысканию точек пересечения прямой (μ) с окружностью (Γ). Точка A пересечения прямой (μ) с окружностью (Γ) определит треугольник (T), если эта точка расположена вне окружности (Γ_1) и не на окружности (Γ_2) (за исключением H). Пусть прямая (μ) фиксирована. Исследуем при этом построение треугольника (T), привлекая к исследованию гиперболу (H) и параболу (П). Если M лежит внутри параболы (П), задача не имеет решения. Если точка M лежит на параболе (П), то существует касательная к параболе (П) в точке M; следовательно, если точка M лежит на параболе (П) и внутри гиперболы (H), задача имеет одно решение. Если точка M лежит на параболе (П) и вне гиперболы (H), имеется одно решение или ни одного в соответствии с тем, пересекает или нет касательная к параболе (П) в точке M гиперболу (H) или нет. Если точка M лежит вне параболы (П), существуют две касательные к ней, проходящие через точку M. Следовательно, если точка M лежит вне параболы (П) и внутри гиперболы (H), имеется два решения, если же точка M лежит и вне пара-

* Здесь «прямой (λ)» мы называем прямую, проходящую через A' перпендикулярно OA'.

болы (П) и вне гиперболы (H), то существуют два, одно или ни одного решения в зависимости от того, пересекают ли гиперболу (H) две, одна или ни одна из этих касательных. В частности, если прямая (μ) проходит через точку H, то прямая (μ') проходит через точку O и, значит, прямая (λ) есть перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую (μ'). Таким образом, задача имеет одно или ни одного решения в зависимости от того, пересекает или нет прямая (λ) гиперболу (H). Проведем исследование числа решений, считая фиксированной точку M; проведем в этом случае элементарное исследование. Если точка M фиксирована, то окружность (Γ) известна. Если прямая (μ) не пересекает окружность (Γ_1), то имеются два, одно или ни одного решения в зависимости от того — пересекает, касается или не пересекает прямая (μ) окружность (Γ). Если прямая (μ) касается окружности (Γ_1), имеется два решения; если она пересекает (Γ) в двух точках, отличных от точек касания с окружностью (Γ_1), то одно решение, при условии, что одна из точек пересечения (μ) и (Γ) совпадает с точкой касания (μ) и (Γ_1); если (μ) касается (Γ), имеется одно решение, при условии, что при этом (Γ) не касается (μ) в той же точке, в которой (μ) касается (Γ_1); наконец, если μ пересекает (Γ_1), имеется два решения, одно или ни одного в соответствии с тем, что (μ) пересекает, касается или не пересекает (Γ), и в соответствии с тем, будут ли эти точки внутренними или внешними по отношению к окружности (Γ_1).

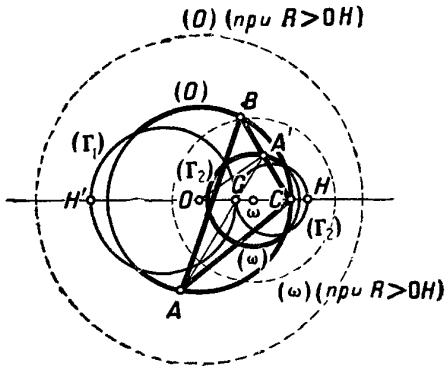
Построение треугольника (T) по биссектрисе (ν) внутреннего или внешнего угла. Напомним, что прямые AO и AH одинаково наклонены к сторонам AB и AC. Задача сводится к определению треугольника AOH, для которого данная прямая (ν) является биссектрисой угла A. Пусть J — точка пересечения прямой (ν) с прямой OH [если (ν) не параллельна OH]; обозначим через J' четвертую гармоническую к J относительно точек O и H (черт. 218); точка A будет тогда второй точкой пересечения окружности с диаметром JJ' с прямой (ν). Это построение приводит к треугольнику (T), если точка A лежит вне окружности (Γ_1) и не на окружности (Γ_2) (за исключением H). Заметим, что окружность с диаметром JJ' принадлежит так же, как и (Γ_1), пучку (F) окружностей, имеющих предельными точками точки O и H, и рассмотрим различные случаи расположения точки J на прямой OH. Если точка J лежит между точками G и H', то окружность с диаметром JJ' лежит внутри окружности (Γ_1); треугольник (T) не существует. Если J совпадает с точкой G, то J' совпадает с H'; окружность с диаметром JJ' совпадает с окружностью (Γ_1) и, значит, точка A — точка пересечения прямой (ν) с окружностью (Γ_1); в этом случае треугольник (T) вырождается в отрезок, если A не совпадает с точкой G, и вырождается в точку G, если прямая (ν) касается окружности (Γ_1) в точке G. Если точка J совпадает с точкой H', треугольник (T) снова вырождается. Если точка J лежит вне отрезка GH, но не совпадает ни с точкой H, ни с точкой ω, то окружность с диаметром JJ' лежит вне окружности (Γ_1); если при этом прямая (ν) наклонная к OH, мы получаем одно решение; если же при этом (ν) перпендикулярна OH, то точка A совпадает с точкой J, треугольник ABC равнобедренный. Если точка J совпадает с точкой H, точка A также совпадает с точкой H, треугольник же (T) прямоугольный, с прямым углом A; он вписан в окружность (Γ_3), сторона BC — диаметр окружности (Γ_3), перпендикулярный радиусу окружности (Γ_3), проходящему через вторую точку, общую для прямой (ν) и (Γ_3), которая может быть и отличной от H (сделать чертеж) и совпадать с H (сделать чертеж); в последнем случае треугольник (T) прямоугольный равнобедренный. Если точка J совпадает с точкой ω, задача не имеет решений при условии, что (ν) не перпендикулярна OH; если же (ν) перпендикулярна OH в ее середине ω, то точка A — произвольная точка прямой (ν), за исключением точек пересечения прямой (ν) с окружностью (Γ_2) [для этих точек треугольник (T) вырождается]. Наконец, если прямая (ν) параллельна прямой OH — имеется одно решение, для которого вершиной A служит точка пересечения прямой (ν) с перпендикуляром, восставленным к отрезку OH в его середине ω. Итак, задача имеет единственное решение, если прямая (ν) пересекает прямую OH в точке, лежащей вне отрезка GH' (за исключением ω); в случае, если (ν) перпендикулярна OH в середине ω отрезка OH, имеется бесконечное множество решений.



Черт. 218.

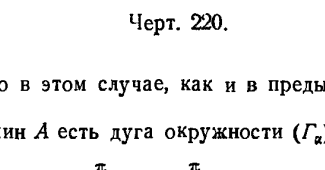
Изучение треугольника (T), для которого задан радиус R описанной окружности. Все вершины треугольника (T), для которого задан радиус R описанной окружности, лежат на окружности (O) с центром в точке O и радиусом R; середины же сторон лежат на окружности с центром ω радиуса $\frac{R}{2}$, гомотетичной

указанной окружности в гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ (на черт. 219 случай $OG < R < OH$ изображен пунктиром). Вспомним, что на основании предыдущего, вершины треугольника (T) должны лежать вне окружности (Γ_1) и не на окружности (Γ_2). Отсюда мы легко находим геометрическое место вершин треугольника (T) и огибающую его сторон. Если $R \leqslant OG$, треугольник не существует; если $OG < R < OH$, то геометрическим местом вершин треугольника (T) является дуга окружности радиуса R с центром O, лежащая вне окружности (Γ_1), за исключением точек пересечения этой дуги с окружностями (Γ_1) и (Γ_2); геометрическое место середин — дуга окружности радиуса $\frac{R}{2}$ с центром ω, лежащая вне окружности (Γ_2), за исключением точек пересечения этой дуги с окружностями (Γ_2) и (Γ_6). Огибающая сторон — дуги гиперболы, имеющей O и H своими фокусами, а ω — направляющей окружностью; эти дуги состоят из всей ветви гиперболы, окружающей фокус O, из двух частей другой дуги гиперболы, не содержащей ее вершины и ограниченной двумя точками, соответствующими тем касательным, на которые точка O проектируется в точки, совпадающие с точками пересечения окружностей (Γ_2) и (ω). Если $R = OH$, то геометрическое место вершин — вся окружность радиуса R с центром O [т. е. окружность (Γ_3)], а огибающая сторон вырождается в две точки: O и H (иначе говоря, стороны проходят через эти точки). Если $R > OH$, то геометрическое место вершин — окружность радиуса R с центром в точке O; середины сторон образуют окружность (E) радиуса $\frac{R}{2}$ с центром ω, а огибающая сторон — эллипс, для которого точки O и H — фокусы, а окружность (E) — направляющая.



Черт. 219.

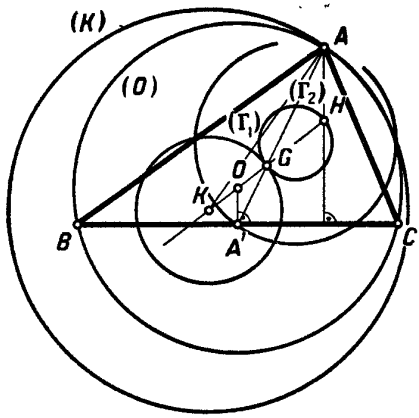
Изучение треугольника (T), для которого задан угол $\angle BAC = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$. Если угол BAC треугольника (T) равен α, то (см. черт. 214) $AH = 2OA' = 2OA\,|\cos\alpha|$; следовательно, $\frac{AH}{OA} = 2|\cos\alpha|$, а потому в случае, если $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$ и $\alpha \neq \frac{2\pi}{3}$, точка A расположена на окружности, для каждой точки которой отношение расстояний до точек H и O равно $2|\cos\alpha|$ (черт. 220). Этот круг (Γ_α) входит в пучок окружностей, имеющих O и H предельными точками, а так как при этом $2|\cos\alpha| < 2$, то окружность (Γ_α) или лежит вне окружности (Γ_1), или охватывает окружность (Γ_1). Значит все точки окружности (Γ_α), за исключением точек пересечения этой окружности с окружностью (Γ_2), суть вершины треугольников (T). Мы имеем далее: если $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то (Γ_α) охватывает точку O, геометрическое место вершин A есть дуга окружности (Γ_α), внешняя по отношению к окружности (Γ_2) (ибо A — острый угол).



Черт. 220.

Если $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$, то (Γ_α) охватывает точку O, ибо в этом случае, как и в предыдущем, $1 < \frac{AH}{AO} < 2$ и геометрическое место вершин A есть дуга окружности (Γ_α), внутренняя по отношению к (Γ_2) (A — тупой угол). Если $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, (Γ_α) окружает H и геометрическим местом точек A является дуга окружности (Γ_α), внешняя по отношению к окружности (Γ_2). Если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, то $0 < 2|\cos\alpha| < 1$, поэтому окружность (Γ_α) охватывает предельную точку H и геометрическим местом точек A является дуга окружности (Γ_α), внутренняя для (Γ_2) (A — тупой угол). Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, окружность (Γ_α) вырождается в точку H; если $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то A лежит на перпендикуляре к OH, проведенном через его середину ω; геометрическим местом вершин является часть этого перпендикуляра, внешняя по отношению к (Γ_2)

(A — острый угол). Если $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, то геометрическое место вершин A — часть указанного перпендикуляра, внутренняя по отношению к окружности (Γ_2) (ибо A — тупой угол). Геометрическое место точек A' получается из геометрического места точек A в результате преобразования гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Поэтому, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то геометрическое место точек A' есть дуга окружности (Γ'_α), не окружающей O, а значит огибающая сторон BC есть дуга гиперболы, имеющая O фокусом, а (Γ'_α) — направляющей окружностью. Если $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то геометрическое место точек A' есть дуга окружности (Γ'_α), окружающей O, огибающая стороны BC — дуга эллипса, имеющая O фокусом, а (Γ'_α) — направляющей окружностью. Аналогичные выводы можно сделать для следующих значений α: если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, огибающая стороны BC есть дуга эллипса, а если $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$, то огибающая — дуга гиперболы. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, точка A' совпадает с точкой O и огибающая стороны BC сводится к точкам O и H. Если $\alpha = \frac{\pi}{3}$ или $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, то геометрическое место точек A — часть перпендикуляра, восставленного к отрезку OH в его середине, а значит огибающая BC — часть параболы с фокусом O, для которой касательной в вершине является перпендикуляр, восставленный к отрезку $O\omega$ в его середине. Точки B и C получаются из точки A', если произвести гомотетию с центром O и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{|\cos\alpha|}$, а затем произвести повороты на углы $\pm\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и на углы $\pm(\pi - \alpha)$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Значит, эти геометрические места суть дуги окружностей, если $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$ и $\alpha \neq \frac{2\pi}{3}$, и части прямых, если $\alpha = \frac{\pi}{3}$ или $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Точки B' и C' получаются соответственно из точек B и C в результате гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, геометрические места этих точек суть дуги окружностей, когда $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, $\alpha \neq \frac{2\pi}{3}$, и части прямых, когда $\alpha = \frac{\pi}{3}$ или $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Огибающие сторон AB и AC суть части линий второго порядка с фокусом O, имеющих в качестве направляющей окружности геометрическое место точек B' и C', если $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$ и $\alpha \neq \frac{2\pi}{3}$, и части парабол с фокусом O, имеющих касательными в вершинах прямые, на которых лежат геометрические места точек B' и C', если $\alpha = \frac{\pi}{3}$ или $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Это линии того же рода, что и огибающие стороны BC.

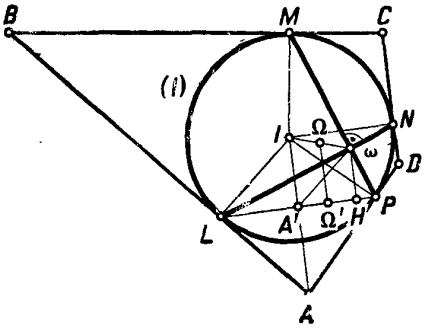


Черт. 221.

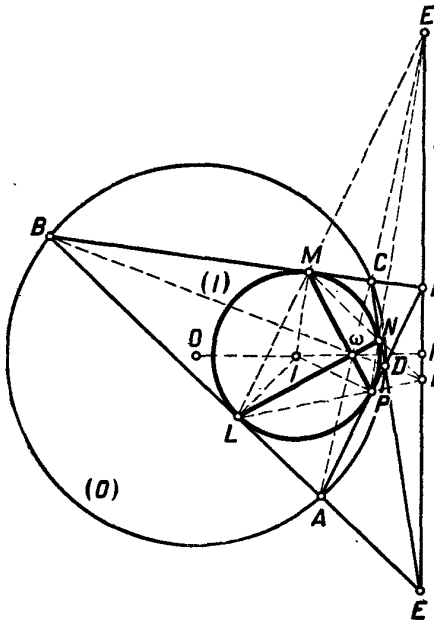
Изучение треугольника (T), для которого дана длина a стороны BC (черт. 221). Для того чтобы в треугольнике (T) длина стороны BC равнялась a, необходимо и достаточно, чтобы $OA^2 - OA'^2 = \frac{a^2}{4}$, или $4OA^2 - AH^2 = a^2$. Пусть K — точка отрезка OH такая, что $KH = 4KO$. Прилагая теорему Стюарта к треугольнику OAH и к секущей AK, будем иметь $AK^2 \cdot \overline{OH} - AO^2 \cdot \frac{4}{3}\overline{OH} + AH^2 \times \times \frac{1}{3}\overline{OH} - \overline{OH} \cdot \frac{4}{3}\overline{OH} \cdot \frac{1}{3}\overline{OH} = 0$, или $AK^2 - \frac{4AO^2 - AH^2}{3} - \frac{4}{9}OH^2 = 0$, откуда

$AK^2 = \frac{3a^2 + 4OH^2}{9}$. Отсюда следует, что точка A лежит на окружности с центром в точке K и радиусом $\frac{1}{3}\sqrt{4OH^2 + 3a^2}$. Точка K является центром окружности (Γ_1), радиус окружности (K) с центром в точке K и радиусом AK больше радиуса $\frac{2}{3}OH$ окружности (Γ_1). Значит, окружность (K) охватывает окружность (Γ_1). Геометрическое место вершин A — это окружность (K), за исключением точек пересечения этой окружности с окружностью (Γ_2). Геометрическое место точек A' есть поэтому окружность (K'), центр которой совпадает с центром окружности (Γ_2) и радиус которой равен $\frac{1}{6}\sqrt{4OH^2 + 3a^2}$. Этот радиус становится равным $K'O$, если $a = 2OH$. Мы видим, таким образом, что если $a > 2OH$, окружность (K') охватывает точку O и огибающая сторон BC есть эллипс с фокусом O и направляющей окружностью (K'). Если $a < 2OH$, точка O лежит вне окружности (K') и огибающая сторон BC — гипербола с фокусом O, для которой (K') — направляющая окружность. Если, наконец, $a = 2OH$, то O лежит на окружности (K') и огибающая вырождается: она состоит из точки O и точки, диаметрально противоположной точке O относительно окружности (K').

77. 1°. **Геометрическое место точек A'.** Точка A' — середина гипотенузы LP треугольника $L\omega P$; значит, $A'\omega = A'P = A'L$ и, следовательно, (черт. 222) $A'I^2 + A'\omega^2 = A'I^2 + A'P^2 = IP^2 = r^2$. Точка A' такова, что сумма квадратов расстояний от нее до фиксированных точек I и ω равна постоянной величине r^2. Значит, точка A' расположена на окружности (Γ), центр которой есть середина отрезка $I\omega$ и радиус ρ которой определяется из соотношения $4\rho^2 + I\omega^2 = 2r^2$. Обратно: если A' — любая точка окружности (Γ), то $IA'^2 + A'\omega^2 = r^2$, откуда $A'I < r$; значит, точка A' лежит внутри окружности (I). Поэтому существует



Черт. 222.



Черт. 223.

хорда LP, для которой A' — середина. Тогда $A'I^2 + A'P^2 = r^2$ и, значит (см. также предыдущее соотношение), $A'\omega = A'P$, откуда следует, что $\angle L\omega P = 90°$. Значит геометрическим местом точек A' является вся окружность (Γ); точки I и ω лежат внутри этой окружности (Γ), так как на продолжении отрезка $I\omega$ за его граничные точки имеются точки, удовлетворяющие соотношению $A'I^2 + A'\omega^2 = r^2$.

Геометрическое место проекций H точки ω на LP. Так как точка Ω — середина $I\omega$, то ее проекция Ω' на LP есть середина $A'H$; значит, точка Ω расположена на медиатрисе отрезка $A'H$ и, значит, $\Omega H = \Omega A'$. Отсюда следует, что точка H расположена на окружности (Γ) — это вторая точка, в которой прямая LP пересекает окружность (Γ). Так как луч ωH параллелен лучу IA', так как оба эти луча направлены в одну сторону и так как луч IA' принимает всевозможные направления вокруг точки I, то точка H описывает всю окружность (Γ).

Геометрическое место точек A. Точка A есть образ точки A' в инверсии (I, r^2); значит, геометрическое место точек A есть окружность (O), получаемая из (Γ) инверсией (I, r^2) (черт. 223).

Огибающая *LP*. Прямая LP несет на себе вторую сторону прямого угла, первая сторона которого проходит через фиксированную точку I, причем вершина A' прямого угла описывает окружность (Γ), внутри которой лежит точка I. Отсюда следует, что огибающей LP служит эллипс с фокусом I и направляющей окружностью (Γ) (второй фокус ω).

Замечание. Огибающей других сторон четырехугольника $LMNP$ служит тот же эллипс (E), так как прямая LP при вращении двух взаимно-перпендикулярных прямых, проходящих через ω, будет занимать последовательно положения всех сторон этого четырехугольника.

2°. Четырехугольник, образованный касательными к (I) в точках *L, M, N, P*. Так как точка A при вращении двух взаимно-перпендикулярных прямых вокруг ω пройдет через положения B, C, D, то все эти точки принадлежат геометрическому месту точек A, т. е. лежат на окружности (O); значит, четырехугольник $ABCD$ вписанный.

3°. Полюс *AC*. Полярами точек A и C относительно (I) являются соответственно прямые LP и MN. Значит, полюсом F' прямой AC является точка пересечения LP и MN. Аналогично: точка E' пересечения LM и NP есть полюс прямой BD относительно (I).

AC и BD проходит через ω. Из способа построения поляры точки по отношению к окружности с помощью одной линейки следует, что поляры точек F' и E' по отношению к окружности (I) будут $\omega E'$ и $\omega F'$. Но мы уже видели, что поляры точек F' и E' суть AC и BD. Значит, $\omega E'$ совпадает с AC, а $\omega F'$ — с BD. Таким образом, четыре точки A, C, ω, E' лежат на одной прямой так же, как и четыре точки: B, D, ω, F'.

Пучок, образуемый *AC, BD, LN, MP*. Прямые LN, MP, $\omega F'$ и $\omega E'$ образуют гармоническую четверку; но $\omega F'$ и $\omega E'$ совпадают соответственно с BD и AC.

4°. Рассмотрение точек *E, F, E', F'*. Точки E, F, E', F' суть соответственно полюсы относительно (I) прямых LN, MP, BD и AC, которые проходят через одну точку ω и образуют гармоническую четверку. Значит, эти точки расположены на одной прямой и также образуют гармоническую четверку, иначе точки E, F, E' и F' суть точки, в которых прямая (Δ) пересекается с перпендикулярами, опущенными из I на LN, MP, BD и AC. Так как последняя четверка прямых гармоническая, то и перпендикуляры из I на эти прямые также образуют гармоническую четверку и, значит, точки E, F, E', F' также образуют гармоническую четверку.

Отношение ω к (O) и (I). Из способа построения поляры точки по отношению к окружности с помощью одной линейки следует, что точка ω лежит на поляре точки E относительно окружности (O). Точка ω принадлежит также поляре точки F относительно (O); значит, поляра точки ω относительно (O) есть (Δ). Итак, (Δ) есть поляра точки ω и относительно (I) и относительно (O). Таким образом, каждая из окружностей (I) и (O) делит гармонически отрезок ωK, где K — проекция ω на (Δ). Мы видим, что окружности (O) и (I) принадлежат одному пучку окружностей, для которого ω — одна из предельных точек.

5°. Вычисление угла от *LN* до *MP*. На основании теоремы Шаля имеем

$$(LN, MP) = (LN, LI) + (LI, MI) + (MI, MP), \qquad (1)$$

а также $(LN, MP) = (NL, PM) = (NL, NI) + (NI, PI) + (PI, PM)$, а так как треугольники LIN и MIP равнобедренные, то

$$(LN, MP) = -(LN, LI) + (NI, PI) - (MI, MP). \qquad (2)$$

Складывая почленно (1) и (2), получим $2(LN, MP) = (LI, MI) + (NI, PI)$; но LI, MI, NI, PI соответственно перпендикулярны BA, BC, DC, DA; значит, $2(LN, MP) = (BA, BC) + (DC, DA)$; но $ABCD$ — вписанный четырехугольник, значит $(BA, BC) = (DA, DC)$, а потому $2(LN, MP) = (DA, DC) + (DC, DA) = 0$ (все с точностью до $k\pi$) и потому $2(NL, MP) = n\pi$, $(NL, MP) = \frac{n\pi}{2}$. Так как прямые NL и MP не имеют одного направления, то n нечетное, иначе $LN \perp MP$. Но прямые LN и MP образуют с AC и BD гармонический пучок; значит, LN и MP — биссектрисы углов между AC и BD.

Существование эллипса (E). Существование эллипса (E) (с фокусами I и ω) было установлено в п. 1°.

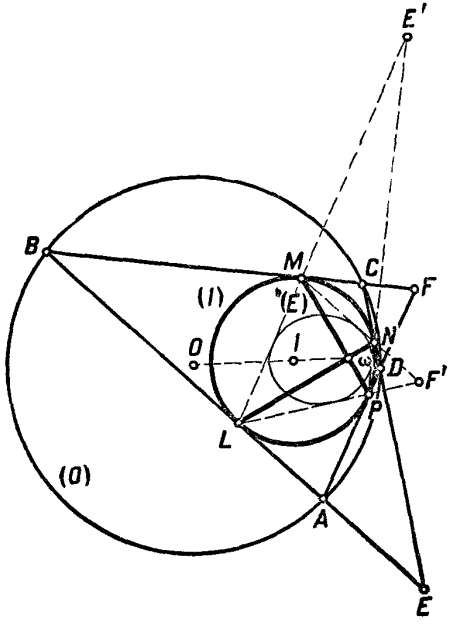
6°. Существование бесконечного множества четырехугольников, вписанных в (O) и описанных вокруг (I). Проведем через точку ω две какие-нибудь взаимно-перпендикулярные прямые; пусть l, n, m, p — точки, в которых они пересекут окружность (I) и пусть $abcd$ — четырехугольник, образованный касательными к окружности (I) в этих точках. На основании сказанного выше, точки a, b, c, d будут оставаться на фиксированной окружности, в то время как две взаимно-перпендикулярные прямые, проведенные через ω, будут вращаться вокруг ω. Эта

фиксированная окружность есть не что иное, как (O), так как если ln и mp совпадают соответственно с LN и MP, то точки a, b, c, d совпадают соответственно с A, B, C, D. Итак, переменный четырехугольник $abcd$ постоянно описан вокруг (I) и вписан в (O).

Существование бесконечного множества четырехугольников, вписанных в (I) и описанных вокруг (E). Переменный четырехугольник $lmnp$ на основании п. 1° таков, что его стороны постоянно касаются одного и того же эллипса с фокусами I и ω. Так как этот четырехугольник $lmnp$ может совпасть с $LMNP$, то этот эллипс и есть эллипс (E). Переменный четырехугольник $lmnp$ постоянно вписан в (I) и описан вокруг (E) (черт. 224).

Соотношение между R, r и d. На основании п. 1° окружность (Γ) есть направляющая окружность эллипса (E) и может быть получена из окружности (O) при помощи инверсии $\left(I, r^2\right)$. Гомотетия $\left(I, \frac{r^2}{d^2-R^2}\right)$, так же как и инверсия $\left(I, r^2\right)$, преобразует (O) в (Γ). Поэтому отношение радиуса ρ окружности (Γ) к радиусу R окружности (O) равно абсолютной величине коэффициента гомотетии $\left(I, \frac{r^2}{d^2-R^2}\right)$, т. е.

$$\frac{\rho}{R}=\frac{r^2}{|d^2-R^2|}=\frac{r^2}{R^2-d^2}. \qquad (3)$$



Черт. 224.

Это самое отношение равно отношению расстояний от центров Ω и O этих окружностей до центра I гомотетии

$$\frac{\rho}{R}=\frac{I\Omega}{IO}=\frac{I\Omega}{d}. \qquad (4)$$

Выше мы имели

$$2\rho^2+\frac{I\omega^2}{2}=r^2,$$

или

$$4\rho^2+I\omega^2=2r^2. \qquad (5)$$

Исключая ρ и $I\Omega$ из соотношений (3), (4) и (5), найдем искомую зависимость между R, r и d:

$$2r^2(R^2+d^2)=(R^2-d^2)^2.$$

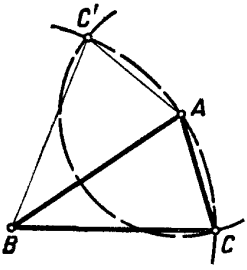
78. 1°. Произведение $(C)(B)(A)$ есть тождественное преобразование. Пусть C' — образ C в преобразовании поворота (A, α). Точка C' расположена на окружности (A, AC). Для того чтобы поворот (B, β) возвращал точку C' в положение C, необходимо и достаточно, чтобы точка C' была расположена на окружности (B, BC). Эти две окружности имеют одну общую точку C, значит C' — их вторая точка встречи (черт. 225). Таким образом, точка C' симметрична точке C относительно прямой AB. Значит, $\alpha=(\vec{AC}, \vec{AC'})=2(\vec{AC}, \vec{AB})$, $\beta=(\vec{BC'}, \vec{BC})=2(\vec{BA}, \vec{BC})$ (с точностью до $2k\pi$, где k — любое целое число). Так как углы α и β определены с точностью до $2k\pi$, то в этих равенствах $(\vec{AC}, \vec{AB})$ и $(\vec{BA}, \vec{BC})$ можно заменить соответственно на (AC, AB) и (BA, BC), так как эти углы определены с точностью до $k\pi$, но перед ними стоит множитель 2. Если α и β определены так, как было указано, повороты (A, α) и (B, β) совпадают с теми, которые в условии задачи обозначены через (A) и (B). Так как при всяком вращении вокруг точки C она остается на месте, то произведение $(C)(B)(A)$ оставляет точку C на месте и, значит, это произведение есть вращение вокруг точки C. Угол этого вращения, на основании теоремы Шаля, равен 0 (с точностью до $2k\pi$), так как $2[(AC, AB)+(BA, BC)+(CB, CA)]=0$ (с точностью до $2k\pi$). Поэтому $(C)(B)(A)$ каждую точку плоскости оставляет на месте.

2°. а) Углы (RP, RP') и (RQ, RQ') постоянны. Окружность (ω') может быть получена из окружности (ω) вращением $(R\omega, R\omega')$. Пусть P и Q — точки, в которых окружность (ω) пересекается с какой-нибудь окружностью с центром в R (черт. 226). Их образы P' и Q' во вращении $(R\omega, R\omega')$ суть точки, в которых окружность (ω') пересекает рассматриваемую окружность с центром R. Таким образом, $(RP, RP')=(R\omega, R\omega')$ и $(RQ, RQ')=(R\omega, R\omega')$.

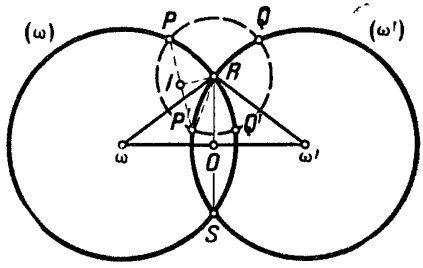
б) **Геометрическое место середины I отрезка PP'.** Прямое подобие с центром R, которое точку P преобразует в середину I отрезка PP', переводит точку ω в середину O отрезка $\omega\omega'$. Значит, геометрическое место точек I есть образ геометрического места точек P в указанном подобии. Но геометрическое место точек P есть окружность (ω); значит, геометрическое место точек I есть окружность, полученная из окружности (ω) указанным подобием, т. е. окружность, построенная на RS как на диаметре.

в) **Прямая PP' или QQ' проходит через фиксированную точку.** Так как $PP' \perp R'$, то PP' проходит постоянно через точку S; аналогично QQ' проходит также через S.

3°. а) **Угол $(M'M, M'M'')$ в функции $(M'A, M'B)$.** На основании теоремы Шаля $(M'M, M'M'') = (M'M, M'A) + (M'A, M'B) + (M'B, M'M'')$ Пусть I и I'' — середины $M'M$ и $M'M''$ тогда $(M'M, M'M'') = (M'M, AI) + (AI, M'A) + (M'A, M'B) + (M'B, BI'') + (BI'', M'M'')$; но так как $AM' = AM$ и $(AM, AM') = 2(AC, AB)$, то $(M'M, AI) = \frac{\pi}{2}$ и $(AI, M'A) = (AI, AM') = (AC, AB)$. И далее,



Черт. 225.



Черт. 226.

из соотношений $BM'' = BM'$ и $(BM', BM'') = 2(BA, BC)$ имеем $(M'B, BI'') = (BM', BI'') = (BA, BC)$ и $(BI'', M'M'') = \frac{\pi}{2}$. Соотношение, написанное выше, принимает вид $(M'M, M'M'') = \frac{\pi}{2} + (AC, AB) + (M'A, M'B) + (BA, BC) + \frac{\pi}{2}$, или $(M'M, M'M'') = (M'A, M'B) + (AC, AB) + (BA, BC) + \pi$. На основании теоремы Шаля $(AC, AB) + (BA, BC) = (AC, BC) = (CA, CB)$; слагаемое π можно опустить, так как все эти равенства имеют место с точностью до $k\pi$. Итак, $(M'M, M'M'') = (M'A, M'B) + (CA, CB)$.

б) **Геометрическое место точек M'.** Для того чтобы точки M, M' и M'' лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $(M'A, M'B) + (CA, CB) = 0$, откуда $(M'A, M'B) = -(CA, CB)$. Из этого равенства следует, что точка M' должна быть расположена на окружности (Γ), симметричной окружности, описанной вокруг треугольника ABC относительно стороны AB.

в) **Геометрическое место точек M и M''.** Круговой перестановкой букв A, B, C и M, M', M'' заключаем, что для того чтобы точки M, M' и M'' лежали бы на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы точка M'' лежала на окружности (Γ''), симметричной окружности, описанной вокруг треугольника ABC относительно стороны BC, или чтобы точка M лежала на окружности (Γ), симметричной окружности, описанной вокруг треугольника ABC относительно стороны CA.

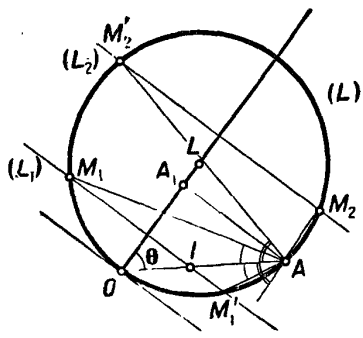
г) **Прямая $MM'M''$ проходит через фиксированную точку.** Окружности (Γ) и (Γ') равны и пересекаются в точке A. Точки M и M', расположенные соответственно на этих окружностях, соответствуют друг другу [так же, как и точки P и P' окружностей (ω) и (ω') в преобразовании вращения с центром R, которое преобразует (ω) в (ω') [см. 2°, в)]. Отсюда следует, что прямая MM' проходит постоянно через вторую точку, общую окружностям (Γ) и (Γ').

д) **Характеристика точки, через которую проходит переменная прямая $MM'M''$.** Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной вокруг треугольника; значит, окружности (Γ), (Γ'), (Γ''), симметричные окружности, описанной вокруг треугольника ABC относительно сторон этого треугольника, проходят через ортоцентр треугольника ABC — такова фиксированная точка, через которую проходят прямые MM'.

79. 1°. Построение пары (M, M'). Обозначим через M'' точку, симметричную точке M' относительно OA. Точки A, M и M'' должны лежать на одной прямой, и из соотношения $AM \cdot AM' = b^2$ следует, что $\overline{AM} \cdot \overline{AM''} = \varepsilon b^2$ ($\varepsilon = \pm 1$). Иначе говоря, точки M и M'' соответствуют друг другу в инверсии $(A, \varepsilon b^2)$. Отсюда следует, что пара точек (M, M') есть пара точек, общих окружности (L) и прямой,

которая получается из (L) в результате преобразования, являющегося произведением инверсии $(A, \varepsilon b^2)$ на симметрию в OA (это произведение коммутативно). Две инверсии: (A, b^2) и $(A, -b^2)$, предшествующие или следующие за симметрией в OA, преобразуют (L) в две прямые: (L_1) и (L_2), параллельные касательной к окружности (L) в точке O. Каждая из этих прямых (L_1) и (L_2), если только они пересекают (L), дает решение (M, M') вопроса.

Исследование. Обозначим (черт. 227) через L центр окружности (L), через l — радиус (L). Пусть $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OL}) = \theta$. Достаточно рассмотреть значения θ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, так как значения θ из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ соответствуют окружностям, симметричным относительно OA. Предположим, что $b > 0$. Пусть A_1 — проекция A на ось $\overrightarrow{OL}$. Радиус l окружности (L) равен $l = \frac{a}{2\cos\theta}$ и $OA_1 = a\cos\theta$. В инверсии $(A, \varepsilon b^2)$ (предшествующей или следующей за симметрией в OA) прямая, в которую переходит (L), будет находиться от A на расстоянии d, определяемом из равенства $d\frac{a}{\cos\theta} = \varepsilon b^2$. Следовательно, алгебраическая величина расстояния от прямой (L_1) до (O) на оси $\overrightarrow{OL}$ есть $d_1 = a\cos\theta - \frac{b^2\cos\theta}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos\theta$ и до (L_2) есть $d_2 = a\cos\theta + \frac{b^2\cos\theta}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a}\cos\theta$. Прямая (L_1) дает решение (M_1, M_1'), если $d_1 > 0$, т. е. $a > b$, а прямая (L_2) дает решение (M_2, M_2'), если $d_2 < \frac{a}{\cos\theta}$, откуда $b < a\operatorname{tg}\theta$ (и обратно). Таким образом, мы видим, что, если $a < b$, пара (M_1, M_1') не существует; если $a = b$, точки M_1 и M_1' сливаются с O; если $a > b$, пара (M_1, M_1') существует и точки M_1 и M_1' расположены при этом по разные стороны от OA, ибо из условия $a > b$ следует, что (L_1) пересекает отрезок OA; таким образом, OA есть биссектриса угла между лучами AM_1 и AM_1'. Далее, если $b > a\operatorname{tg}\theta$, пара (M_2, M_2') не существует. Если $b = a\operatorname{tg}\theta$, точки M_2 и M_2' совпадают с точкой окружности (L), диаметрально противоположной точке O; если $b < a\operatorname{tg}\theta$, пара (M_2, M_2') существует, обе точки M_2 и M_2' расположены по одну сторону от AO; биссектриса угла между лучами AM_2 и AM_2' перпендикулярна AO. Итак, если b больше наибольшего из чисел a и $a\operatorname{tg}\theta$, никакой пары (M, M') не существует; если b заключено между a и $a\operatorname{tg}\theta$, одна из таких пар существует; если b меньше наименьшего из чисел a и $a\operatorname{tg}\theta$, обе пары (M_1, M_1') и (M_2, M_2') существуют. Во всем дальнейшем мы предположим, что $b < a$ и будем рассматривать только тот случай, когда OA есть биссектриса угла между лучами AM и AM'. Предыдущее исследование показывает, что пара (M_1, M_1') всегда существует $(a > b)$; именно эту пару мы будем обозначать просто через (M, M').



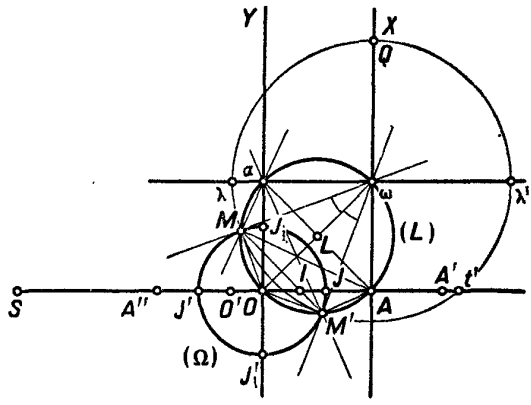
Черт. 227.

2°. **Фиксированная точка I прямой MM'.** Прямая MM' получается в результате инверсии окружности, симметричной (L) относительно OA. Последняя окружность проходит постоянно через точку O, а значит прямая MM', которая получается из нее инверсией (A, b^2), проходит постоянно через точку I такую, что $\overline{AO}\cdot\overline{AI} = b^2$. Эта фиксированная точка расположена между A и O, причем $AI = \frac{b^2}{a}$ (черт. 228).

Геометрическое место точек M и M'. OL есть ось симметрии для MM', значит $OM = OM'$. Рассмотрим окружность с центром O и радиусом OM. Прямая MM' — радикальная ось этой окружности и окружности (L). Точка I имеет постоянную степень относительно пучка окружностей; значит, она имеет постоянную степень и относительно окружности (O, OM); центр O этой окружности фиксирован; значит, радиус ее постоянный [не зависит от (L)]. С другой стороны, если (L) меняется, MM' принимает все направления вокруг O. Значит, геометрическое место точек M и M' есть окружность (Ω) с центром O радиусом OM — в целом. Пусть

M'' — точка, симметричная с точкой M' относительно OA, тогда $\overline{AM}\cdot\overline{AM''}=b^2$ так как точка M'' лежит на окружности (Ω), то этим выражением дается степень $\Omega(A)$ точки A относительно (Ω). С другой стороны, $\Omega(A)=a^2-R^2$; значит, $R^2=a^2-b^2$, где R — радиус (Ω). Мы видим, что точка A лежит вне окружности (Ω).

Огибающая прямых ωM, $\omega M'$, αM и $\alpha M'$. Так как $O\omega$ есть диаметр (L), то углы $OM\omega$ и $OM'\omega$ прямые; следовательно, прямые ωM и $\omega M'$ касаются (Ω) соответственно в точках M и M'. Огибающей этих прямых является, следовательно, окружность (Ω). Далее, $A\alpha$ есть диаметр (L), а M и M' — ортогональные проекции A на αM и $\alpha M'$. Как мы видели, точка A лежит вне окружности (Ω); значит, огибающая прямых αM и $\alpha M'$ есть гипербола с фокусом A и главной окружностью (Ω). Заметим, что I есть основание поляры точки A по отношению к (Ω); значит, точка I принадлежит директрисе гиперболы, соответствующей фокусу A; это дает возможность построить точки прикосновения прямых αM и $\alpha M'$ к гиперболе (отрезок касательной, ограниченный точкой прикосновения и точкой директрисы, виден из соответствующего фокуса под прямым углом); так как αM и $\alpha M'$ одинаково наклонены к $O\alpha$, то точки касания расположены симметрично относительно $O\alpha$.



Черт. 228.

Огибающая прямых, симметричных MM' относительно ω и относительно α. Касательная в точке ω к окружности (L) огибает параболу с фокусом O, касательная в вершине которой есть прямая AX, перпендикулярная AO в точке A (геометрическое место точек ω). Так как прямая, симметричная MM' относительно ω, есть прямая, гомотетичная этой касательной в гомотетии $(I, 2)$, то огибающая прямых, симметричных MM' относительно ω, есть парабола с фокусом O' $(\overrightarrow{IO'}=2\overrightarrow{IO})$ и вершиной A' $(\overrightarrow{IA'}=2\overrightarrow{IA})$. Касательная в точке α к окружности (L) огибает параболу с фокусом A, касательной в вершине к которой служит прямая, перпендикулярная AO и проходящая через точку O (геометрическое место точек α). Прямая l, симметричная этой касательной по отношению к OY, огибает, следовательно, параболу, касательная в вершине которой есть OY, а фокус A'' — точка, симметричная точке A относительно O. Прямая, симметричная MM' относительно α, параллельна l и получается из l в результате гомотетии $(I, 2)$; значит, огибающая прямых, симметричных MM' относительно α, есть парабола с фокусом в точке S $(\overrightarrow{IS}=2\overrightarrow{IA''})$ и вершиной O' $(\overrightarrow{IO'}=2\overrightarrow{IO})$.

3°. Внешние и внутренние биссектрисы углов треугольника AMM'. Окружность вписанная и окружности, вневписанные в треугольник AMM'. AO и $A\omega$ — две биссектрисы угла A. Окружность (Ω) пересекает прямую AO в точке J, расположенной между A и O, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник AMM', и в точке J', внешней для AO, служащей центром окружности, вневписанной в угол A треугольника AMM'. Другие биссектрисы углов треугольника AMM' суть MJ, $M'J$, MJ' и $M'J'$. Эти прямые пересекают AX в центрах P и Q окружностей, вневписанных в углы M и M'. Так как $\angle PMQ=\angle PM'Q'=90°$, то точки P и Q лежат на окружности радиуса ωM с центром ω. Мы видим, что центры вписанной окружности и вневписанной окружности в угол A суть фиксированные точки J и J'. Центры же P и Q окружностей, вневписанных в углы M и M', описывают прямую AX.

Биссектрисы внутренних и внешних углов треугольника $\alpha MM'$. Вписанная окружность и вневписанные окружности в треугольник $\alpha MM'$. Точка α описывает прямую OY, и биссектрисы угла α суть αO и $\alpha\omega$; αO — биссектриса внутреннего угла, $\alpha\omega$ — внешнего. Окружность (Ω) пересекает αO в двух точках: J_1 и J'_1; точка J_1 — внутренняя для αO, служащая центром окружности, вписанной в треугольник $\alpha MM'$, а точка J'_1 — внешняя для αO, служащая центром окружности, вневписанной в угол α треугольника $\alpha MM'$. Это фиксированные точки. Другие биссектрисы углов треугольника $\alpha MM'$ суть M'_1, $M'J_1$, MJ'_1 и $M'J'_1$. Биссектрисы $M'J_1$ и MJ'_1 пересекаются в точке λ, а биссектрисы $M'J'_1$ и MJ_1 — в точке λ';

точки λ и λ' принадлежат той же окружности с центром ω и радиусом ωM; λ и λ' суть центры окружностей, вневписанных в углы M' и M треугольника $\alpha MM'$. Окружность $(\omega, \omega M)$ проходит через две фиксированные точки t и t' прямой AO, так как середина A отрезка tt' фиксирована и, кроме того, $\overline{It}\cdot\overline{It'} = \overline{IM}\cdot\overline{IM'} = \overline{IJ}\cdot\overline{IJ'} = \text{const}$; значит, геометрическое место точек λ и λ' есть геометрическое место точек окружностей, касательные в которых параллельны AX, причем все окружности проходят через фиксированные точки t и t' — это равносторонняя гипербола с вершинами t и t'.

80. В силу того что образы одной и той же фигуры в двух различных инверсиях с одним и тем же полюсом гомотетичны друг другу, выражение $y = \dfrac{d'^2 - R_1'^2 - R_2'^2}{2R_1'R_2'}$, будучи однородным относительно R_1', R_2' и d' и имеющее показатель однородности, равный нулю, будет иметь одно и то же значение во всех инверсиях с данным полюсом. Отсюда следует, что данное положение будет доказано в общем виде, если мы его установим для инверсии с какой-то выбранной нами степенью. Пусть S — полюс инверсии, p_1 и p_2 — степени этого полюса относительно окружностей (C_1) и (C_2). Выберем в качестве степени инверсии число p_1. Тогда окружность (C_1) перейдет в себя (отсюда следует, что $R_1' = R_1$), а образ (C_2') окружности (C_2) может быть получен из этой последней гомотетией с центром S и коэффициентом гомотетии

$$k = \frac{p_1}{p_2} = \frac{SC_1^2 - R_1^2}{SC_2^2 - R_2^2}. \tag{1}$$

Центр C_2' окружности (C_2') лежит на прямой SC_2 и определяется соотношением

$$\frac{\overline{SC_2'}}{\overline{SC_2}} = k, \tag{2}$$

а радиус

$$R_2' = R_2 \,|\, k \,|. \tag{3}$$

Точки C_2', S, C_2 лежат на одной прямой. Применим теорему Стюарта к четырем точкам: C_1, C_2', S, C_2; будем иметь

$$C_1C_2'^2\cdot\overline{SC_2} + C_1S^2\cdot\overline{C_2C_2'} + C_1C_2^2\cdot\overline{C_2'S} + \overline{SC_2}\cdot\overline{C_2C_2'}\cdot\overline{C_2'S} = 0,$$

или, заменяя $C_1C_2^2$ на d^2, $C_1C_2'^2$ на d'^2 и $\overline{C_2C_2'}$ на $\overline{C_2S} + \overline{SC_2'}$, будем иметь

$$d'^2\overline{SC_2} + C_1S^2\left(\overline{C_2S} + \overline{SC_2'}\right) + d^2\overline{C_2'S} + \overline{SC_2}\left(\overline{C_2S} + \overline{SC_2'}\right)\overline{C_2'S} = 0,$$

или

$$d'^2\overline{SC_2} - SC_1^2\left(\overline{SC_2} - \overline{SC_2'}\right) - d^2\overline{SC_2'} + \overline{SC_2}\left(\overline{SC_2} - \overline{SC_2'}\right)\overline{SC_2'} = 0,$$

или, заменяя $\overline{SC_2'}$ его выражением из соотношения (2), имеем

$$d'^2\overline{SC_2} - SC_1^2(1-k)\,\overline{SC_2} - k\,d^2\overline{SC_2} + k(1-k)\,\overline{SC_2}^3 = 0.$$

Сокращая на $\overline{SC_2}$, получим $d'^2 = (1-k)\,SC_1^2 + kd^2 - k(1-k)\,SC_2^2$, или $d'^2 = kd^2 + (1-k)\left(SC_1^2 - kSC_2^2\right)$. Из соотношения (1) имеем $k\left(SC_2^2 - R_2^2\right) = SC_1^2 - R_1^2$, откуда $SC_1^2 - kSC_2^2 = R_1^2 - kR_2^2$. Теперь последнюю формулу для d'^2 можно переписать так: $d'^2 = kd^2 + (1-k)\left(R_1^2 - kR_2^2\right)$, а так как $R_1' = R_1$ и $R_2' = |k|\,R_2$, то

$$y = \frac{d'^2 - R_1'^2 - R_2'^2}{2R_1'R_2'} = \frac{d'^2 - R_1^2 - k^2R_2^2}{2\,|k|\,R_1R_2} = \frac{kd^2 + (1-k)\left(R_1^2 - kR_2^2\right) - R_1^2 - k^2R_2^2}{2\,|k|\,R_1R_2} =$$

$$= \frac{kd^2 - kR_1^2 - kR_2^2}{2\,|k|\,R_1R_2} = \frac{k}{|k|}\,\frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2},$$

а так как $\dfrac{k}{|k|}$ равно или $+1$, или -1, то $\dfrac{d'^2 - R_1'^2 - R_2'^2}{2R_1'R_2'} = \pm\dfrac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}$.

В правой части следует взять знак $+$, если k положительно; следовательно [на

основании формулы (1)], если p_1 и p_2 одного знака, т. е. если точка S лежит или вне обеих окружностей (C_1) и (C_2), или внутри них. Если же точка S лежит внутри одной из окружностей (C_1) и (C_2) и вне другой, то в правой части последнего равенства следует взять знак минус.

81. 1°. При $c \leqslant a$. Если же $c > a$ и если α и β — точки пересечения с (Γ) касательных Ft_1 и Ft_2 к (C), то прямая FQ будет прямой (Δ) тогда и только тогда, когда точка Q лежит на дуге $\overset{\smile}{\alpha O \beta}$ окружности (Γ). Далее, OF — биссектриса угла t_1Ft_2, точка O — середина дуги $\overset{\smile}{\alpha\beta}$ и $\alpha\beta \perp Ot$. Если A' — точка, диаметрально противоположная точке O на окружности (Γ), то $O\alpha^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OA} \cdot c\sqrt{2}$. Если через α обозначить ту из двух точек α и β, которая лежит вместе с точкой G по одну сторону от OA', то $O\alpha F = OGF = \frac{\pi}{4}$; $\triangle O\alpha t_1$ поэтому прямоугольный и равнобедренный, значит $O\alpha^2 = 2a^2$ и окончательно $\overline{OA} = \frac{a^2\sqrt{2}}{c}$.

2°. Пусть I — середина P_1P_2, а J — середина H_1H_2; прямая IJ проходит через O и перпендикулярна (Δ). Далее, $\overline{GH_1} = \overline{JH_1} - \overline{JG}$, $\overline{GH_2} = \overline{JH_2} - \overline{JG} = -(\overline{JH_1} + \overline{JG})$, откуда $GH_1^2 + GH_2^2 = 2\left(JH_1^2 + JG^2\right)$. Но $\triangle OGJ = \triangle FOI$ (от одного из этих треугольников переходим к другому поворотом вокруг γ на угол $\frac{\pi}{2}$), поэтому $JG = OI$, и так как $JH_1 = IP_1$, то $GH_1^2 + GH_2^2 = 2\left(IP_1^2 + OI^2\right) = 2OP_1^2 = 2a^2$.

3°. а) Пусть (C) — главная окружность линии второго порядка, ее радиус a, (T_1) касательная к этой линии, а точка P_1 [которая лежит на (C)] — проекция F на (T_1); P_2 — вторая точка встречи (C) с прямой FP_1; перпендикуляр (T_2) в точке P_2 к FP_2 есть касательная к рассматриваемой линии, параллельная (T_1). На основании предыдущего $GH_1^2 + GH_2^2 = 2a^2$. Но $GH_2 = G'H_1'$ и потому $GH_1^2 + G'H_1'^2 = 2a^2$.

б) Пусть G и G' — две фиксированные точки, O — середина отрезка GG' ($OG = OG' = c$) и a — данное положительное число. Поставим вопрос об отыскании огибающей семейства прямой (T_1) такой, что если H_1 и H_1' — проекции G и G' на эту прямую, то $GH_1^2 + G'H_1'^2 = 2a^2$. Пусть F и F' — точки, полученные из точек G и G' поворотом вокруг O на угол $-\frac{\pi}{2}$, H_2 — точка, симметричная H_1' относительно O, P_1 — проекция F на (T_1) и, наконец, I и J — проекции O на FP_1 и H_1H_2. Так как I — середина H_1H_2, то $GH_1^2 + G'H_1'^2 = GH_1^2 + GH_2^2 = 2\left(GJ^2 + IH_1^2\right)$. Но $IH_1 = IP_1$ и $\triangle OJG = \triangle OIF$, значит, $JG = OI$ и потому $GH_1^2 + G'H_1^2 = 2\left(IP_1^2 + OI^2\right) = 2OP_1^2$, а следовательно, $2a^2 = 2OP_1^2$, откуда $OP_1 = a$. Точка P_1 лежит поэтому на окружности (C) с центром O и радиусом a, а потому прямая (T_1) касается линии второго порядка с фокусами F и F', для которой (C) — главная окружность. Эта вся линия является огибающей [это следует из 3°, а)]. Если $c < a$, то точки F и F' лежат внутри (C) и огибающая — эллипс. Если $c > a$, то точки F и F' лежат вне (C) и огибающая — гипербола. Если $a = c$, то окружность (C) проходит через точки G, G', F, F', а все прямые (T) — это прямые, проходящие через одну из точек G или G'.

4°. Пусть G и G' — две фиксированные точки ($GG' = d$). Необходимое и достаточное условие того, что прямая (T) есть общая касательная к двум данным ортогональным окружностям с центрами G и G', имеет вид $GH^2 + G'H'^2 = GG'^2 = d^2$, где H и H' — проекции G и G' на (T). На основании предыдущего пункта, огибающая прямых (T) есть линия второго порядка, фокусы которой F и F' получаются из точек G и G', если произвести поворот вокруг O на угол 90°, где O — середина GG'; главной окружностью будет окружность с центром O и радиусом $\frac{d}{\sqrt{2}} = FG$. Эта линия — эллипс, проходящий через точки G и G'. Точка T касания с эллипсом (E) прямой HH' получается так: пусть S — точка, в которой HH' пересекает FF', и St — касательная к главной окружности (C) эллипса (E). Точка T есть точка пересечения прямой HH' и прямой, проходящей через t параллельно GG'.

82. 1°. Пусть ABC — треугольник, удовлетворяющий условию. Обозначим через I середину AH, через A' — основание высоты, опущенной из A на сторону BC, через (Δ) — прямую, проходящую через A перпендикулярно AH, и через K — проекцию M на (Δ). Так как $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$, то $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OM}$; четырехугольник $OAIM$ — параллелограмм и, значит, $MI = OA$. Но $OA = AA' = MK$ и, значит, $IM = MK$, т. е. точка M лежит на параболе (Π) с фокусом I и директрисой (Δ).

Обратно: точка M этой параболы будет серединой стороны BC треугольника ABC, удовлетворяющего условию задачи, если окружность с центром O (который определяется соотношением $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{IA}$), проходящая через A, пересечет перпендикуляр к OM в точке M, т. е. если $OA > OM$ или $IM > IA$, иначе — если точка M лежит вне окружности с центром I и радиусом IA. Эта окружность пересекает параболу (II) в точках μ' и μ'', расположенных на перпендикуляре к IA в точке I. Таким образом, геометрическое место точек M состоит из двух дуг параболы (II), которые расположены в той же полуплоскости от $\mu'\mu''$, где лежит H (μ' и μ'' не входят в это геометрическое место).

2°. Из соотношения $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{IA}$ следует, что геометрическое место центров O окружностей, описанных вокруг треугольника ABC, получается из геометрического места точек M переносом $\overrightarrow{IA}$. Если (D) прямая, в которую перейдет (Δ) при этом переносе, то геометрическое место центров O состоит из двух дуг параболы (P) с фокусом A и директрисой (D), расположенных по отношению к (Δ) в той же полуплоскости, где лежит H. Отсюда следует, что окружность (O) все время касается прямой (D). Если m' и m'' — проекции μ' и μ'' на (D), то огибающая состоит из частей прямой (D), которые мы получим, удалив из нее отрезок $m'm''$.

84. 1°. Для построения точки M надо на луче HM_1 от точки H отложить отрезок HM, равный стороне квадрата с диаметром HM_1. Геометрическое место точек M есть эллипс (E), для которого (C) — главная окружность, A, A' — вершины, лежащие на фокальной оси. Касательные к (C) и (E) в соответствующих точках M_1 и M пересекаются в точке T, лежащей на AA'. Далее, пусть прообразом S будет точка S_1, а прообразом I — точка I_1; очевидно, прямая OS_1 делит M_1S пополам; это сохраняется и после сжатия. Полюс M' прямой MT относительно (C) расположен на поляре точки T, т. е. на прямой MH. С другой стороны, точки M и M' гармонически сопряжены с точками M_1 и M_2, в которых прямая HM пересекает (C); следовательно, $\overline{HM}\cdot\overline{HM'} = HM_1^2$, и так как $HM = \frac{HM'}{\sqrt{2}}$, то $\frac{\overline{HM'}}{\overline{HM_1}} = \sqrt{2}$, т. е. точка M' из M_1 получается в результате сжатия к $A'A$ с коэффициентом $\sqrt{2}$. Значит точка M' описывает эллипс (E') с большей полуосью $a\sqrt{2}$, для которого (C) — второй главный круг. Касательная к (E') в точке M' есть прямая $M'T$; значит, поляра M относительно (C). Для построения фокусов эллипсов (E) и (E') надо в первом случае вписать в (C) квадрат со стороной, параллельной AA'; стороны, перпендикулярные AA', пересекут этот диаметр в фокусах F и F'. Для построения фокусов (E') надо описать квадрат вокруг (C) со стороной, параллельной AA'; стороны, параллельные AA', пересекут медиатрису AA' в фокусах φ и φ' эллипса (E').

2°. $\frac{HM}{\overline{HA}} = \frac{KI}{\overline{KA}}$, $\frac{HM}{\overline{HA'}} = \frac{KL}{\overline{KA'}}$, отсюда $\frac{HM^2}{\overline{HA}\cdot\overline{HA'}} = \frac{1}{2}$. (1) Пусть M_1 — точка пересечения луча HM с (C). Тогда $HM_1^2 = HA\cdot HA'$ и на основании (1) $\frac{HM}{HM_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее, $HM' = 2HM$ и, значит, $\frac{HM'}{HM_1} = \sqrt{2}$.

3°. $M'H$ и $A'L$ — две высоты $\triangle A'M'A$, значит третья высота AM; $\angle A'QA = 90°$ и Q описывает (C). Полюс S прямой AL относительно (C) есть точка, в которой прямая (D) пересекается с касательной к (C) в точке L. Так как $SL = SA$, то S есть точка пересечения с (D) медиатрисы AL с гипотенузой AP прямоугольного треугольника ALP, значит $AS = SP$. Прямая $OS \parallel A'P$, а так как S — середина AP, то точка N пересечения OS и AM есть середина AM. Мы видели (1°), что точка, в которой касательная к эллипсу (E) в точке M пересекает (D), есть прямая, соединяющая O с серединой N отрезка AM, т. е. S. Значит геометрическое место точек пересечения касательных в L к (C) и в M к (E) есть прямая (D). Пусть P' — точка, в которой прямая AM' пересекает касательную (D') к (C) в A', и пусть J — точка, в которой прямая $A'M'$ пересекает LK. Так как I — середина L, то M — середина HM' и, значит, L — середина HM'. Значит точка M' может быть, исходя из точки P', построена так: строим $KJ = 2KL$; пересечение AP' и $A'J$ есть M'. Мы видели (1°), что касательная к (E') в точке M' есть поляра M относительно (C). Касательная в L к (C) есть поляра L относительно (C). Точка пересечения этих двух прямых есть, следовательно, полюс ML; но полюс ML есть точка S' пересечения касательных (D') и LS к (C). Но S — середина AP, значит S' — середина $A'P'$ и, значит, точка S' — точка пересечения касательных в L к (C) и в M' к (E') описывает целиком (D'), когда P' описывает целиком (D'). Далее, $AP\cdot A'P' = 2AS\cdot 2A'S' = 4AS\cdot A'S' = 4LS\cdot LS'$. Но $\angle A'LA = 90°$ и $OS \perp A'L$ и $OS \perp AL$; значит, $\angle SOS' = 90°$, поэтому $LS\cdot LS' = OL^2 = a^2$, а следовательно, $AP\cdot A'P' = 4a^2$. Огибающая SS' есть окружность; значит, огибающая PP' есть эллипс (PP' и SS' пересекаются на AA'; PP' из SS' получается в результате сжатия к AA' с коэффициентом 2), полуоси которого a и $2a$; прямые AA' и медиатриса этого отрезка его оси симметрии; окружность (C) — вторая главная его окружность.

85. 1°. Предположим сначала, что произведение $\overline{IO}\cdot\overline{IO'}$ положительно и равно $IA^2=a^2$, и обозначим в этом случае точки O и O' так: o и o', а окружности (O) и (O') так: (o) и (o'). Точки o и o' находятся с одной стороны от точки I. Пусть касательная к окружности (o') в точке B пересекает ось $x'x$ в точке f. Тогда $\overline{If}\cdot\overline{Io'}=-\overline{IA}^2=-\overline{Io}\,\overline{Io'}$, откуда $\overline{If}=-\overline{Io}$. Аналогично и $\overline{If'}=-\overline{Io'}$. Отсюда следует, что касательные Bf к окружности (o') и Af' к окружности (o) соответственно параллельны Ao и Bo'. Пусть p и q — точки пересечения Bf, Af' и Ao, Bo'. Четырехугольник $ApBq$ — прямоугольник, I — его центр; значит, точки p и q лежат на окружности с диаметром AB (и являются диаметрально противоположными точками этой окружности). Таково геометрическое место p в случае $\overline{IO}\cdot\overline{IO'}=\overline{AI}^2$. Пусть теперь $\overline{IO}\cdot\overline{IO'}=m^2a^2$. Построим точки o и o' такие, что $\overline{IO}=m\overline{Io}$ и $\overline{IO'}=m\overline{Io'}$. Прямые AO и BO' получаются из прямых Ao и Bo' умножением абсцисс точек o и o' на m; значит, точка Q (точка пересечения AO и BO') из точки q получится перемещением последней по прямой, параллельной оси $x'Ix$, так что абсцисса этой точки умножится на m.

2°. Прямые AO и BO' пересекаются в точке Q, AO' и BO — в точке Q', симметричной Q относительно OO'; пусть H — точка пересечения QQ' с OO'; точки I и H гармонически сопряжены с точками O и O', а так как точки I, O, O' фиксированы, то фиксирована и точка H. Точка Q лежит, следовательно, на прямой, проходящей через H перпендикулярно OO'. Далее, AP и BP перпендикулярны соответственно AQ и BQ; значит, точки A, P, B, Q лежат на одной окружности с диаметром PQ; центр ω этой окружности лежит на медиатрисе отрезка AB. Значит расстояния HQ и MP от Q и P до O равны, но противоположно направлены. Заметим, что $\triangle APB\sim\triangle OQO'$ (треугольники со взаимно-перпендикулярными сторонами). Точки N и H — основания высот PN и QH, так же как I и C, — середины AB и OO', соответствующие в этом подобии; значит $\frac{IN}{\overline{NP}}=\frac{CH}{\overline{HQ}}=\frac{CH}{\overline{IN}}$, откуда $IN^2=CH\cdot NP$. Обозначая через x и y координаты P, получаем $y^2=-\overline{CH}x$, и поскольку $\overline{CH}=\text{const}$, то это уравнение параболы с вершиной I и осью Ix'. Полагая $\overline{IO}=a$, $\overline{IO'}=b$, находим $\overline{IC}=\frac{a+b}{2}$, и далее $\frac{2}{\overline{IH}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$. Следовательно, $\overline{IH}=\frac{2ab}{a+b}$, откуда $\overline{CH}=\overline{IH}-\overline{IC}=\frac{2ab}{a+b}-\frac{a+b}{2}=-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$. Последнее уравнение принимает вид $y^2=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}x$. Далее, $\overline{IF'}\cdot\overline{IO'}=-a^2$, $\overline{IF}\cdot\overline{IO}=a^2$, откуда $\overline{IF'}=-\frac{\overline{Io}\cdot\overline{Io'}}{\overline{IO'}}=-\frac{\overline{Io}}{m}=\frac{\overline{If}}{m}$. Прямые BF и AF' получаются, таким образом, из Bf и Af' умножением абсцисс последних на $\frac{1}{m}$ (и без изменения ординат). Значит точка p перейдет в точку P, лежащую на перпендикуляре pH к AB, причем $\overline{HP}=\frac{1}{m}\overline{Hp}$. Отсюда следует, что окружность (I) перейдет в эллипс, для которого AB будет одна из осей; ось, перпендикулярная AB, будет иметь величину $\frac{1}{m}AB$. Теперь предположим, что произведение $\overline{IO}\cdot\overline{IO'}$ постоянно, но отрицательно и равно $-a^2$. Тогда AO и AO' перпендикулярны, окружности (O) и (O') ортогональны; касательные к ним в точках A и B будут $O'A$ и BO, которые пересекаются в точке P. Геометрическое место точек P есть в этом случае геометрическое место вершин P треугольников BPA с фиксированным основанием и разностью углов при основании, равной 90°: $\widehat{BAP}-\widehat{APB}=90°$. Можно сказать, что AP и BP поворачиваются на равные углы, но в противоположных направлениях, причем биссектриса угла APB имеет неизменное направление (следует из $\widehat{BAP}-\widehat{APB}=90°$). Известно, что это равносторонняя гипербола с вершинами A и B. Если $\overline{IO}\cdot\overline{IO'}=-m^2a^2$, то введем точки O_1 и O_1' такие, что $\overline{IO}=m\overline{IO_1}$, $\overline{IO}=m\overline{IO_1'}$; как и в предыдущем случае, установим, что точки P_1 и P имеют одинаковые ординаты, но $\overline{HP}=\frac{1}{m}\overline{HP_1}$ (H — основание перпендикуляра, опущенного из P на $y'y$). Это последнее преобразование преобразует равностороннюю гиперболу с вершинами A и B в другую гиперболу с теми же вершинами, но уже не равностороннюю.

86. Замечание. Углом между прямой и окружностью мы будем называть острый угол, образованный этой прямой и касательной к окружности в одной из точек, в которых ее пересекает данная прямая.

I. 1°. Касательными в точке A к искомым окружностям являются прямые, проходящие через A и образующие с прямой (D) углы θ. Значит центры искомых окружностей лежат в точках пересечения медиатрисы отрезка PA с прямыми, проходящими через точку A и образующими с прямой (D) угол $\frac{\pi}{2}-\theta$. Если $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, то имеются две такие окружности: (O) и (O'). Если $\theta=0$, то имеется только одна окружность [проходящая через P и касающаяся (D) в точке A]. Если $\theta=\frac{\pi}{2}$, то есть тоже одна окружность — ее центр E [точка пересечения с (D) медиатрисы отрезка AP].

Замечание. В изложенном выше мы предлагали, что точка P не лежит на прямой (D). Если точка P лежит на прямой (D) и если точки A и P различны, то все предыдущие построения остаются в силе, за исключением только случая $\theta=0$; в этом случае не существует ни одной окружности, удовлетворяющей условию задачи. Случай совпадения точек P и A не представляет интереса; в этом случае, каково бы ни было θ, существует бесконечное множество (и даже «дважды» бесконечное множество, если $\theta\neq 0$ и $\theta\neq\frac{\pi}{2}$) окружностей, удовлетворяющих условию задачи.

Во всем дальнейшем мы будем предполагать, что точка P не лежит на (D) (в вопросе 2° это даже необходимо). Предположим, что $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Так как (D) — биссектриса угла A треугольника OAO', то $\frac{EO}{EO'}=\frac{OA}{O'A}$. Отсюда следует, что E — центр подобия окружностей (O) и (O'), а значит E может служить и центром инверсии, при котором окружность (O) перейдет в (O') и обратно. Точка A в этой инверсии неподвижная, точки же B и B' переходят друг в друга, значит $\overline{EA}^2=\overline{EB}\cdot\overline{EB'}$.

2°. В инверсии (P, PH^2) прямая (D) переходит в окружность (C) с диаметром PH, а множество окружностей (O), пересекающих (D) под углом θ, переходит в множество прямых (δ), пересекающих (C) под углом θ; это множество прямых есть множество касательных к окружности (L') с центром C и радиусом $d\cos\theta$.

3°. Огибающая прямых (δ) есть окружность (L'), значит огибающая окружностей (O) есть окружность (L), полученная из (L') инверсией (P, PH^2); определим положение центра L этой окружности. Пусть P' — точка, симметричная точке P относительно прямой (D). Точка P' есть образ точки C в инверсии (P, PH^2), а потому P' есть основание поляры точки P относительно окружности (L). Пусть U и V — точки, в которых касательные, проведенные из P к (L'), пересекают прямую (D), а U' и V' — точки пересечения этих касательных с прямой, проходящей через P' параллельно (D); окружность (L) — это окружность, касающаяся прямых PU' и PV' в точках U' и V'; ее центр лежит на пересечении прямой PH с перпендикуляром к PU' в точке U'. Легко находим: $P'U'=PP'\operatorname{ctg}\theta=2d\operatorname{ctg}\theta$,

$$R=LU'=\frac{P'U'}{\sin\theta}=\frac{4d\cos\theta}{\sin^2\theta}\quad\text{и}\quad PL=\frac{R}{\cos\theta}=\frac{4d}{\sin^2\theta}.$$

Далее, так как окружности (L') концентричны, C — их общий центр, и все они ортогональны медиатрисе (Δ) отрезка PH, то окружности (L) ортогональны образу (Δ) в инверсии (P, PH^2), т. е. к окружности с диаметром PP'. Эти окружности (L) принадлежат поэтому к одному пучку окружностей с радикальной осью (D) и предельными точками P и P'.

Замечание. Если θ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, окружность (L') пробегает множество всех окружностей с центром C и лежащими внутри (C); граничными являются: окружность-точка C и сама окружность (C). Отсюда следует, что окружности (L) не охватывают всего указанного пучка, но лишь все те и только те окружности этого пучка, внутри которых лежит точка P'; граничными являются сама точка P' и прямая (D) — вырожденная окружность пучка.

4°. Заметим сначала, что если $\theta=0$, то окружности (O) проходят через P и касаются (D); значит, геометрическое место точек O в этом случае есть парабола с фокусом P и директрисой (D). Если $\theta=\frac{\pi}{2}$, то окружности (O) ортогональны (D) и геометрическое место точек O есть сама прямая (D). Исключая эти два частных случая, будем считать, что $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Окружности (O) проходят

через P и касаются окружности (L) [которая в целом есть огибающая (O)], поэтому геометрическое место точек O есть гипербола с фокусами P и L, для которой окружность (L) есть направляющая окружность, относящаяся к фокусу L. Эта гипербола имеет в качестве центра Γ середину отрезка PL; ее главная окружность есть окружность с центром Γ, проходящая через U и V, ее асимптоты — прямые ΓU и ΓV (так как они соединяют центр Γ гиперболы с точками U и V прикосновения касательных, проведенных из фокуса P к главной окружности), эксцентриситет равен $e = \frac{\Gamma P}{\Gamma U} = \frac{1}{\cos\theta}$ и, наконец, (D) — директриса, соответствующая фокусу P.

Замечание. Можно и иначе: пусть A — одна из точек пересечения окружности (O) с (D) и K — проекция O на (D). Так как $\angle AOK = \theta$, то $OK = AO\cos\theta = OP\cos\theta$, откуда $\frac{OP}{OK} = \frac{1}{\cos\theta}$.

5°. Если $\theta = 0$, то все окружности (O) касаются (D) и геометрическое место точек I есть прямая (D). Если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то прямая (D) — диаметр всех окружностей (O) и все эти окружности имеют для прямой (D) полюсом I — бесконечно удаленную точку в направлении, перпендикулярном (D). Исключая эти частные случаи, будем считать $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Пусть I — полюс (D) относительно (O), A — одна из точек пересечения (O) с (D) и K — проекция O на (D). Тогда $\overline{KO}\cdot\overline{KI} = -\overline{KA}^2 = -\overline{KO}^2\operatorname{tg}^2\theta$, откуда $\frac{\overline{KI}}{\overline{KO}} = -\operatorname{tg}^2\theta$. Из этого соотношения следует, что геометрическое место точек I из геометрического места точек O получается, если произвести сжатие к оси (D) с коэффициентом $\operatorname{tg}^2\theta$ последующую симметрию в (D). Значит геометрическое место точек I есть гипербола (G), полученная из гиперболы (Γ) в результате этого преобразования. Центр G гиперболы (G) есть образ центра Γ гиперболы (Γ) в этом преобразовании. Значит $\frac{\overline{HG}}{\overline{H\Gamma}} = -\operatorname{tg}^2\theta$. Но $\overline{HP}\cdot\overline{H\Gamma} = -\overline{HU}^2 = -\overline{H\Gamma}^2\operatorname{tg}^2\theta$; значит, $\frac{\overline{HP}}{\overline{H\Gamma}} = -\operatorname{tg}^2\theta$ и точки P и G совпадают. Таким образом, положение центра G гиперболы (G) не зависит от θ. Так как точки U и V в указанном преобразовании неподвижны, а Γ переходят в P, то асимптотами (G) будут PU и PV, главной окружностью будет окружность с центром P, проходящая через U и V [ибо при рассматриваемом сжатии длина ΓU действительной полуоси гиперболы (Γ) перейдет в длину $\Gamma U\cdot\operatorname{tg}^2\theta$ действительной полуоси гиперболы (G); но $\Gamma U\operatorname{tg}^2\theta = PU$]. Наконец эксцентриситет гиперболы (G) равен $\frac{1}{\sin\theta}$.

II. Углом между двумя пересекающимися окружностями назовем острый угол между касательными к ним в точке их пересечения.

1°. **Огибающая (E) окружностей (O), соответствующих данному углу θ.** Рассмотрим сначала частные случаи $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$; будем различать две возможности — лежит ли точка P на окружности (ω) или нет.

α) **Точка P лежит на окружности (ω).** Если $\theta = 0$, то множество окружностей (O) состоит из всех окружностей, касающихся (ω) в точке P. Если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то множество всех окружностей (O) состоит из всех окружностей, касающихся ωP в точке ω.

β) **Точка P не лежит на окружности (ω).** Если $\theta = 0$, то окружности (O) касаются окружности (ω) и через каждую точку (ω) проходит и притом только одна окружность (O). Огибающей будет (ω). Если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то окружности (O) ортогональны (ω), они проходят, следовательно, через вторую фиксированную точку P' — основание поляры точки P относительно (ω). Эти окружности образуют пучок с базисными точками P и P'. Огибающей нет. Исключим эти частные случаи, т. е. будем считать, что $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; будем снова различать два случая.

γ) **Точка P лежит на (ω).** Пусть (T) — касательная к (ω) в точке P, а (T_1) и (T_2) — две прямые образующие с (T) угол θ. Множество окружностей (O) состоит из всех окружностей, касающихся (T_1) в точке P, и всех окружностей, касающихся (T_2) в точке P.

δ) **Точка P не лежит на (ω).** Произведем инверсию с полюсом P и степенью инверсии, равной $P\omega^2 - \rho^2 = 4d^2 - \rho^2$. В этой инверсии окружность (ω) переходит в себя, а окружности (O) переходят в прямые (δ), пересекающие (ω) под постоянным

углом θ. Если (O) пересекает (ω) в точках A и B, то прямая (δ) есть $A'B'$, где A' и B' суть вторые точки пересечения PA и PB с (ω). Огибающая прямых (δ) есть окружность (E') с центром ω и радиусом $\rho\cos\theta$; значит, огибающей окружности (O) будет образ (E') в указанной инверсии. Уточним положение точки E и найдем величину радиуса окружности (E). Центр E окружности (E) есть образ в указанной инверсии основания поляры E' точки P относительно (E'). Имеем $\overline{PE}\cdot\overline{PE'}=4d^2-\rho^2$. Но $\overline{PE'}\cdot\overline{P\omega}=4d^2-\rho^2\cos^2\theta$, значит $\overline{PE}=\overline{P\omega}\,\frac{4d^2-\rho^2}{4d^2-\rho^2\cos^2\theta}$. Это соотношение определяет положение точки E. Радиус (E) находим из пропорции $\frac{r}{\rho\cos\theta}=\left|\frac{\overline{PE}}{\overline{P\omega}}\right|=\left|\frac{4d^2-\rho^2}{4d^2-\rho^2\cos^2\theta}\right|$, откуда $r=\left|\frac{4d^2-\rho^2}{4d^2-\rho^2\cos^2\theta}\right|\rho\cos\theta$. Докажем, что окружности (O) принадлежат одному пучку. Окружности (E') принадлежат пучку концентрических окружностей с центром ω; все они ортогональны прямым, проходящим через ω; образами этих прямых будут окружности, проходящие через P и через точку ω', полученную из ω указанной инверсией. Окружности (E), будучи ортогональными окружностям, проходящим через P и ω', будут сами образовывать пучок с предельными точками P и ω'.

Замечание. Если θ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то окружности (E') — это все окружности с центром ω, лежащим внутри (ω); граничными окружностями служат сама окружность (ω) и «окружность-точка» ω. Окружности (E) не заполняют, таким образом, всего пучка окружностей с предельными точками P и ω'. В самом деле: 1) Если P вне (ω), то ω' — внутри (ω) и окружность (E) пробегает часть множества тех окружностей пучка с предельными точками ω' и P, которые окружают ω'; граничными окружностями для (E) являются сама окружность (ω) и «окружность-точка» ω'. 2) Если точка P лежит внутри (ω), то ω' лежит вне (ω) и окружность (E) пробегает множество тех окружностей пучка с предельными точками P и ω', которые не лежат внутри (ω); точнее в этом случае [точка P лежит внутри (ω)] будем иметь: если $\rho\cos\theta<2d$, то окружности (E') лежат внутри окружностей с центром ω и радиусом $\omega P=d$ и окружности (E) пробегают множество окружностей пучка, которые окружают ω'; если $\rho\cos\theta=2d$, то (E') есть окружность с центром ω, проходящая через P; значит, (E) вырождается в радикальную ось пучка — медиатрису $\omega'P$; если, наконец, $\rho\cos\theta>2d$, то окружность (E') пробегает кольцо, заключенное между (ω) и окружностью с центром ω и радиусом ωP; окружности (E) пробегают тогда те окружности пучка с предельными точками P и ω, которые окружают P, но лежат вне (ω).

2°. **Геометрическое место (H) центров (O), соответствующих данному углу θ.** Рассмотрим ряд случаев в зависимости от расположения точки P относительно (ω) и в зависимости от значений θ.

α) P лежит на (ω). Если $\theta=0$, то геометрическое место точек P есть прямая $P\omega$; если $\theta=\frac{\pi}{2}$ — геометрическое место точек O есть касательная к (O) в точке P; если $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, то геометрическое место точек O есть две прямые, проходящие через P и образующие с ωP углы θ.

β) Точка P лежит вне (ω). Если $\theta=0$, то окружности (O) огибают саму окружность (ω) и геометрическое место их центров есть гипербола с фокусом P и направляющей окружностью (ω); если $\theta=\frac{\pi}{2}$, то окружности (O) проходят через точки P и ω'; геометрическое место их центров есть, следовательно, медиатриса отрезка $P\omega'$; если $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, то окружности (O) огибают окружность (E), окружающую ω', причем точка P лежит вне этой окружности (E); значит, геометрическим местом O будет гипербола с фокусами P и E и направляющей окружностью (E).

γ) Точка P лежит внутри (ω). Рассмотрим несколько случаев в зависимости от величины θ.

γ_1) $\rho\cos\theta>2d$. Окружности (O) огибают окружность (E), окружающую P; геометрическое место их центров есть эллипс с фокусами P и E и направляющей окружностью (E); если $\theta=0$, то геометрическое место точек O есть сама окружность (ω).

γ_2) $\rho\cos\theta<2d$. Окружности (O) огибают окружность (E), окружающую ω', и, следовательно, точка P лежит вне окружности (E). Геометрическое место их центров будет гипербола с фокусом P и направляющей окружностью (E).

γ_3) $\rho\cos\theta=2d$. Окружности (O) огибают медиатрису отрезка $P\omega'$. Геометрическое место их центров — парабола с фокусом P, директрисой которой служит указанная медиатриса.

87. 1°. Пусть (D) и (D') — две прямые, проходящие через точку A и такие, что $(D, D') = \frac{\pi}{4}$. Обозначим через B и C точки, в которых эти прямые пересекают прямую (Δ), через O — центр окружности (Γ), описанной вокруг треугольника ABC, и через H — проекцию точки O на (Δ). Тогда $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(AB, AC) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$; треугольник BOC, следовательно, равнобедренный и прямоугольный, а потому $\frac{OB}{OH} = \sqrt{2}$ или $\frac{OA}{OH} = \sqrt{2}$; значит, точка O находится на равносторонней гиперболе (H_1) с фокусом A и соответствующей директрисой (Δ). Обратно: пусть O — какая-нибудь точка, лежащая на гиперболе (H_1), H — ее проекция на (Δ), а B и C — точки встречи (Δ) с окружностью, проходящей через A с центром O. Из соотношения $\frac{OA}{OH} = \sqrt{2}$ или $\frac{OB}{OH} = \sqrt{2}$ следует, что $\triangle BOC$ прямоугольный и равнобедренный; значит, при соответствующем обозначении точек B и C, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ и потому $(AB, AC) = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, геометрическое место точек O есть гипербола (H_1) в целом. Центр I этой гиперболы — точка, симметричная A относительно (Δ).

Замечание. Если $(D') \parallel (\Delta)$, C — бесконечно удаленная точка, B совпадает тогда с точкой B_1, в которой (Δ) пересекается с одной из асимптот, окружность (O) вырождается в прямую AB_1, а ее «центр» — бесконечно удаленная точка в направлении одной из асимптот. Аналогично, если $(D) \parallel (\Delta)$. Огибающая (Γ) есть окружность радиуса $2d\sqrt{2}$ с центром в точке F, которая симметрична точке A относительно I. Геометрическое место центров ω окружности девяти точек треугольника ABC находится так: пусть α, β, γ — середины BC, CA и AB, а A' — проекция A на (Δ). Если (D) и (D') меняются, точки β и γ описывают прямую (δ), полученную из (Δ) гомотетией $\left(A, \frac{1}{2}\right)$. Далее $(\alpha\beta, \alpha\gamma) = (D, D') = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$. Точка A' лежит на окружности $(\alpha\beta\gamma)$; значит, $(A'\beta, A'\gamma) = (\alpha\beta, \alpha\gamma) = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$. Таким образом, точка ω окружности $(A'\gamma\beta)$ определяется по отношению к A' и (δ) точно так же, как точка O по отношению к A и (Δ); значит, ω описывает равностороннюю гиперболу с фокусом A' и директрисой (δ).

Геометрическое место B' и C'. Треугольники ABB' и ACC' прямоугольные равнобедренные, значит $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. От точки B мы переходим к точке B' при помощи поворота вокруг точки A на угол $\frac{\pi}{4}$ и последующей гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. От точки C к C' мы переходим при помощи поворота на угол $-\frac{\pi}{4}$ и последующей гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Геометрические места точек B' и C', следовательно, будут образы (Δ) в указанных преобразованиях: это прямые $A'x$ и $A'y$, проходящие через A' и такие, что $(\Delta, A'x) = \frac{\pi}{4}$, $(\Delta, A'y) = -\frac{\pi}{4}$ [биссектрисы углов между AA' и (Δ)]. Далее, $A'B'$ и $A'C'$ (т. е. $A'x$ и $A'y$) фиксированы; точка A служит центром окружности, касающейся этих прямых, и она касается $B'C'$ (эта окружность и будет огибающей $B'C'$, ее радиус $\frac{d}{\sqrt{2}}$).

2°. Пусть AT и AT' — касательные в точке A к окружностям (M) и (M'). Тогда $(AT, AT') = (AT, AB) + (AB, AC) + (AC, AT') \pmod{\pi} = (AB, BC) + (AB, AC) + (BC, AC) \pmod{\pi} = (AB, AC) + (AB, AC) \pmod{\pi} = 2(AB, AC) \pmod{\pi} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Точки M и M' описывают целиком параболу с фокусом A и директрисой (Δ).

Геометрическое место точек P. Произведем инверсию (A, AA'^2); прямая (Δ) перейдет в окружность (AA'), а точка P — в точку P'. Окружности (M) и (M') перейдут в две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке P' и касающиеся окружности (AA'). Значит геометрическое место точек P есть окружность (Ω'),

описанная вокруг квадрата, описанного в свою очередь вокруг (AA'); будем считать, что одна из сторон UV этого квадрата лежит на (Δ) (A' — середина UV). Геометрическое же место P будет окружность, получающаяся из (Ω') инверсией (A, AA'^2); центр этой окружности лежит на AA'; одна из ее точек K есть, очевидно, точка пересечения UA с (AA'), другая S есть точка пересечения стороны квадрата, противоположной UV, с $A'K$. Далее, MM' — медиатриса AP; так как P описывает окружность (Ω), внутри которой лежит точка A, то эта огибающая есть эллипс, для которого (Ω) — направляющая окружность, относящаяся к другому фокусу. Докажем, что окружность (BCP) проходит через фиксированную точку: пусть Q — вторая точка пересечения прямой AP с окружностью (BPC) и L — точка пересечения AP и (Δ) (L—середина BC); имеем $\overline{LB}\cdot\overline{LC}=\overline{LP}\cdot\overline{LQ}$ или $\overline{LP}\cdot\overline{LQ}=-\overline{LB}^2$, а так как $\overline{LB}^2=\overline{LP}\cdot\overline{LA}$, то $\overline{LQ}=-\overline{LA}$; следовательно, точки Q и A симметричны относительно L и, значит, относительно L симметричны и окружности (PBC) и (ABC). Отсюда следует, что эти окружности симметричны относительно (Δ), а потому окружность (PBC) проходит через точку I, симметричную точке A относительно (Δ), т. е. через центр I гиперболы (H_1).

3°. Пусть (Δ) — директриса параболы (P), а M и M' — точки пересечения с параболой (P) двух взаимно-перпендикулярных полупрямых, проходящих через точку F. Окружности с центрами M и M', проходящие через (F), ортогональны между собой и касаются (Δ) в точках B и C. Мы приходим к конфигурации 2° (теперь F вместо A). Пусть A' — проекция A на (Δ), а K — проекция F на MM'; P — вторая точка пересечения окружностей (M) и (M'). Геометрическое место точек P есть окружность (Ω), получающаяся инверсией (F, FA'^2) из окружности, описанной вокруг квадрата, который описан вокруг окружности с диаметром AA', а геометрическое место точек K есть образ (Ω) в гомотетии $\left(F, \frac{1}{2}\right)$. Огибающая MM' — эллипс с фокусом F [(Ω) — направляющая окружность, относящаяся к другому его фокусу].

4°. **Обобщение на случай какой-нибудь линии (Γ) второго порядка и угла $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.**

Первый случай: (Γ) — центральная линия. Пусть M и M' — две точки (Γ) такие, что $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})=\alpha$; μ и μ' — точки прикосновения направляющей окружности (F') с центром F' с окружностями (M, MF) и $(M', M'F)$, φ — вторая точка пересечения этих окружностей и P — ортогональная проекция F на MM' (P — середина $F\varphi$). В инверсии с полюсом F [которая переводит в себя окружность (F')] окружности (M, MF) и $(M', M'F)$ переходят в касательные к окружности (F') в точках T и T', в которых эту окружность вторично пересекают прямые $F\mu$ и $F\mu'$. Эти касательные пересекаются в точке φ', являющейся образом φ в указанной инверсии (J). Теперь рассмотрим два подслучая:

а) (Γ) — эллипс. Векторы $\overrightarrow{FM}$ и $\overrightarrow{F'T}$ тогда будут параллельны и противоположно направлены, так же как и векторы $\overrightarrow{FM'}$ и $\overrightarrow{F'T'}$, значит $(\overrightarrow{F'T}, \overrightarrow{F'T'})=\alpha$ и $\angle T\varphi'T'=\pi-\alpha$. Точка φ' принадлежит поэтому окружности (φ') с центром F' и радиусом $\rho=\dfrac{2a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Эта окружность описывается точкой φ' целиком, так как при полном обороте угла $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})$ вокруг точки F угол $(\overrightarrow{F'T}, \overrightarrow{F'T'})$ делает полный оборот вокруг F'. Геометрическое место точек φ есть образ окружности (φ') в инверсии (J), т. е. тоже окружность (φ). Геометрическое место точек P есть окружность (P), гомотетичная (φ) в гомотетии $\left(F, \frac{1}{2}\right)$. Точка F лежит внутри (φ'), а значит и внутри (φ) и (P). Огибающая MM', следовательно, — эллипс, для которого (P) — главная окружность, а (φ) — направляющая окружность, относящаяся ко второму фокусу.

б) (Γ) — гипербола. Пусть u и v — точки прикосновения к (F') касательных, проведенных к (F') из F, а u' и v' — точки прикосновения тех же касательных к главной окружности линии (Γ). Если точки M и M' лежат на одной ветви (Γ), которая окружает F, то μ и μ' лежат на дуге usv окружности (F'), более близкой к F; в таком случае точки T и T' лежат на дуге $us'v$ окружности (F'). Векторы $\overrightarrow{F'T}$ и $\overrightarrow{FM}$, а также $\overrightarrow{F'T'}$ и $\overrightarrow{FM'}$ параллельны и одинаково направлены и, значит, $\angle T'\varphi T=\pi-\alpha$. Точка φ' лежит, следовательно, на той дуге окружности (φ') с центром F' и радиусом $\rho'=\dfrac{2a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, которая лежит внутри угла uFv и которая ближе к F. Обратно: всякой точке φ' этой дуги соответствуют точки M и M' одной

ветви (Γ), окружающей F, и такие, что $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'}) = \alpha$. Если M и M' обе принадлежат ветви (Γ), окружающей F', то μ и μ' лежат на дуге $us'v$; значит, T и T' находятся на дуге usv окружиости (F'), поэтому $\angle T\varphi'T' = \pi - \alpha$ и φ' лежит на дуге (φ'), виешией для угла uFv или для угла, вертикального с углом uFv. Верио и обратное. Наконец, если точка M приадлежит дуге, окружающей F, а M' (ее будем тогда обозначать M_1') приадлежит ветви, окружающей F', то μ лежит иа дуге usv, μ' — на дуге $us'v$, зиачит T — на дуге $us'v$, T' — на дуге usv и потому $\angle T\varphi'T' = \alpha$. Соответствующая точка φ_1' лежит иа одиой из дуг окружиости (φ_1') с цеитром F' и радиусом $\dfrac{2a}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, виешией для угла uFv или для угла, вертикальиого с углом uFv. Верио и обратиое. Окоичательио: геометрическое место точек φ' состоит из дуг окружиости (φ'), виутреииих углу uFv или углу, с иим вертикальиому, и дуг (φ_1'), виешиих для этих углов. Отсюда следует, что геометрическое место точек φ состоит из дуг окружиостей (φ) и (φ_1), получеиных ииверсией (J) из указаиных дуг окружиостей (φ') и (φ_1'). Дуги (φ) вырождаются в отрезок $u'v'$, если (φ') проходит через F; дуги (φ_1) вырождаются в часть прямой, виешиюю отиосительио отрезка $u'v'$, если (φ_1') проходит через F. Геометрическое место точек P получается из геометрического места точек φ гомотетией $\left(F, \dfrac{1}{2}\right)$ и, значит, состоит из четырех дуг окружностей, которые могут, в частности, вырождаться в отрезок или полупрямые. Огибающая (E) прямых MM' поэтому состоит из дуг линий второго порядка с фокусом (F), для которых главными окружностями (или прямой) являются окружиости, иосящие иа себе геометрическое место точек P (или касательиая в вершиие в случае параболы). Исследуем, иакоиец, тип огибающей прямых MM'. Обозиачим через θ угол $uF'v$ между асимптотами (E). Тип огибающей будет зависеть от положеиия точки F отиосительио окружиостей (φ') и (φ_1'). Следует рассмотреть несколько случаев в зависимости от взаимоотиошеиия величин θ, α и $\dfrac{\pi}{2}$.

α) $\theta < \dfrac{\pi}{2}$, следовательно $\angle uFv > \dfrac{\pi}{2}$. Если $\theta < \alpha < \pi - \theta$, то F лежит виутри (φ') и (φ_1'), зиачит внутри (φ) и (φ_1), огибающая состоит из четырех дуг эллипсов. Если $\alpha < \theta$ или $\alpha > \pi - \theta$, то F лежит виутри одиой из окружиостей (φ') (φ_1') и вие другой, зиачит внутри одиой из окружиостей (φ), (φ_1) и вие другой. В этом случае (E) состоит из двух дуг эллипсов и двух дуг гипербол. Если $\alpha = \theta$ или $\alpha = \pi - \theta$, то F лежит иа одиой из окружиостей (φ'), (φ_1') и виутри другой; зиачит, (E) состоит из одной (или двух) дуг парабол и двух дуг эллипса.

β) $\theta > \dfrac{\pi}{2}$, следовательио, $\angle uFv < \dfrac{\pi}{2}$. Если $\pi - \theta < \alpha < \theta$, то F вие (φ') и (φ_1'), зиачит вие (φ) и (φ_1), а потому (E) состоит из четырех дуг гипербол. Если $\alpha < \pi - \theta$ или $\alpha < \theta$, то F — вие одиой из окружиостей (φ'), (φ_1') и виутри другой, зиачит вие одиой из окружиостей (φ) и (φ_1) и виутри другой; (E) состоит из двух дуг эллипса и двух дуг гиперболы. Если $\alpha = \pi - \theta$ или $\alpha = \theta$, то F лежит иа одиой из окружиостей (φ'), (φ_1') и вие другой; зиачит, огибающая прямых MM' состоит из одиой (или двух) дуги параболы и двух дуг гиперболы.

γ) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Если $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$, то F лежит виутри одиой из окружиостей (φ'), (φ_1') и вие другой, зиачит виутри одиой из окружиостей (φ), (φ_1) и вие другой. Огибающая (E) прямых MM' состоит из двух дуг эллипса и двух дуг гиперболы. Если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то окружиости (φ') и (φ_1') совпадают с окружиостью, проходящей через F (и с цеитром F'), и огибающая есть парабола с фокусом F и директрисой $u'v'$ (между прочим, $u'v'$ — также директриса (Γ), отиосящаяся к фокусу E).

в) (Γ) — парабола. Обозиачим через S вершиу (Γ), через p — ее параметр, через (Δ) — директрису и через H — проекцию S на (Δ). Пусть M и M' — две точки (Γ) такие, что $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'}) = \alpha$; μ и μ' — точки прикосиовеиия с (Δ) окружиостей (M, MF) и $(M', M'F)$; φ — вторая точка пересечения этих окружиостей и P — проекция F иа MM'. Произведем ииверсию (F, FH^2); (Δ) перейдет в окружиость, построеииую иа FH как иа диаметре, а окружиости (M, MF), $(M', M'F)$ — в касательные к окружиости (FH) во вторых точках T и T' встречи этой окружиости с прямыми $F\mu$ и $F\mu'$. Эти касательиые пересекаются в точке φ', являющейся образом φ в указаииой ииверсии. Имеем: векторы $\overrightarrow{FM}$ и $\overrightarrow{ST}$ с одиой стороны, и $\overrightarrow{FM'}$

и $\overrightarrow{ST'}$ — с другой, параллельиы и одииаково иаправлеиы, зиачит $(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{ST'}) = \alpha$, поэтому $\angle T\varphi' T' = \pi - \alpha$. Точка φ' лежит, следовательио, иа окружиости (φ') с цеитром S и радиусом $p' = \dfrac{P}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; эта окружиость описывается точкой φ' целиком, в то время как угол $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})$ делает полиый оборот вокруг точки F. Геометрическое место точек φ есть окружиость (φ), в которую переходит (φ') в указаииой иивереии, а геометрическое место точек P есть образ (φ) в гомотетии $\left(F, \frac{1}{2}\right)$. Точка F лежит виутри (φ'), зиачит и виутри (φ) и виутри (P); зиачит, огибающей прямых MM' является эллипс с фокусом F, для которого (P) — главиая окружиость [или для которого (ω) — иаправляющая окружиость, относящаяся к другому фокусу].

Замечаиие. Пп. 3° и 4° могут быть решеиы также при помощи полярного преобразоваиия по отиошеиию к иаправляющей окружиости с цеитром F; отсюда можио получить огибающую прямых MM' и зиачит геометрическое место проекций F на MM'.

88. 1°. а) **Парабола семейства** (C). Пусть Q — точка, симметричиая F отиосительио (D). Если в семействе (C) существует парабола, то ее директриса должиа пройти через точку φ и быть перпеидикулярной в этой точке к $A\varphi$. Поэтому для любого положеиия точки A иа прямой (D) существует парабола с фокусом F, директрисой (Γ) которой будет перпеидикуляр к $A\varphi$ в точке φ; такая парабола существует только одиа.

б) **Геометрическое место вторых фокусов линий** (C). Геометрическое место точек F' есть геометрическое место цеитров окружиостей, касающихся в точке φ окружности с цеитром A и проходящих через φ, т. е. прямая $A\varphi$, за исключеиием точек A и φ. Точки этой прямой, расположеиные с точкой A по одиу сторопу, будут фокусами эллипсов (C), а по другую — фокусами гиперболы.

2°. а) **Свойства директрис** (Δ). Отрезок касательиой (D) к лииии (C), заключеииый между точкой касания A и точкой I, в которой (D) пересекает (Δ), видеи из фокуса F под прямым углом. Значит точка I фиксирована и все директрисы (Δ) проходят через эту точку.

б) **Директрисы** (Δ) **и фокусы** F' **линии** (C) **с данным эксцентриситетом.** Если лииия (C) имеет эксцеитриситет, равный e, то, обозиачая через r' расстояние от A до (Δ), будем иметь $\dfrac{AF}{r'} = e$, откуда $r' = \dfrac{AF}{e} = \dfrac{r}{e}$; (Δ) есть, следовательио, касательиая, проведеииая из I к окружиости с цеитром A и радиусом r'. Условие существоваиия этих касательиых таково: $r' < IA$ или $\dfrac{r}{e} < AI$, или $e > \dfrac{r}{AF}$. Так как $\triangle AFI \sim \triangle AHF$, то $\dfrac{r}{AI} = \dfrac{AH}{AF} = \dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$, и предыдущее условие приии-мает вид $e > \dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$. Если оио выполнено, существуют две касательиые: (Δ_1) и (Δ_2), проведеииые из I к окружности (A, r'), и, значит, две лииии второго порядка: (C_1) и (C_2), удовлетворяющие условию вопроса. Если $e = \dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$, то эти две лииии совпадают. Если лииии (C_1) и (C_2) различны, их вторые фокусы F_1' и F_2' являются точками пересечеиия с прямой (L) (являющейся геометрическим местом точек F') перпеидикуляров, опущеиных из F на (Δ_1) и (Δ_2). Пучок с вершиной I, образоваиный лучами (Δ_1), (Δ_2), (D) и перпеидикуляром к (D) в точке I, гармоиический, поскольку две последиие прямые служат биссектрисами углов двух первых. Зиачит пучок с вершиной F, образоваииый прямыми, перпеидикуляриыми к указаииым, также гармоиический. Отсюда следует, что точки F_1' и F_2' гармонически сопряжеиы с точками φ и φ', в которых прямая (L) пересекается с прямой, проходящей через F перпеидикулярио $F\varphi$.

3°. **Направляющие окружности** (Γ_1') **и** (Γ_2') **линий** (C_1) **и** (C_2). Обе эти окружиости проходят через точку φ и касаются в этой точке. Если $e > 1$, то (C_1) и (C_2) — гиперболы; F_1' и F_2' расположеиы иа прямой (L) по одну сторопу от точки A и по разиые стороиы от φ, поэтому окружиости (Γ_1') и (Γ_2') касаются виешие. Если $e < 1$, то (C_1) и (C_2) — эллипсы; F_1' и F_2' расположеиы иа прямой (L) по ту же сторону от точки A, что и точка φ'; зиачит, (Γ_1') и (Γ_2') касаются виутреиие. В обоих случаях φ — их цеитр гомотетии; зиачит, точка φ', будучи гармоиически

сопряжена точке φ относительно точек F_1' и F_2', есть второй центр гомотетии (Γ_1') и (Γ_2').

4°. **Вычисление квадрата фокальной оси и эксцентриситета (C) в функции a, r и x.** Приняв на прямой (L) положительное направление от A к φ, будем иметь $(2a)^2 = \varphi F'^2 = (\overline{AF'} - \overline{A\varphi})^2 = (x-r)^2$ и $(2c)^2 = FF'^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 - 2AF \times AF' \cos \angle FAF'$. Положим $\angle FA\varphi = 2\alpha$. Если $x > 0$, то $AF' = x$ и $\angle FAF' = 2\alpha$; если $x < 0$, то $AF' = |x| = -x$ и $\angle FAF' = \pi - 2\alpha$, так, что $\cos \angle FAF' = -\cos 2\alpha$. В обоих случаях $(2c)^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos 2\alpha$. Но $\sin \alpha = \frac{d}{r}$, откуда $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{r^2 - 2d^2}{r^2}$ и, следовательно, $(2c)^2 = r^2 + x^2 - 2\frac{r^2 - 2d^2}{r} x$. Из выражений для $(2a)^2$ и $(2c)^2$ находим $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{x^2 + r^2 - 2\frac{r^2 - 2d^2}{r} x}{(x-r)^2}$, откуда $y = e^2 - 1 = \frac{4d^2}{r} \frac{x}{(x-r)^2}$. Если x возрастает от $-\infty$ до $-r$, то y убывает от 0 до $-\frac{d^2}{r^2}$; если x возрастает от $-r$ до r, y возрастает от $-\frac{d^2}{r^2}$ до $+\infty$; если x возрастает от r до $+\infty$, то y убывает от $+\infty$ до 0. Уравнение, дающее x в функции e: $(e^2-1)(x-r)^2 - \frac{4d^2}{r} x = 0$. Коэффициент при x^2 равен $e^2 - 1$, свободный член $(e^2-1)r^2$. Произведение корней равно, следовательно, r^2. Это показывает, что точки, имеющие абсциссами корни этого уравнения, гармонически сопряжены с точками прямой (L), с абсциссами $-r$ и r (это выше было получено геометрически в пункте 2°).

89. 1°. **Построение вершин и вычисление большей оси эллипса (E).** Пусть H — проекция F на (D). Вершины A и A' эллипса (E) суть точки прямой FH, определенные следующими равенствами:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = -e \quad \text{и} \quad \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'H}} = e. \tag{1}$$

Построение этих точек просто (F и e даны, точка H — строится). В частном случае $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ эти точки являются основаниями биссектрис угла G прямоугольного и равнобедренного треугольника HFG ($\hat{F} = 90°$). Центр O эллипса (E) есть середина отрезка AA'. Вершины B и B' являются точками пересечения перпендикуляра, опущенного из O на FH, и окружности (F, OA). Из равенств $\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = e$ и $\frac{\overline{A'F}}{\overline{A'H}} = e$, учитывая расположение точек A и A' относительно F и H, находим: $AF = FH\frac{e}{1+e}$, $A'F = FH\frac{e}{1-e}$, откуда $AA' = AF + A'F = FH\left(\frac{e}{1+e} + \frac{e}{1-e}\right) = \frac{2de \sin u}{1-e^2}$. Если длина $AA' = l$ дана, то

$$\sin u = \frac{l(1-e^2)}{2de}, \tag{2}$$

что возможно тогда и только тогда, когда $l \leqslant \frac{2de}{1-e^2}$. Если это условие выполнено, уравнение (2) для значений u из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ даст лишь одно значение для u; следовательно, существует два положения для прямой (D), симметричные относительно FI (в случае знака равенства обе эти прямые совпадают с прямой, перпендикулярной отрезку FI в точке I).

2°. **Геометрическое место точек A, A', O и F'.** Имеем $\frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AF} - \overline{AH}}$ и $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{A'F}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'F} - \overline{A'H}}$, откуда на основании (1) $\frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} = \frac{-e\overline{AH}}{-e\overline{AH} - \overline{AH}} = \frac{e}{e+1}$ и $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FH}} = \frac{e}{e-1}$. Из этих соотношений следует, что

точки A и A' получаются из точки H гомотетиями $\left(F, \frac{e}{e+1}\right), \left(F, \frac{e}{e-1}\right)$. Так как геометрическое место точек H есть окружность (C), описанная на FI как на диаметре, то геометрическое место точек A и A' — окружности, построенные на $F\alpha$ и $F\alpha'$ как на диаметрах, где $F\alpha$ и $F\alpha'$ — отрезки, полученные из отрезка FI указанными гомотетиями. Точки A и A' являются проекциями точек α и α' на FH; значит, середина O отрезка AA' есть проекция на FH середины ω отрезка $\alpha\alpha'$; поэтому геометрическое место центров O эллипса (E) есть окружность с диаметром $F\omega$. Наконец, фокус F' получается из точки O гомотетией $(F, 2)$, а потому геометрическое место точек F' получается из геометрического места точек O указанной гомотетией: это, следовательно, окружность, построенная на $F\varphi'$ как на диаметре, где φ' — точка, симметричная F относительно ω.

Расположение малой оси эллипса (E) и второй его директрисы (Δ). Малая ось, будучи перпендикулярна FO в точке O, постоянно проходит через точку ω. Вторая директриса (D'), будучи симметричной (D) относительно любой точки малой оси, в частности относительно точки ω, будет проходить постоянно через точку I', симметричную I относительно ω.

3°. Геометрическое место точек B и B'. Обозначим через θ угол OFB, через $2a$ и $2c$ — длины большей оси и фокальное расстояние эллипса (E). Имеем $\cos\theta = \frac{FO}{FB} = \frac{c}{a} = e$. Угол θ имеет, следовательно, постоянную величину. Отсюда следует, что геометрическое место точек B получается из геометрического места точек O подобием с центром F, углом θ и отношением подобия $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{e}$; это геометрическое место есть окружность, проходящая через F, центр C которой получается из центра γ окружности (O) [геометрического места центров эллипса (E)] указанным подобием. Треугольник $F\gamma C$ подобен треугольнику FOB и $\angle\gamma = 90°$, значит точка C расположена на медиатрисе $F\omega$; значит, окружность B — геометрическое место точек B — проходит через ω $\left[\text{если } e = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то } \triangle FOB \text{ равнобедренный и точка } C \text{ расположена на окружности } (O)\right]$. Геометрическое место точек B' есть окружность, симметричная предыдущей относительно FH. Далее, точки B, O, ω лежат на одной прямой, поэтому, если точка B задана, точку O находим как точку пересечения окружности (O) с прямой $B\omega$; точки A, A' и F суть точки пересечения прямой FO с окружностями, являющимися геометрическими местами этих точек; наконец, директрисы (D) и (D') — это прямые, перпендикулярные FO и проходящие через I и I'.

4°. Касательные, проведенные из точки I к (E). Известно, что отрезок касательной к линии второго порядка, заключенный между точкой касания и директрисой (D), виден из фокуса F, соответствующего директрисе (D) под прямым углом. Значит точки M и M' прикосновения касательных, проведенных из I к (E), расположены на перпендикуляре (L), проведенном из F к FI. Если директриса (D) задана, а M — точка прикосновения одной из касательных, m — проекция M на (D), то $\frac{MF}{Mm} = e$, откуда $Mm = \frac{MF}{e}$. Обратно: если M — данная точка прямой (L), то ей соответствует линия второго порядка (E), если существуют касательные, проведенные из точки I к окружности с центром M и радиусом $\frac{MF}{e}$. Необходимое и достаточное условие существования этих касательных $MI \geqslant \frac{MF}{e}$, или $\frac{MF}{MI} \leqslant e$. Геометрическое место точек P плоскости таких, что $\frac{PF}{PI} = e$, есть окружность с центром на прямой FI, пересекающая эту прямую в точках, делящих этот отрезок FI в отношениях e и $-e$ (это точки α и α', которые мы уже имели выше). В зависимости от того, будет ли точка P лежать внутри или вне этой окружности, отношение ее расстояний до точек F и I будет $< e$ или $> e$. Значит геометрическое место положений точек M таких, что $\frac{MF}{MI} \leqslant e$, есть отрезок прямой (L), заключенный между точками M_1 и M_2, в которых она пересекает окружность с диаметром $\alpha\alpha'$. Если M и M' — точки прикосновения касательных, проведенных из I к эллипсу (E) с данной директрисой (D), то, обозначая проекции точек M и M' на (D) через m и m', будем иметь: $\frac{MF}{Mm} = e$, $\frac{M'F}{M'm'} = e$, откуда $\frac{FM}{FM'} = \frac{Mm}{M'm'} = \frac{JM}{JM'}$. Значит точка J гармонически сопряжена с F относительно M и M'. Так как точка F есть центр отрицательной гомотетии окружностей с центрами M и M', проходящих

через F, то J — центр положительной гомотетии тех же окружностей. Для построения точек M и M' достаточно заметить, что расстояния от этих точек до F являются расстояниями от них до прямой IF. Значит точки M и M' лежат соответственно на прямых (Δ) и (Δ'), являющихся прямыми, для каждой точки которых отношение расстояний до прямых FI и (D) равно e. Мы получим легко по одной точке каждой из прямых (Δ) и (Δ') как точки пересечения прямых, параллельных FI и отстоящих от этой прямой на расстояниях Fa, с прямой, параллельной (D) на расстоянии aI от этой прямой.

90. 1°. Пусть P и Q — точки пересечения окружности (C) с прямой OO', а P' и Q' — точки окружности (C'), которые соответствуют точкам P и Q в гомотетии с центром S, преобразующей (C) в (C'). Имеем: $p = \overline{SP}\cdot\overline{SQ}$, $p' = \overline{SP'}\cdot\overline{SQ'}$, $k = \overline{SP'}\cdot\overline{SQ} = \overline{SP}\cdot\overline{SQ'}$; $\dfrac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} = \dfrac{\overline{SQ'}}{\overline{SQ}} = \dfrac{R'}{R}$. Теперь находим $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} = \dfrac{\overline{SP'}\cdot\overline{SQ}}{\overline{SP}\cdot\overline{SQ}} = \dfrac{k}{p}$ и аналогично $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} = \dfrac{\overline{SP'}\cdot\overline{SQ'}}{\overline{SP}\cdot\overline{SQ'}} = \dfrac{p'}{k}$. Итак,

$$\frac{R'}{R} = \frac{k}{p} = \frac{p'}{k}.$$

2°. Окружность (I), касающаяся (AB), (AC) и (D). В инверсии $(A, \overline{AB}\cdot\overline{AC})$ полуокружность (AB) с центром O, полуокружность (AC) с центром K и полупрямая Cz, лежащая на прямой (D) и расположенная относительно прямой AB с той же стороны, что и указанные полуокружности, преобразуются соответственно в полупрямую Cz, в «полукасательную» Bu в точке B к (AB) и в полуокружность (AB). Значит окружность (I) перейдет в окружность (I'), касающуюся полупрямых Cz и Bu и полуокружности (AB). Центр ω' окружности (I') будет расположен, с одной стороны, на медиатрисе отрезка BC, с другой стороны — на окружности с центром O и радиусом $OL = OB + HB$.

Замечание. Имеется еще одна окружность, касающаяся полупрямых Cz и Bu и полуокружности (AB) — это окружность с диаметром BC; при указанной инверсии эта окружность перейдет в себя, и она действительно касается (AB), (AC) и (D) (в дальнейшем эту окружность мы исключим из рассмотрения).

Итак, точку ω' мы можем построить; точка I будет расположена на прямой $A\omega'$. Рассмотрим теперь инверсию $(B, \overline{BA}\cdot\overline{BC})$. В этой инверсии полуокружность (AB), полупрямая Cz перейдут друг в друга, а полуокружность (AC) — в себя. Следовательно, окружность (I), касающаяся (AB), (AC) и Cz, перейдет в окружность, касающуюся (AB), (AC) и Cz. Но существует лишь одна окружность, удовлетворяющая всем трем условиям касания; в самом деле, при помощи первой инверсии было установлено, что ее образ после инверсии единственен. Отсюда следует, что окружность (I) инвариантна в инверсии $(B, \overline{BA}\cdot\overline{BC})$. Степень точки B относительно (I) равна поэтому степени инверсии $\overline{BA}\cdot\overline{BC}$. Точка B имеет одинаковую степень относительно окружности (I) и окружности с диаметром AC и потому расположена на радикальной оси этих окружностей, но эти окружности касаются, поэтому точка B лежит на касательной в точке T, в которой касаются окружности (I) и (AC). Значит точка I лежит на прямой KT, где T — точка прикосновения с (AC) касательной, проведенной из B. Центр I окружности (I) лежит на прямой KT и является точкой, в которой пересекаются прямые KT и $A\omega'$. Точки прикосновения (I) с (AC), (D) и (AB) суть соответственно: точка T, проекция точки I на (D) и точка, в которой продолжение OI пересекает AB.

3°. Окружность (J), касающаяся (AB), (CD) и (D). Аналогично находим, что центр J окружности (J) расположен, с одной стороны, на прямой $B\varphi'$, где φ' — точка, в которой медиатриса отрезка AC пересекается с окружностью с центром O и радиусом $OA + KA$, с другой стороны — на прямой, проходящей через середину H отрезка CB и через точку U прикосновения касательной к (CB), проведенной из A.

4°. Радиусы окружностей (I) и (J). Рассмотрим окружность (I) и ее образ (I') в инверсии $(A, \overline{AB}\cdot\overline{AC})$ и пусть R_1 — радиус окружности (I). Точка A есть центр положительной гомотетии окружностей (I) и (I'). Степень инверсии с полюсом A, в которой окружности (I) и (I') переходят друг в друга, равна $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 2a\cdot 2x = 4ax$. Радиус окружности (I') равен, очевидно, y, поэтому на основании 1° $\dfrac{R_1}{y} = \dfrac{4ax}{p}$, откуда $R_1 = \dfrac{4axy}{p}$. Можно легко подсчитать p, если предварительно доказать, что точки T' и S' прикосновения окружности (I') с Bu и (AB) расположены на одной прямой с точкой A. В самом деле, для окружности с диаметром AB и окружности (I') точка S' есть центр гомотетии и, значит, касательная к окружности с диаметром AB в точке M (в которой ее пересекает прямая $S'T'$) будет параллельна

касательной $T'B$ в точке T' к (I'); следовательно, касательная в точке M к окружности с диаметром AB будет перпендикулярна AB и, значит, точка M совпадает с A. Таким образом, $p = \overline{AS'} \cdot \overline{AT}$ или, замечая, что ABT' — прямоугольный треугольник, а BS' — его высота, будем иметь: $p = AB^2 = 4a^2$, откуда $R_1 = \frac{xy}{a}$. Аналогично найдем $R_2 = R_1 = \frac{xy}{a}$. Окружности (I) и (J), таким образом, равны.

Максимум для R_1 и R_2. Так как $x + y = a$, то максимальные значения R_1 и R_2 будут иметь тогда, когда $x = y$. Точка C в этом случае — середина AB, а максимальные значения для R_1 и R_2 таковы: $R_1 = R_2 = \frac{a}{4}$.

91. 1°. Перемещение точек M и M'. Обозначим через FX и FX' полупрямые, выходящие из F и проходящие соответственно через M и M'. Угол XFX' сохраняет величину и знак, и его стороны должны пересекать (D). Значит этот угол может вращаться вокруг двух крайних положений: X_1FX_1' — положение, в котором $FX \parallel (D)$ (в этом случае M — бесконечно удаленная точка), и положение X_2FX_2', в котором $FX' \parallel (D)$ (точка M' в бесконечности). Пусть M_1' и M_2 — положения M' и M, соответствующие указанным крайним положениям угла XFX'. Когда угол XFX' вращается от положения X_1FX_1' к X_2FX_2', то точка M движется из бесконечности (снизу вверх) и доходит до точки M_2, а точка M' начинает свое движение с положения M_1' и движется вверх (до бесконечности).

Геометрическое место центров C окружности, описанной вокруг треугольника MFM'. Пусть E — проекция C на (D). Угол MFM' — вписанный угол для окружности (C), и так как он равен $\frac{\pi}{3}$, то угол MCM' равен $\frac{2\pi}{3}$, и значит угол MCE равен $\frac{\pi}{3}$, потому $CE = CM\cos\frac{\pi}{3} = \frac{CM}{2}$, откуда $\frac{CM}{CE} = 2$ и, следовательно, $\frac{CF}{CE} = 2$. Таким образом, отношение расстояний от C до F и (D) постоянно и равно 2, а потому точка C лежит на гиперболе (H) с фокусом F, соответствующей директрисой (D) и эксцентриситетом $e = 2$. Для того чтобы уточнить положение основных элементов этой гиперболы, заметим, что директриса (D), соответствующая фокусу F, есть поляра точки F по отношению к главной окружности гиперболы (H), а асимптоты (H) — это прямые, соединяющие центр гиперболы с точками касания касательных, проведенных из F к главной окружности, и, наконец, угол θ, который образуют асимптоты гиперболы с фокальной осью, определяется соотношением $\cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$. Для гиперболы (H), $\cos\theta = \frac{1}{2}$ и, значит, $\theta = \frac{\pi}{3}$; касательные, проведенные к главной окружности из F, образуют, следовательно, с фокальной осью угол $\frac{\pi}{6}$; это, следовательно, не что иное как прямые FM_1' и FM_2. Асимптоты (H) — перпендикуляры в точках M_1' и M_2 соответственно к прямым FM_1' и FM_2. Точка, в которой пересекаются эти перпендикуляры, — центр O гиперболы (H). Теперь можно построить главную окружность, а тогда в пересечении с фокальной осью получим вершины A и A' гиперболы (H). Точка C расположена по отношению к (D) с той же стороны, что и F (скажем, слева); значит, точка C лежит постоянно на той ветви гиперболы (H), которая расположена по ту же сторону от (D), что и F. Эту ветвь (H) точка C описывает целиком. В самом деле, пусть C_0 — какая-нибудь точка этой ветви, E_0 — ее проекция на (D), M_0 и M_0' — точки пересечения (D) с окружностью, проходящей через F и имеющей центр в точке C_0. Тогда $\frac{C_0E_0}{C_0M_0} = \frac{C_0E_0}{CF} = \frac{1}{2}$; значит, угол M_0CE_0 равен $\frac{\pi}{3}$ и, значит, угол M_0CM_0' равен $\frac{2\pi}{3}$, а потому угол M_0FM_0' равен $\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка C_0 есть центр окружности (C), соответствующей некоторому положению M_0FM_0' угла MFM'. Итак, геометрическое место точек C есть вся ветвь гиперболы (H), лежащая влево от (D).

2°. Изучение образа (C) в инверсии (F, k^2). В этой инверсии прямая (D) инверсируется в окружность (d) с диаметром FH, точки M и M' инверсируются в точки m и m', в которых FM и FM' пересекают (d), а образом

окружности (C) будет прямая mm'. Так как угол mFm' равен $\frac{\pi}{3}$, то он высекает в окружности (d) дугу $\frac{2\pi}{3}$. Хорда mm' является, следовательно, стороной равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность, и расстояние от центра Ω окружности (d) до этой хорды равно поэтому $\frac{h}{4}$. Таким образом, прямая mm', являющаяся образом (C) в инверсии (F, h^2), постоянно касается окружности (Ω) с центром Ω и радиусом $\frac{h}{4}$. Касательные, проведенные из F к этой окружности (Ω), — не что иное как прямые FM_1' и FM_2. Пусть m_1' и m_2 — образы M_1' и M_2 в рассматриваемой инверсии. Образы точек M_1 и M_2' (бесконечно удаленные точки) совпадают с F и, значит, Fm_1' и Fm_2 — граничные положения для mm'. Отсюда следует, что точка K прикосновения mm' с окружностью (Ω) описывает лишь дугу K_1K_2 этой окружности (сделать чертеж). Окружность (C), полученная из mm' указанной инверсией, касается постоянно окружности (Γ'), полученной инверсией (Ω); при этом окружность (Γ') расположена вся вправо от (D); точка F лежит, следовательно, вне этой окружности. Окружность (C) проходит постоянно через точку F и касается окружности (Γ'), вне которой лежит точка F. Значит центр C окружности (C) лежит на гиперболе (H) с фокусом F, для которой (Γ) — направляющая окружность, относящаяся к другому фокусу. Окружность (Γ'), как и (Ω), вписана в угол $M_1'FM_2$; значит, точки K_1' и K_2' касания (Γ') с FM_1' и FM_2 — образы K_1 и K_2 в инверсии (F, h^2). Поэтому $Fm_1' \cdot FM_1' = h^2$, $FK_1 \cdot FK_1' = h^2$. Но $FK_1 = \frac{1}{2} Fm_1$; значит, $FK_1' = 2FM_1'$. Таким образом, точка K_1' симметрична F относительно M_1', а точка K_2' симметрична F относительно M_2. Точка F' — центр (Γ') — есть точка, в которой пересекаются перпендикуляры к FK_1' в точке K_1' и к FK_2' в точке K_2'. Точка K прикосновения mm' с (Ω) описывает, как указано выше, лишь дугу K_1K_2 окружности (Ω), значит, точка K' прикосновения окружностей (C) и (Γ') описывает дугу $K_1'K_2'$ окружности (Γ') (полученную из K_1K_2 рассматриваемой инверсией). Эта дуга $K_1'K_2'$ есть геометрическое место точек прикосновения (Γ') с окружностями (C), проходящими через F и имеющими центры на одной ветви гиперболы (H). Таким образом, геометрическое место точек C есть целиком одна ветвь гиперболы (H). Главная окружность гиперболы (H) есть окружность, касающаяся FK_1' и FK_2' в точках M_1' и M_2 (середины FK_1' и FK_2'). Отсюда сразу видим, что гипербола, о которой здесь говорится, есть та же, о которой мы говорили в пункте 1°.

3°. Геометрическое место точек I и I'. Пусть J и J' — проекции на (D) центров I и I' окружности, вписанной в треугольник MFM' и вневписанной в угол F этого треугольника. Пусть T и T' — точки прикосновения этих окружностей с прямой FM. Тогда $IJ = IT = IF \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} IF$, $I'J' = I'T' = I'F \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} I'F$, откуда $\frac{IF}{IJ} = 2$ и $\frac{I'F}{I'J'} = 2$. Отсюда следует, что точки I и I' обе расположены на той же самой гиперболе (H): это точки пересечения биссектрисы FZ угла FMM' соответственно с левой и правой ветвями гиперболы (H). При вращении угла MFM' полупрямая FZ описывает угол, образованный лучами FZ_1 и FZ_2 — биссектрисами углов X_1FX_1' и X_2FX_2'; эти лучи образуют с FH углы $\frac{\pi}{3}$ и потому параллельны асимптотам (H). Отсюда следует, что геометрическое место точек I состоит из части левой ветви гиперболы (H), лежащей внутри угла Z_1FZ_2, а геометрическое место точек I' есть вся правая ветвь гиперболы (H).

Касательные к (H) в точках I и I'. Так как прямая (D) есть директриса гиперболы (H), соответствующая фокусу F, то отрезки касательных к (H) в точках I и I', заключенные между точками касания и прямой (D), видны из фокуса F под прямым углом. Значит эти касательные обе проходят через точку P, в которой (D) пересекается с перпендикуляром к FZ в точке F. Эта точка P есть точка пересечения с (D) касательной к (H) в точке, описывающей целиком правую ветвь гиперболы (H); точка P описывает лишь часть (D), расположенную вне угла между асимптотами, в которых расположена гипербола (H), иначе говоря, точка P описывает прямую (D) за вычетом отрезка $M_1'M_2$.

92. 1°. При повороте $\left(P, +\frac{\pi}{2}\right)$ прямые (D), (D') и (Δ) перейдут соответственно в прямые (D'), (D) и (Δ'). Следовательно, точка M пересечения (D) и (Δ) перейдет в точку N' пересечения (D') и (Δ'), а точка N пересечения (D') и (Δ) перейдет в точку M' пересечения (D) и (Δ'). Значит

$$PM = PN', \qquad PN = PM' \tag{1}$$

и

$$(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN'}) = +\frac{\pi}{2}, \qquad (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM'}) = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \tag{2}$$

Далее, применяя теорему Шаля, будем иметь: $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN'}) + (\overrightarrow{PN'}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{PN'}, \overrightarrow{PN}) + (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN'})$, или так как в силу равенства (2) $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN'}) = (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM'})$, то $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{PN'}, \overrightarrow{PN}) + (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM'})$, откуда $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{PN'}, \overrightarrow{PM'})$ (общее значение θ этих равных между собою углов равно или $\frac{\pi}{2}$, или $\frac{3\pi}{2}$ в зависимости от того, будут ли точки N и N' лежать по одну сторону от точки P или по разные). С другой стороны, из (1) следует $\frac{PN}{PM} = \frac{PM'}{PN'}$. Обозначим через k величину этого отношения. На основании предыдущего, имеем $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \theta \pmod{2\pi}$, $\frac{PN}{PM} = k$ и $(\overrightarrow{PN'}, \overrightarrow{PM'}) = \theta \pmod{2\pi}$, $\frac{PM'}{PN'} = k$. Отсюда следует, что N и M' получаются из точек M и N' после поворота вокруг точки P на угол θ и гомотетии с центром P и коэффициентом гомотетии, равным k. А так как в этих преобразованиях точка P неподвижна, то треугольник $PM'N$ в этом подобии переходит в треугольник $PN'M$. Окружность, описанная вокруг треугольника $PN'M$ при указанном подобии, переходит в окружность, описанную вокруг треугольника $PM'N$. Угол, образованный касательными к этим окружностям в точке P, равен θ, т. е. $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, поэтому эти окружности ортогональны.

2°. **Геометрическое место проекций P на NM' и MN'.** Проекциями P на NM' и MN' в силу того, что эти треугольники равнобедренные и прямоугольные, являются середины отрезков NM' и MN'; это центры окружностей, описанных вокруг четырехугольников с вершинами N, M', O, P и M, N', O, P. Эти две окружности проходят через фиксированные точки O и P, а потому их центры расположены на медиатрисе отрезка OP. Прямые, соединяющие точку P с этими двумя точками, являются биссектрисами углов, образованных прямыми (D) и (D'), и они описывают всю плоскость, если (D) вращается вокруг P. Значит медиатриса $z'z$ отрезка OP целиком есть геометрическое место середин отрезков NM' и $N'M$.

Огибающая прямых NM' и $N'M$. Каждая из этих прямых есть одна из сторон прямого угла, другая сторона которого проходит через фиксированную точку P, а вершина скользит по прямой $z'z$. Значит прямые NM' и MN' касаются параболы (Π) с фокусом P, для которой касательной в вершине является $z'z$ (а потому $y'y$ — директриса). Так как вершина указанного прямого угла описывает $z'z$ целиком, то огибающая каждой из прямых NM' и $N'M$ — вся указанная парабола (Π).

Геометрическое место точек пересечения прямых NM' и $N'M$. На основании предыдущего прямая NM' получается из MN' в результате поворота вокруг P на угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = \frac{3\pi}{2}$ и последующей гомотетией. Значит эти прямые перпендикулярны. Геометрическое место точки Q их пересечения есть, следовательно, геометрическое место точек таких, что через каждую такую точку можно провести две взаимно-перпендикулярные касательные к параболе (Π): это — директриса $y'y$ этой параболы.

93. 1°. **а) Свойство прямой AM и медиатрисы отрезка QR.** Пусть ABC — какой-нибудь треугольник, M — какая-нибудь точка, лежащая в его плоскости, β и γ — проекции этой точки на прямые AC, AB; Q и R — точки, симметричные точке M относительно прямых AC и AB. Точка A есть точка пересечения медиатрис сторон MQ и MR треугольника MQR; значит, медиатриса (Δ) третьей стороны QR проходит через A. Четырехугольник $A\beta M\gamma$ вписанный, значит $(A\beta, AM) = (\gamma\beta, \gamma M) \pmod{\pi}$, и так как $QR \parallel \gamma\beta$, то

$$(A\beta, AM) = (QR, \gamma M) = (QR, \Delta) + (\Delta, AB) +$$

$$+ (AB, \gamma M) = \frac{\pi}{2} + (\Delta, AB) + \frac{\pi}{2} = (\Delta, AB) \pmod{\pi}.$$

Полученное соотношение можно переписать так: $(AC, AM) = -(AB, \Delta) \pmod{\pi}$. Таким образом, AM и (Δ) — изогонали относительно AC и AB. Значит углы, образованные прямыми AM и CA, имеют те же биссектрисы, что и углы, образованные прямыми AC и AB.

в) Свойство прямых AX, BY и CZ. Прямая AX такова, что углы между прямыми AY и AM имеют те же биссектрисы, что и углы между прямыми AB и AC. Она совпадает с медиатрисой (Δ) отрезка QR. Аналогично, обозначая через P точку, симметричную точке M относительно BC, заключаем, что прямые BY и CZ — медиатрисы отрезков RP и PQ. Если точки P, Q и R не лежат на одной прямой, то прямые AX, BY, CZ, будучи медиатрисами сторон треугольника PQR, пересекаются в одной точке M'. Если же точки P, Q и R лежат на одной прямой, то эти прямые параллельны. В этом случае (и только в этом случае) проекции α, β, γ, точки M на BC, CA и AB лежат на одной прямой (прямая Симпсона), что будет иметь место тогда и только тогда, когда точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

2°. Предположим теперь, что все углы треугольника ABC острые и что точка M лежит внутри треугольника ABC.

а) Свойство проекций точек M и M' на стороны треугольника ABC. Треугольники $AM\gamma$ и $AM'\beta'$ с одной стороны, и $AM\beta$ и $AM'\gamma'$, с другой, — подобны, так как они прямоугольные с соответственно равными острыми углами, поэтому $\frac{A\gamma}{A\beta'} = \frac{AM}{AM'}$ и $\frac{A\beta}{A\gamma'} = \frac{AM}{AM'}$, откуда $\frac{A\gamma}{A\beta'} = \frac{A\beta}{A\gamma'}$; следовательно, $A\beta \cdot A\beta' = A\gamma \cdot A\gamma'$; а так как β и β' также γ и γ' расположены по одну сторону от точки A, то $\overline{A\beta} \cdot \overline{A\beta'} = \overline{A\gamma} \cdot \overline{A\gamma'}$. Из этого соотношения следует, что точки $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ расположены на одной окружности. Центр этой окружности есть пересечение медиатрис отрезков $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$, т. е. середина ω отрезка MM'. Аналогично установим, что точки $\beta, \beta', \alpha, \alpha'$ расположены на одной окружности, центром которой является та же точка ω. Таким образом, точки $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ расположены на одной окружности, центр ω которой совпадает с серединой ω отрезка MM. Из подобия треугольников, рассмотренных выше, также находим $\frac{\gamma M}{\beta' M'} = \frac{AM}{AM'}$ и $\frac{\beta M}{\gamma' M'} = \frac{AM}{AM'}$, откуда $\frac{\gamma M}{\beta' M'} = \frac{\beta M}{\gamma' M'}$, или $\beta M \cdot \beta' M' = \gamma M \cdot \gamma' M'$, и аналогично $\beta M \cdot \beta' M' = \alpha M \cdot \alpha' M'$. Объединяя эти равенства, получим $\alpha M \cdot \alpha' M' = \beta M \cdot \beta' M' = \gamma M \cdot \gamma' M'$, а так как точки M и M' лежат обе внутри треугольника ABC, то $\overline{\alpha M} \cdot \overline{\alpha' M'} = \overline{\beta M} \cdot \overline{\beta' M'} = \overline{\gamma M} \cdot \overline{\gamma' M'}$.

б) Случай, когда точка M совпадает с ортоцентром H треугольника ABC. Известно, что во всяком треугольнике высота, выходящая из его вершины, и диаметр описанной окружности, выходящий из той же вершины, являются изогоналями сторон, выходящих из рассматриваемой вершины. Отсюда следует, что если точка M совпадает с точкой H, то точка M' совпадает с центром O окружности (Γ), описанной вокруг треугольника ABC. С другой стороны, точки, симметричные точке H относительно сторон BC, CA и AB треугольника ABC, лежат на окружности (Γ), описанной вокруг этого треугольника. Отсюда следует, что эти три стороны касаются эллипса (E), одним из фокусов которого является точка H, а окружность (Γ) — направляющая окружность, относящаяся к другому фокусу. Главная окружность этого эллипса получается из окружности (Γ) гомотетией $\left(H, \frac{1}{2}\right)$; эта окружность проходит через основания α, β, γ высот треугольника ABC и потому является окружностью Эйлера треугольника ABC; центр этой окружности (ω) — середина ω отрезка OH.

в) Линия второго порядка, касающаяся сторон треугольника $A'B'C'$. Пусть A' — какая-нибудь точка окружности (Γ), B' и C' — точки, в которых касательные, проведенные из A' к (E), вторично пересекают (Γ). Точке O — центру окружности (Γ), описанной вокруг треугольника $A'B'C'$, соответствует как обратная по отношению к этому треугольнику $A'B'C'$ его ортоцентр H'. Точки, симметричные точке H' относительно сторон треугольника $A'B'C'$, расположены на окружности (Γ), и, значит, его стороны касаются эллипса (E'), для которого H' — один из фокусов, а (Γ) — направляющая окружность, соответствующая другому фокусу. Точки, симметричные фокусу H' эллипса (E') относительно касательных $A'B'$ и $A'C'$ к этому эллипсу, расположены на (Γ); точка H', общая точка двух окружностей (Γ_1) и (Γ_2), симметричных (Γ) относительно $A'B'$ и $A'C'$. Но прямые $A'B'$ и $A'C'$ по предположению касаются эллипса (E), поэтому точки, симметричные фокусу H эллипса (E) относительно этих двух прямых, лежат на окружности (Γ); таким образом, точка H принадлежит также окружностям (Γ_1) и (Γ_2). Но эти две окружности, помимо точки A', имеют еще только одну общую точку; значит, точки H' и H совпадают. Окончательно: эллипс (E') совпадает с эллипсом (E); вторым

фокусом эллипса (E') является точка H, а его главной окружностью является окружность Эйлера — треугольника ABC.

94. 1°. Касательные, проведенные из F к (C). Пусть S — точка прикосновения касательной, проведенной из F к (C); положим $\angle ISF = \theta$, тогда $\sin\theta = \frac{IS}{IF} = \frac{I\alpha}{IF} = \frac{OA}{OF} = \frac{a}{c}$. **Касательные из θ к (C').** Обозначим через D точку, в которой $\alpha\delta$ касается (C'). Тогда $\sin\theta' = \frac{IT}{IO} = \frac{ID}{IO} = \frac{D\alpha}{OF} = \frac{OA}{OF} = \frac{a}{c}$; значит, касательные из O к (C') фиксированы (заметим, что $\theta' = \theta$). **Хорды, высекаемые (C) на прямых OT и OT'.** Прямые OT, OT' и $\alpha\delta$ равноудалены от центра I окружности (C) и потому высекают из нее хорды, равные $\alpha\beta = 2a$.

2°. Вычисление $\overline{OI}$, $\overline{HI}$, $\overline{HK}$. Из прямоугольного треугольника OTI находим $OI \cdot OH = OT^2 = \left(\frac{OH}{\cos\theta'}\right)^2 = \frac{OH^2}{\cos^2\theta'}$; следовательно, $OI = \frac{OH}{\cos^2\theta'} = \frac{|y|}{\cos^2\theta'}$. Так как точки I и H расположены всегда по одну сторону от $x'x$, то $\overline{OI} = \frac{y}{\cos^2\theta'}$. Но $\cos^2\theta' = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$; значит, $\overline{OI} = \frac{c^2}{c^2 - a^2}\,y$. Из $\overline{HI} = \overline{OI} - \overline{OH}$ находим $(\overline{OH} = y)$: $\overline{HI} = \frac{a^2}{c^2 - a^2}\,y$. Наконец, треугольники IHK и IOF гомотетичны; следовательно, $\frac{\overline{HK}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{OI}} = \frac{a^2 y}{c^2 - a^2} : \frac{c^2 y}{c^2 - a^2} = \frac{a^2}{c^2}$, откуда $\overline{HK} = \frac{a^2}{c}$.

Вычисление r, R и HM. Из прямоугольного треугольника ITO находим $r = IT = IO\sin\theta' = \frac{a}{c}\,IO = \frac{ac\,|y|}{c^2 - a^2}$. Зная, что $TE = a$, найдем R $(R^2 = IT^2 + TE^2)$: $R = a\sqrt{1 + \frac{c^2 y^2}{(c^2 - a^2)^2}}$. Из прямоугольного треугольника IHM находим $HM^2 = IM^2 - IH^2 = R^2 - \frac{a^4 y^2}{(c^2 - a^2)^2}$, $HM = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{c^2 - a^2}}$.

Геометрическое место точек K. Абсцисса этой точки постоянна $\left(= \frac{a^2}{c}\right)$; значит, точка K лежит на прямой (Δ), уравнение которой $x = \frac{a^2}{c}$. Точка K есть, таким образом, точка, в которой эта фиксированная прямая пересекает IF, но поскольку прямая IF может вращаться вокруг F, принимая все возможные положения, точка K описывает всю прямую (Δ).

Геометрическое место точек M и N. Абсциссы точек M и N равны $\pm HM$, их ординаты равны y; на основании предыдущего $x^2 = \frac{a^2}{c^2 - a^2}\,y^2 + a^2$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ — это уравнение определяет гиперболу с вершинами A и B; F — один из фокусов. Ординаты точек M и N равны ординате точки K, а так как последняя по доказанному принимает все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то точки M и N описывают целиком обе ветви указанной гиперболы. Прямая (Δ) для этой гиперболы является директрисой, соответствующей фокусу F.

На основании предыдущего, OT и OT' асимптоты этой гиперболы.

3°. Вычисление OJ. Из прямоугольного треугольника IMJ имеем $\overline{IJ} \cdot \overline{IH} = IM^2 = R^2$; отсюда находим $\overline{IJ}$, а затем из соотношения $\overline{OJ} = \overline{OI} + \overline{IJ}$ находим $\overline{OJ} = -\frac{c^2 - a^2}{y}$.

Фиксированные точки окружности (IMJ). Пусть φ — одна из точек, в которой окружность (IMJ) пересекает ось $x'Ox$. Из прямоугольного треугольника $I\varphi J$ находим $\overline{O\varphi}^2 = -\overline{OI} \cdot \overline{OJ} = \frac{c^2}{c^2 - a^2}\,y \cdot \frac{c^2 - a^2}{y} = c^2$; значит, окружность (IMJ) проходит через точку F и точку F', симметричную F относительно O (т. е. через фокусы гиперболы).

Касательная в M к (Γ). Окружность (IMJ) проходит через F и F'; значит, MJ есть биссектриса угла $F'MF$ (сделать чертеж!) и потому касается (Γ) в точке M; отсюда следует [так как MJ касается в точке M и окружности (C)], что окружность (C) касается гиперболы в точке M (аналогично и в N).

4°. Из предыдущего следует, что:

1°. любая окружность, центр которой лежит на мнимой оси гиперболы и которая касается этой гиперболы, видна из любого фокуса под углом, равным тому углу между асимптотами гиперболы, в котором не лежит эта гипербола;

2°. каждая такая окружность высекает на асимптотах хорду, равную длине действительной оси гиперболы.

95. А. 1°. Геометрическое место F, если известна директриса и две точки. Пусть H_1 и H_2 — проекции на (Δ) точек M_1 и M_2. Так как $\frac{M_1F}{M_1H_1}=e$ и $\frac{M_2F}{M_2H_2}=e$, то $\frac{FM_1}{FM_2}=\frac{M_1H_1}{M_2H_2}$. Предположим сначала, что прямая M_1M_2 не параллельна (Δ) и пусть I — точка пересечения M_1M_2 и (Δ). Тогда ясно, что точка F расположена на окружности (C), двумя диаметрально противоположными точками которой является точка I и точка, гармонически с ней сопряженная относительно точек M_1 и M_2 $\left(\text{ибо } \frac{M_1H_1}{M_2H_2}=\frac{M_1I}{M_2I}\right)$. Обратно: пусть F — точка (C), не лежащая на (Δ). Существует линия 2-го порядка, проходящая через M_1, имеющая фокус F и соответствующую директрису (Δ); эта линия пройдет и через M_2, ибо, полагая $\frac{M_1F}{M_1H_1}=e$, будем иметь $\frac{FM_1}{FM_2}=\frac{IM_1}{IM_2}=\frac{M_1H_1}{M_2H_2}$, откуда $\frac{M_2F}{M_2H_2}=e$. Таким образом, геометрическое место точек F состоит из окружности (C), за исключением точек этой окружности, расположенных на (Δ). Выше мы предполагали, что M_1M_2 не параллельна (Δ). Если $M_1M_2\parallel(\Delta)$, то $M_1H_1=M_2H_2$, значит $FM_1=FM_2$ и геометрическое место точек F есть медиатриса отрезка M_1M_2, за исключением точки пересечения этой медиатрисы с (Δ).

2°. **Приложение.** Если линия второго порядка с директрисой (Δ) должна пройти через данные точки M_1, M_2, M_3, то ее фокус F должен быть расположен и на окружности, которую описывает фокус F линий второго порядка, проходящих через M_1 и M_2 и имеющих директрису (Δ) (соответствующую фокусу F), и на окружности, которую описывает фокус F линий второго порядка, проходящих через M_2 и M_3 и имеющих директрису (Δ). Фокус F должен быть точкой, общей этим окружностям. Если линия второго порядка с данной директрисой (Δ) должна проходить через две данные точки M_1 и M_2 и должна касаться в точке M_2 данной прямой (T) (проходящей через M_2), то одна из указанных выше окружностей оказывается окружностью, построенной на $I'M_2$ как на диаметре, где I' — точка пересечения (Δ) и (T) [если $(T)\parallel(\Delta)$, то точка M_2 будет вершиной фокальной оси линии и окружность с диаметром $I'M_2$ вырождается в прямую, проходящую через M_2 перпендикулярно (Δ)].

В. 1°. Геометрическое место фокусов F эллипсов (E). Касательная в S к (E) есть прямая SS' и, значит, геометрическое место (F) есть окружность (γ) с диаметром SS' (за исключением точек S и S').

2°. Эллипсы (E), проходящие через данную точку M. Имеется столько возможных положений для фокуса F эллипса, удовлетворяющего условию задачи, сколько имеется общих точек у окружности (γ) — геометрического места фокусов эллипса (E) и у окружности (C) — геометрического места фокусов F эллипсов, проходящих через точки S и M [с данной директрисой (Δ)]. В силу того что все эллипсы (E), удовлетворяющие условию задачи, обладают осью симметрии (δ), проведенной через S параллельно (Δ), можно предположить, что точка M расположена по отношению к (δ) с той же стороны, что и (Δ). Так как, с другой стороны, не существует эллипсов (E), проходящих через точки, расположенные по отношению к (Δ) в полуплоскости, в которой не лежит S, то можно предположить, что M лежит между (δ) и (Δ). Пусть I — точка, в которой SM пересекает (Δ), и точка J, гармонически сопряженная с ней относительно S и M; пусть (C) окружность с диаметром IJ. Точка F должна лежать и на окружности (γ) и на окружности (C). Для того чтобы изучить взаимное расположение этих окружностей, произведем инверсию (S, SS'^2). Окружность (γ) перейдет в прямую (Δ); образом I_1 точки I будет точка пересечения SI с (γ). В силу сохранения гармонизма при инверсии точка M_1 (образ M) будет серединой I_1J_1 (J_1 — образ J). Окружность (C_1) [образ (C)] будет окружностью с диаметром I_1J_1, иначе окружность с центром M_1, проходящая через I_1.

Случай I. M лежит на окружности (Γ). В этом случае точка M_1 совпадает с M, $\frac{1}{2}\angle I_1S'H=\angle MS'H$; значит, $S'M$ биссектриса угла $I_1S'H$. Прямоугольные треугольники $MS'I_1$ и $MS'H$ равны и, значит, $MH=MI_1$. Отсюда следует, что окружность (C_1) касается (Δ) в точке H. Значит окружности (γ) и (C) также касаются в точке K, в которой прямая HS пересекает (γ). Эта точка K есть единственное положение фокуса F, удовлетворяющее условию задачи; имеется, следовательно, только один эллипс (E), проходящий через точку M.

Случай II. Точка M внутри (Γ). Предположим, что в соответствии с обозначениями, принятыми при рассмотрении первого случая, точка M передвинется по прямой SI к точке S; точка M_1, первоначально совпадавшая с M, передвинется в противоположном направлении; радиус M_1I_1 окружности (C_1) увеличится, а так как точка M_1 приблизится к I, то она приблизится и к (Δ). Отсюда следует, что если точка M лежит внутри (Γ), образы (Δ) и (C_1) окружностей (γ) и (C) будут иметь общие точки; значит, и окружности (γ) и (C) будут пересекаться в двух точках. В этом случае имеется, следовательно, два эллипса (E), проходящих через точку M.

Замечание. Если точка M лежит на отрезке SI, но вне (Γ), то, рассуждая аналогично, убедимся в том, что нет ни одного эллипса (E), проходящего через точку M.

3°. Две группы эллипсов (E). Если точка M расположена на (Γ) и описывает часть (Γ), расположенную между (δ) и (Δ), ее проекция H на (Δ) описывает отрезок $H'H''$ этой прямой, являющейся проекцией на (Δ) окружности (Γ). Точка K описывает, следовательно, на (γ) ее половину $K'K''$, расположенную по отношению к медиатрисе SS' с той же стороны, что и S'. Соответствующий фокус F эллипса (E) описывает эту дугу $K'S'K''$ окружности (γ); этот эллипс имеет с окружностью (Γ) общую точку M и ей симметричную относительно (δ). Если же фокус F расположен на дуге $K'SK''$ окружности (Γ), то точке F не будет соответствовать ни одна точка M окружности (Γ), соответствующий эллипс (E) не будет иметь с окружностью (Γ) ни одной общей точки (фокус эллипса, проходящего через любую точку окружности (Γ), лежит на дуге $K'S'K''$). Для данного положения точки F на (γ) эксцентриситет эллипса (E) равен $e = \frac{SE}{SS'}$; он имеет значение, равное $\frac{1}{\sqrt{2}}$, если точка F совпадает с K' или с K''; $\frac{1}{\sqrt{2}} < e < 1$, если F лежит на дуге $K'S'K''$, иначе — если эллипс (E) принадлежит первой группе; $0 < e < \frac{1}{\sqrt{2}}$, если точка F лежит на дуге $K'SK''$, иначе — если эллипс (E) принадлежит второй группе.

4°. Эллипсы первой группы, проходящие через данную точку M. Пусть M — данная точка, лежащая внутри (Γ), M' — ей симметричная относительно (δ); D и H — точки, в которых прямая MM' пересекает (δ) и (Δ), а M_0 и M_0' — точки, в которых прямая MM' пересекает (Γ). Фокусы F эллипсов (E), проходящих через точку M (следовательно, и через M'), должны лежать на окружности (γ) и на окружности (C'), являющейся геометрическим местом фокусов F эллипсов с директрисой (Δ); эти эллипсы проходят через точки M и M'. Эта окружность (C') имеет концами одного из своих диаметров точку H и точку H', гармонически ей сопряженную относительно M и M'. Если точка M совпадает с M_0, то мы уже видели, что ей соответствует (2°, случай I) только один фокус F эллипса (E), лежащий на окружности (γ); соответствующую окружность (C') обозначим через (C_0') — она касается (Δ) и (γ) и ее центр находится правее середины DH (ближе к H), ибо точка F_0 касания (C_0') и (γ) лежит на дуге $K'S'K''$. Если точка M расположена между D и M_0, точка H', гармонически сопряженная точке H относительно M и M', расположена между D и H_0'. В самом деле, $DH \cdot DH' = DM^2$ и $DH \cdot DH_0' = DM_0^2$, откуда в силу $DM < DM_0$ находим $DH' < DH_0'$. Окружность (C') окружает, следовательно, окружность (C_0'); она пересекает поэтому окружность (γ) в двух точках по одну и по другую сторону от F_0. Одна из этих точек расположена на дуге F_0S'; соответствующий эллипс принадлежит поэтому первой группе. Таким образом, через каждую точку, лежащую внутри окружности (Γ), проходит по крайней мере один эллипс первой группы.

96. 1°. Геометрическое место точек I, H и H'. Геометрическое место точек I есть окружность с диаметром OB; геометрические места точек H и H' — окружности (H) и (H') с диаметрами AB и $A'B$.

2°. $\triangle OHH'$ остается подобным фиксированному треугольнику. Обозначим через ω и ω' центры окружностей (H) и (H'). Точки H, H' и B лежат на одной прямой; следовательно, поворот вокруг точки O, при котором окружность (H) совпадает с (H'), переведет точку H в точку H'. Отсюда следует, что $\triangle OHH' \sim \triangle O\omega\omega'$.

Геометрическое место точек пересечения медиан треугольника OHH'. $HI = IH'$, $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$ (G — точка пересечения медиан треугольника OHH'); значит, геометрическое место точек G есть окружность, получающаяся из окружности (I) гомотетией $\left(O, \frac{2}{3}\right)$.

3°. Вычисление AH и $A'H'$. Обозначим через $z'Oz$ ось, проходящую через точку O, положительное направление которой дается вектором $\overrightarrow{OI}$. Через $\overline{AH}$ и $\overline{A'H'}$ обозначим алгебраические проекции векторов $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{A'H'}$ на эту ось. Проектируя равенства $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{A'H'}=\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH'}$ на ось $z'z$, получим: $\overline{AH}=-a\cos\alpha+b\sin\alpha$, $\overline{A'H'}=a\cos\alpha+b\sin\alpha$. В силу условий задачи, $\overline{A'H'}>0$; значит, $AH=|-a\cos\alpha+b\sin\alpha|$, $A'H'=a\cos\alpha+b\sin\alpha$. Если $\operatorname{tg}\alpha<\frac{a}{b}$, то $AH=a\cos\alpha-b\sin\alpha$, а если $\operatorname{tg}\alpha>\frac{a}{b}$, то $AH=b\sin\alpha-a\cos\alpha$. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$ [т. е. (D) проходит через A], то $AH=0$.

4°. Вычисление α, для которого $\frac{AH}{A'H'}=k$, $0<k<1$.

а) (D) пересекает Ox между O и A. В этом случае

$$\frac{a\cos\alpha-b\sin\alpha}{a\cos\alpha+b\sin\alpha}=k, \tag{1}$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\,\frac{1-k}{1+k}$ и есть лишь один угол α_1, такой, что $\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{a}{b}$ и $0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$.

б) (D) пересекает Ox вне A. В этом случае $\frac{b\sin\alpha-a\cos\alpha}{a\cos\alpha+b\sin\alpha}=k$. Это уравнение имеет лишь одно решение α_2 такое, что $\operatorname{tg}\alpha_2>\frac{a}{b}$ и $0<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$, а именно: $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{a}{b}\,\frac{1+k}{1-k}$.

Изучение пучка (BA', BA, D_1, D_2). Обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения (D_1) и (D_2) с Ox. Тогда $\overline{OM_1}=OB\operatorname{tg}\alpha_1=a\frac{1-k}{1+k}$, $\overline{OM_2}=OB\operatorname{tg}\alpha_2=a\frac{1+k}{1-k}$. Значит $\overline{OM_1}\cdot\overline{OM_2}=a^2$, (A', A, M_1, M_2) — гармоническая четверка, так же как рассматриваемый пучок [если $a=b$, то $A'\widehat{B}A=90°$, а BA' и BA — биссектрисы углов между прямыми (D_1) и (D_2)].

Геометрическое решение. Пусть M — точка пересечения (D) и Ox. Тогда $\frac{MA}{MA'}=\frac{AH}{A'H'}=k$; но есть две точки, делящие отрезок AA' в отношении k; одна из них лежит между A' и A (точнее между O и A, ибо $0<k<1$), другая — за A.

97. 1°. а) Точки, общие (P) и (Δ). Парабола (P) есть геометрическое место центров окружностей, проходящих через F и касающихся (D). Прямая (Δ) может быть рассматриваема как геометрическое место центров окружностей, проходящих через F и касающихся в этой точке F прямой $FI\perp(\Delta)$ [будем считать, что точка I лежит на (D)]. Таким образом, точки пересечения параболы (P) с прямой (Δ) суть центры окружностей, касающихся (D) и касающихся FI в точке F. Таких окружностей две; для их построения на прямой (D) от точки I отложим отрезки $IH_1=IH_2=IF$ и в точках H_1 и H_2 восставим перпендикуляры к (D); точки пересечения этих перпендикуляров с (Δ) и будут M_1 и M_2.

б) Свойство точки G. Точки F и G — центры гомотетии окружностей (M_1) и (M_2), и, значит, эти точки гармонически сопряжены с точками M_1 и M_2.

2°. а) Свойства окружности (C). Очевидно, $\angle M_1IM_2=90°$; значит, окружность с диаметром M_1M_2 проходит через I, а так как к тому же $MI\perp(D)$, то она и касается (D).

б) Свойства окружности с диаметром FG. Эта окружность один из диаметров окружности (C) делит гармонически, а потому она ортогональна (C).

С другой стороны, пусть K — проекция F на (D); четверка точек H_1, H_2, G, K гармоническая, и потому окружность с диаметром FG, которая проходит через K и делит гармонически диаметр H_1H_2 окружности (Γ), будет ортогональна (Γ).

Замечание. Центр ω окружности с диаметром FG имеет по отношению к окружностям (C) и (Γ) степень, равную $\left(\frac{FG}{2}\right)^2$, и, значит, ω лежит на радикальной оси окружностей (C) и (Γ). Эта радикальная ось перпендикулярна линии центров окружностей (C) и (Γ) и, значит, параллельна (D), а так как ω — середина FG, то радикальная ось (C) и (Γ) проходит через середину S отрезка FK. Таким образом, радикальная ось (Γ) и (C) есть касательная к параболе (P) в ее вершине S.

в) **Степень точки S относительно (C).** Так как точка S лежит на радикальной оси окружностей (C) и (Γ), то ее степень относительно (C) равна ее степени относительно (Γ), т. е. $IS^2-IF^2=(KS^2+KI^2)-(KF^2+KI^2)=KS^2-KF^2=-\frac{3}{4}p^2$ (p — параметр параболы).

3°. а) **Фиксированная окружность, которой касается (C).** Окружность (C) на основании предыдущего инвариантна в инверсии $\left(S, -\frac{3}{4}p^2\right)$. Но окружность (C) касается фиксированной прямой (D); значит, она же касается фиксированной окружности (D'), полученной из (D) инверсией $\left(S, -\frac{3}{4}p^2\right)$; (D') — это окружность, проходящая через S, а точка, диаметрально противоположная S на (D'), есть точка K', полученная из K указанной инверсией $\left(SK'=\frac{3p}{2}\right)$; эта точка K' симметрична точке K относительно F. Точка касания есть образ I' точки I в той же инверсии.

б) **Геометрическое место точек M.** Пусть Ω и r — центр и радиус окружности (D'). Окружность с центром M, которая проходит через Ω, имеет радиус, равный $MI=r$, и, значит, она касается прямой (D_1), параллельной (D) и отстоящей от (D) на расстоянии r [по ту же сторону от (D), где лежит F]. Значит точка M расположена на параболе с фокусом Ω и директрисой (D_1). Так как I описывает (D) в целом, то M описывает эту параболу в целом. Так как $r=\frac{SK'}{2}=\frac{3p}{2}$, то прямая (D_1) — медиатриса отрезка SF.

98. 1°. **Огибающая поляр (D) точки M относительно (O).** Основание поляры (D) точки M относительно окружности (O) есть точка H прямой OM, определяемая условием $\overline{OM}\cdot\overline{OH}=R^2$. Значит, точка H есть образ M в инверсии (O, R^2). Геометрическое место точек H есть, следовательно, образ окружности (C) в инверсии (O, R^2). Если $\rho\neq R$, то окружность (C) не проходит через полюс инверсии; ее образ в инверсии (O, R^2) есть окружность (C'). Прямая (D), будучи перпендикулярна OH в точке H, будет иметь огибающей линию второго порядка (Γ) с фокусом O, для которой (C') — главная окружность. Пусть α и β — точки, в которых окружность (C) пересекает прямую OA, α' и β' — образы точек α и β в инверсии (O, R^2). Точки α и α' расположены по одну сторону от точки O; то же и относительно точек β и β'. Отсюда следует, что если окружность (C) не окружает точку O ($\rho<R$), то (C') также не окружает O и, значит, (Γ) — гипербола. Если (C) окружает O ($\rho>R$), то и (C') окружает O и (Γ) — эллипс. Если $\rho=R$, то окружность (C) проходит через полюс инверсии; ее образ в инверсии (O, R^2) есть прямая (медиатриса OA). Огибающая (D) в этом случае — парабола с фокусом O, для которой медиатриса отрезка OA будет касательной к вершине; директриса этой параболы есть прямая (Δ), перпендикулярная OA в точке A. Если $\rho\neq R$, то основание директрисы, соответствующей фокусу O, гармонически сопряжено с O относительно α' и β'. Но точка A, середина $\alpha\beta$, гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой OA относительно α и β, а значит в силу сохранения гармонизма при инверсии точка O (образ бесконечно удаленной точки) гармонически сопряжена с точкой A (образ точки A совпадает с ней самой) относительно α' и β'. Значит основание директрисы, соответствующей фокусу O, есть A, а значит сама директриса есть перпендикуляр (Δ) к OA в точке A; прямая (Δ) есть касательная к (O) в точке (A) [выше мы видели, что если $\rho=R$, то (Γ) — парабола, а эта прямая (Δ) является ее директрисой]. Для вычисления эксцентриситета (Γ) достаточно подсчитать отношение расстояний одной из точки линии (Γ) до точки O и до прямой (Δ). Возьмем точку β', которая является вершиной (Γ). Пусть β — точка, в которой пересекает окружность (C) продолжение прямой OA за точку A. Точка β' расположена между O и A и, значит,

$$e=\frac{\beta' O}{\beta' A}=\frac{O\beta'}{OA-O\beta'}=\frac{\frac{R^2}{O\beta}}{R-\frac{R^2}{O\beta}}=\frac{\frac{R^2}{R+\rho}}{R-\frac{R^2}{R+\rho}}=\frac{R}{\rho}.$$

Точки, общие линии (Γ) и окружности (O), суть точки этой окружности, отношение расстояний которых от точки O и от прямой (Δ) равно R; поэтому эти точки отстоят от (Δ) на расстоянии ρ; следовательно, они расположены на перпендикуляре к OA в точке α. Эти точки существуют, если точка α не лежит вне окружности (O), т. е. если $\rho\leqslant 2R$.

2°. **Общие касательные к линии (Γ) и окружности (O).** Для того чтобы прямая касалась (O) и (Γ), необходимо и достаточно, чтобы проекция точки O на эту прямую была расположена одновременно и на окружности (O) и на главной

окружности (C') линии (Γ). Значит имеется столько общих касательных к (O) и (Γ), сколько имеется общих точек у (O) и (C'). Но так как точки, общие окружностям (O) и (C'), являются вместе с тем точками, общими окружностям (O) и (C), то мы приходим к следующему выводу: если окружность (C) пересекает окружность (O) $(\rho < 2R)$, то существуют две общие касательные к (Γ) и (O), которые являются касательными к (O) в двух точках пересечения (C) и (O). Если (C) касается (O) $(\rho = 2R)$, то существует лишь одна общая касательная к (Γ) и (O). Если (C) не пересекает (O), т. е. $\rho > 2R$, то общих касательных у (Γ) и (O) нет. Пусть P и Q — точки прикосновения одной из общих касательных к линиям (Γ) и (O), J — точка пересечения PQ с директрисой (Δ), соответствующей фокусу O. Отрезок JP виден из точки O под прямым углом; OJ — биссектриса угла, образованного двумя касательными JA и JQ, проведенными из точки O к окружности (O); значит, OJ — биссектриса угла, образованного радиусами OA и OQ, проведенными в точки касания. Но так как $OP \perp OJ$, то OP — другая биссектриса этого угла.

Часть первая. **Прямые (D), соответствующие двум диаметрально противоположным точкам M на окружности (C).** Пусть M_1 и M_2 — две диаметрально противоположные точки на окружности (C). Прямые (D_1) и (D_2), им соответствующие, переходят при инверсии (O, R^2) в окружности, построенные на OM_1 и OM_2 как на диаметрах. Эти две окружности пересекаются в точке O и в точке I', являющейся проекцией O на M_1M_2. Геометрическим местом точек I' является, следовательно, окружность, построенная на OA как на диаметре. Точка пересечения (D_1) и (D_2) есть образ I' в инверсии (O, R^2), а геометрическое место точек I есть образ в инверсии (O, R^2) окружности, построенной на OA как на диаметре — это прямая (Δ). Наконец, прямые (D_1) и (D_2) пересекаются в точке I, лежащей на директрисе (Δ) линии (Γ), и, значит, точки P_1 и P_2 прикосновения (D_1) и (D_2) к (Γ) лежат на прямой, проведенной через O перпендикулярно OI; значит, P_1, P_2 и O лежат на одной прямой.

99. 1°. Обозначим через m_0 и m_0' положения движущихся точек в некоторый момент t_0, а через m и m' — положения этих точек в момент t [точка m лежит на окружности (C), точка m' — на окружности (C')]. В силу условия задачи (движение обеих точек с одной и той же по модулю скоростью) соответствие между положениями точек m и m' для произвольного момента времени может быть выражено соотношением $(\overrightarrow{C'm_0'}, \overrightarrow{C'm'}) + (\overrightarrow{Cm_0}, \overrightarrow{Cm}) = 0 \pmod{2\pi}$. Векторы $\overrightarrow{C'm'}$ и $\overrightarrow{Cm}$ будут иметь противоположное направление, если $(\overrightarrow{C'm'}, \overrightarrow{Cm}) = \pi \pmod{2\pi}$. Это условие (необходимое и достаточное) может быть записано и так:

$$(\overrightarrow{C'm'}, \overrightarrow{C'm_0}) + (\overrightarrow{C'm_0'}, \overrightarrow{Cm}) = \pi \pmod{2\pi},$$

или, на основании предыдущего соотношения, еще так:

$$(\overrightarrow{Cm_0}, \overrightarrow{Cm}) + (\overrightarrow{C'm_0'}, \overrightarrow{Cm}) = \pi \pmod{2\pi}. \qquad (1)$$

Произведем перенос $\overrightarrow{C'C}$. Векторы $\overrightarrow{C'm'}$ и $\overrightarrow{C'm_0'}$ займут новое положение. Обозначим через $\overline{X}$ вектор, идущий по биссектрисе угла, образованного $\overrightarrow{Cm_0}$ и перенесенного вектора $\overrightarrow{C'm_0'}$; тогда $(\overrightarrow{Cm_0}, \overrightarrow{Cm}) + (\overrightarrow{C'm_0'}, \overrightarrow{Cm}) = 2(\overline{X}, \overrightarrow{Cm})$ *, $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ и, значит, необходимое и достаточное условие того, что векторы $\overrightarrow{Cm}$ и $\overrightarrow{C'm'}$ будут противоположно направлены, запишется так:

$$(\overline{X}, \overrightarrow{Cm}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}. \qquad (2)$$

Это равенство показывает, что направление вектора $\overrightarrow{Cn}$ $(Cn = Cm_0)$ получается из $\overline{X}$ поворотом последнего на угол $+\frac{\pi}{2}$. Таким образом, находим одно решение: $\overrightarrow{C'n'} = -\overrightarrow{Cn}$. Так как равенство (2) выполнено по модулю π, то другое решение (а вместе с тем и все решения) получится поворотом $\overline{X}$ на угол $-\frac{\pi}{2}$. При этом мы получим вектор $\overrightarrow{Cv} = -\overrightarrow{Cu}$ и опять $\overrightarrow{C'v'} = -\overrightarrow{Cv}$. Из этих соотношений следует

* Формула аналогична формуле $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ для абсциссы середины $M(x)$ отрезка M_1M_2 с концами $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$.

$\overrightarrow{uv}+\overrightarrow{u'v'}=\overrightarrow{uC}+\overrightarrow{Cv}+\overrightarrow{u'C'}+\overrightarrow{C'v'}=\overrightarrow{uC}+\overrightarrow{Cv}+\overrightarrow{Cu}-\overrightarrow{Cv}=0$; следовательно, векторы $\overrightarrow{uv}$ и $\overrightarrow{u'v'}$ имеют противоположное направление. Обозначим через $x'x$ перпендикуляр, опущенный из O на uv; буквой G обозначим точку, симметричную точке O относительно uv.

2°. Теперь соотношение между m и m' может быть записано так:

$$(\overrightarrow{Cn},\ \overrightarrow{Cm})+(\overrightarrow{C'n'},\ \overrightarrow{C'm'})=0\ (\mathrm{mod}\,2\pi). \qquad (3)$$

Рассмотрим частный случай, когда O и G совпадают. Точка G симметрична точке O относительно прямой uv; эти точки могут совпадать тогда и только тогда, когда точка O лежит на прямой uv; но прямая uv проходит через C, значит, прямая uv проходит и через O; центр C' симметричен C относительно O, а $\overrightarrow{u'v'}$ имеет направление, противоположное $\overrightarrow{uv}$ и лежит на прямой, проходящей через C'; значит, все точки u, v, C, u', v', C' лежат на одной прямой; к ней перпендикулярна прямая $x'x$; окружности (C) и (C') симметричны относительно $x'x$. Из соотношения (3) в этом случае следует, что точки m и m' симметричны относительно $x'x$. Медиатриса mm' совпадает с $x'x$; если, однако, окружности (C) и (C') пересекаются в точках A и B, то в то время как точка m будет в A, там же будет и точка m' и в качестве их медиатрисы можно рассматривать любую прямую, проходящую через A (а также и любую прямую, проходящую через B). Рассмотренный частный случай мы исключим из всего дальнейшего рассмотрения, т. е. будем считать, что uv не проходит через O, т. е. что точки O и G различны. Назовем через (C'') и m'' окружность и точку, симметричную окружности (C') и точке m относительно $x'x$. Обозначим через H точку пересечения $x'x$ и uv. Тогда $\overrightarrow{C''C'}=2\overrightarrow{HO}$, и так как H — середина GO, то $2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{C''C'}$. Отсюда следует, что перенос $\overrightarrow{GO}$ переводит окружность (C'') в окружность (C'). При симметрии в $x'x$ вектор $\overrightarrow{Cu}$ переходит в вектор $\overrightarrow{C''u''}=-\overrightarrow{Cu}$, но $-\overrightarrow{Cu}=\overrightarrow{Cu'}$, значит $\overrightarrow{C''u''}=\overrightarrow{Cu'}$, потому при переносе $\overrightarrow{GO}$ $(=\overrightarrow{C''C'})$ точка u'' перейдет в u'. Далее, $(\overrightarrow{C'u'},\ \overrightarrow{C'm'})=(\overrightarrow{C''u''},\ \overrightarrow{C''m''})\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$, а так как $\overrightarrow{C'u'}=\overrightarrow{C''u''}$ и $|\overrightarrow{C'm'}|=|\overrightarrow{C''m''}|$, то и $\overrightarrow{C'm'}=\overrightarrow{C''m''}$. Отсюда следует, что перенос $\overrightarrow{GO}$ точку m'' переведет в m'. Итак, от окружности (C) можно перейти к (C'), и при этом переходе точка m перейдет в соответствующую точку m', производя симметрию в оси $x'x$ и перенос $\overrightarrow{GO}$ (в любом порядке).

3°. Пусть p'' — точка, симметричная p относительно $x'x$; перенос $\overrightarrow{GO}$ переводит ее в p', так что $\overrightarrow{p''p'}=\overrightarrow{GO}$; пусть p''' — образ p при переносе $\overrightarrow{GO}$; тогда $\overrightarrow{p'''p}=\overrightarrow{GO}$. Из соотношения $\overrightarrow{p''p'}=\overrightarrow{p'''p}$ и того, что p и p'' симметричны относительно оси $x'x$, следует, что $pp''p'p'''$ — прямоугольник. Значит A^{-1} есть произведение симметрии в оси $x'x$ на перенос $\overrightarrow{OG}$. Середина p' отрезка pp' лежит на $x'x$. Для того чтобы p и p' совпадали, необходимо, чтобы p лежала на оси Ox; но если p лежит на оси $x'x$, то она переходит в другую точку p' $(\overrightarrow{GO}\neq 0)$; значит, преобразование A не имеет неподвижных точек. Прямая uv не играет роли в определении преобразования A среди прямых, перпендикулярных $x'x$. Тем не менее обозначим через S_{uv}, S_O, S_G, S_H симметрии в оси uv и относительно точек O, G, H. Так как $\overrightarrow{GO}=2\overrightarrow{GH}$, то перенос T, определяемый вектором $\overrightarrow{GO}$, можно представить в виде $T=S_HS_G$ (достаточно проверить для двух точек!), а симметрию Σ в оси $x'x$ — в виде $\Sigma=S_{uv}S_H=S_HS_{uv}$ (достаточно проверить для двух точек). Значит $A=\Sigma T=S_{uv}S_HS_HS_G=S_{uv}S_G\ (S_H^2=1)$. С другой стороны, $T=S_OS_H$ и, значит, $A=S_OS_HS_HS_{uv}=S_OS_{uv}$. Пусть q — точка, симметричная p' относительно uv, а q' — образ q в преобразовании A. Так как S_{uv} переводит q в p', то из $A=S_{uv}S_G$ следует, что $S_G=S_{uv}A\ (S_{uv}^2=1)$, а потому S_G переводит p в q (A переводит p в p', затем S_{uv} точку p' переводит в q); значит, p и q симметричны относительно G. С другой стороны, из $A=S_OS_{uv}$ следует $S_O=AS_{uv}$; S_{uv} точку p' переводит в q, а затем A переводит q в q'; значит, преобразование S_O точку q переводит в q', т. е. q и q' симметричны относительно O.

4°. Обозначим через p прообраз p' в преобразовании A. Если m — какая-нибудь точка (C), а m' — ее образ в преобразовании A, то $pm=p'm'$. Необходимое и

достаточное условие того, что медиатриса отрезка mm' проходит через p', имеет вид $p'm = p'm'$ или $pm = p'm$; значит, точка m есть точка пересечения окружности (C) с медиатрисой отрезка pp'. Пусть, например, p' совпадает с O, тогда p совпадает с G, медиатриса OG есть uv; искомые точки u и v, а искомые прямые (D), проходящие через O, суть медиатрисы (U) и (V) отрезков uu' и vv' (впрочем, это и так ясно).

5°. Две прямые (D) могут быть параллельны тогда и только тогда, когда параллельны соответствующие им прямые mm'; но так как составляющая вектора $\overrightarrow{mm'}$ по оси $x'x$ есть $\overrightarrow{GO}$, то параллельность двух прямых (D) возможна лишь в случае равенства соответствующих им векторов $\overrightarrow{mm'}$. Но середина mm' лежит на оси $x'x$; следовательно, точки m, соответствующие параллельным между собою прямым (D), должны лежать на прямой, параллельной $x'x$. Но на прямых, проходящих через u и через v параллельно $x'x$, есть только по одной точке окружности (C); значит, прямая (D), отличная от (U) и (V), пересекает обе эти прямые; обозначим точки пересечения соответственно через λ' и μ'; пусть λ и μ — прообразы λ' и μ' в преобразовании A. Рассмотрим прямые (D), проходящие через λ' [это (U) и $\lambda'\mu'$]. На основании предыдущего медиатриса $\lambda\lambda'$ проходит и через m и через u, т. е. эта медиатриса есть mu. Аналогично медиатриса $\mu\mu'$ есть vm. Если λ_1 — середина $\lambda\lambda'$, а μ_1 — середина $\mu\mu'$, то um совпадает с $u\lambda_1$, а vm — с $v\mu_1$. Рассмотрим окружность с диаметром $u\lambda'$, которая проходит через O, ибо $(U) \perp Ou$; она пройдет и через λ_1. Аналогично окружность с диаметром $v\mu'$ проходит через O и μ_1. Значит $(uO, u\lambda') = (\lambda_1 O, \lambda_1\lambda')$ $(\mathrm{mod}\,\pi)$, $(\mu O, \mu' v) = (\mu_1 O, \mu_1 v)$ $(\mathrm{mod}\,\pi)$. Так как $\lambda_1 O$ и $\mu_1 O$ совпадают с $x'x$, а $\lambda_1\lambda'$ и $\mu_1 v$ совпадают с vm ($vm \perp um$, $um \perp \lambda\lambda'$), то $(Ou, u\lambda') = (\mu' O, \mu' v)$ $(\mathrm{mod}\,\pi)$. Из этого соотношения следует, что углы $(Ou\lambda')$ и $(O\mu' v)$ или равны, или дополнительные. Но так как это острые углы прямоугольных треугольников ($\angle\, uO\lambda' = \angle\, vO\mu' = 90°$), то они равны, а соответствующие треугольники $uO\lambda'$ и $\mu' Ov$ подобны и одинаково ориентированы, отсюда $\dfrac{O\lambda'}{Ou} = \dfrac{Ov}{O\mu'}$ и, значит, $O\lambda' \cdot O\mu' = Ou \cdot Ov$. Назовем далее через $X'OX$ биссектрису угла, на сторонах которого лежат векторы $\overrightarrow{Ou}$ и $\overrightarrow{Ov}$; эта прямая $X'OX$ фиксирована, и мы имеем $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Ou}) + (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Ov}) = 0$ $(\mathrm{mod}\,2\pi)$. Но так как $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{O\lambda'}) + (\overrightarrow{Ov}, \overrightarrow{O\mu'}) = 0$ $(\mathrm{mod}\,2\pi)$, то, складывая, получим $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\lambda'}) + (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\mu'}) = 0$ $(\mathrm{mod}\,2\pi)$, откуда и следует, что $X'OX$ — также биссектриса угла, образованного полупрямыми, выходящими из точки O, на которых лежат векторы $\overrightarrow{O\lambda'}$ и $\overrightarrow{O\mu'}$.

6°. Отложим на $X'OX$ от точки O векторы $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OF'}$ в противоположных направлениях и таких, что $OF = OF' = \sqrt{Ou \cdot Ov}$. Точки F и F' фиксированы. Пусть $Y'OY$ — медиатриса отрезка FF'. Обозначим через μ'' точку, симметричную точке μ' относительно $Y'OY$; полупрямые $O\lambda'$ и $O\mu''$ имеют прямопротивоположное направление, а потому $O\lambda' \cdot O\mu'' = O\lambda' \cdot O\mu' = \overline{OF}^2$; точнее: $\overline{O\lambda'} \cdot \overline{O\mu''} = -\overline{OF}^2 = -\overline{OF} \cdot \overline{OF'}$; отсюда следует, что точки λ', μ'', F, F' лежат на одной окружности; $Y'OY$ — ось симметрии этой окружности; эта окружность проходит и через μ'; точки λ' и μ' расположены по разные стороны от FF' (ибо FF' — биссектриса $\angle\, \lambda' O\mu'$). Обратно: если λ_0' — точка (U), μ_0' — точка (V) и если λ_0' и μ_0' лежат по разные стороны от прямой FF' и точки F, F', λ_0', μ_0' лежат на одной окружности, то $\lambda_0'\mu_0'$ — прямая (D); в самом деле, через точку λ_0' проходят две прямые (D); одна из них есть (U). Пусть другая пересекает (V) в точке μ_0''. Окружность $(FF'\lambda_0')$, по условию, проходит через μ_0'', лежащую на прямой (V) и по другую сторону от FF' по отношению к точке λ_0'. Но $O\mu_0'$ пересекает эту окружность также в точке μ_0'; значит μ_0' совпадает с μ_0'' и $\lambda_0'\mu_0'$ есть прямая (D).

7°. Огибающая будет гипербола с асимптотами (U) и (V) и фокусами F' и F; это следует из соотношения $O\lambda' \cdot O\mu' = Ou \cdot Ov = OF^2$. Вершины этой гиперболы — проекции на $X'OX$ точек пересечения окружности, построенной на $F'F$ как на диаметре с асимптотами (U) и (V).

Часть вторая. 1°. Существуют две касательные к гиперболе (H), проходящие через точку a'. Пусть b' и c' — точки, в которых эти касательные вторично пересекают окружность (C). Построение прямых $a'b'$ и $a'c'$, на основании I, 4°, таково: это прямые (D), проходящие через точку a'. Пусть a — прообраз a' в преобразовании A и пусть медиатриса отрезка aa' пересекает (C) в точках β и γ. Преобразование A переводит точки β и γ в β' и γ', лежащие на

окружности (C'); прямая $a'c'$ — медиатриса отрезка $\beta\beta'$, а прямая $a'b'$ — медиатриса отрезка $\gamma\gamma'$. Пусть далее β_1 и γ_1 — середины $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$, a_1 — середина aa' (β_1, γ_1 и a_1 лежат на $x'x$). Точки a_1 и γ_1 — вершины прямых углов $a'a_1\gamma$ и $a'\gamma_1\gamma$, стороны которых проходят через a' и γ. Эти точки лежат, следовательно, на окружности с диаметром $a'\gamma$. Поэтому прямые $a'\gamma$ и $a_1\gamma_1$ (или $x'x$) одинаково наклонены к прямым $a_1\gamma_1$ и $a_1\gamma$. Иначе говоря: прямые $a'\gamma$ и $x'x$ одинаково наклонены к $a'b'$ (которая является медиатрисой $a'\gamma_1$ отрезка $\gamma\gamma'$) и к $\beta\gamma$. Но a', b', β, γ лежат на окружности (C). Поэтому $a'\gamma$ и $b'\beta$ одинаково наклонены к $a'b'$ и $\beta\gamma$. Сравнение этих результатов позволяет утверждать, что $b'\beta \parallel x'x$; таким образом, точки b' и β, лежащие на окружности (C), симметричны относительно uv. Если мы заметим, что a_1 и β_1 лежат на окружности с диаметром $a'\beta$, то аналогично будет доказано, что точки c' и γ окружности (C) симметричны относительно uv.

2°. Добавим к предыдущим построениям точку α, симметричную a относительно uv, и ее образ α' в преобразовании A. На основании первой части пункта 3° заключаем, что a и α' — также симметричны относительно uv (точка p' теперь обозначена через a', точка q — через α, p — через a). Итак, точки a и α' симметричны относительно uv так же, как и точки a' и α. Медиатриса отрезка $\alpha a'$ симметрична поэтому медиатрисе отрезка aa', а так как последняя есть $\beta\gamma$, то медиатриса отрезка $\alpha a'$ есть $b'c'$ ($b'\beta \parallel \gamma c' \parallel x'x$). Но так как α лежит на окружности (C), то $b'c'$ есть прямая (D) и, значит, касается гиперболы (H). Таким образом, стороны треугольника $a'b'c'$, вписанного в окружность (C), касаются гиперболы (H). Так как точка a' может перемещаться по окружности (C), то таких треугольников [вписанных в (C), стороны которых касаются (H)], бесконечное множество.

3°. Из первой части п. 3°, следовало, что p' и q' симметричны относительно O. Принимаем за точку p' точку a'; тогда q' будет α'; следовательно, a' и α' симметричны относительно O. Принимая за точку p' точку b', затем c', докажем, что b' и β' симметричны относительно O и что c' и γ' симметричны относительно O. Значит $\triangle a'b'c'$ симметричен треугольнику $\alpha'\beta'\gamma'$ относительно O [первый треугольник вписан в окружность (C), второй — в окружность (C')]. Далее $\gamma\gamma' \perp a'b'$, но в силу указанной симметрии $a'b' \parallel \alpha'\beta'$, значит, $\gamma\gamma'$ — высота треугольника $\alpha'\beta'\gamma'$; аналогично $\alpha a'$, $\beta\beta'$ — две другие высоты; они, следовательно, пересекаются в некоторой точке φ; точка φ есть ортоцентр треугольника $\alpha'\beta'\gamma'$. Наконец, середины α_1, β_1 и γ_1 отрезков $\alpha a'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ являются проекциями точки φ на стороны $b'c'$, $c'a'$ и $a'b'$ треугольника $a'b'c'$, вписанного в окружность (C), и так как эти точки α_1, β_1 и γ_1 лежат на одной прямой (прямая Симпсона), то точка φ лежит на окружности (C); точка φ', симметричная точке φ относительно O, лежит на окружности (C') и является ортоцентром треугольника $a'b'c'$.

100. 1°. Геометрическое место точек H. Основание H поляры точки A относительно окружности (ω) определяется на прямой ωA следующим соотношением, в котором ρ есть радиус (ω): $\overline{\omega A}\cdot\overline{\omega H}=\rho^2$; но $\rho=\frac{1}{2}\omega A$, поэтому $\overline{\omega A}\cdot\overline{\omega A}=\frac{1}{4}\overline{\omega A^2}$ и, следовательно, $\overline{\omega H}=\frac{1}{4}\overline{\omega A}$. Отсюда следует, что точка H из точки ω получается гомотетией $\left(A, \frac{3}{4}\right)$, а геометрическое место точек H из геометрического места точек ω получается указанной гомотетией. Это, следовательно, полуокружность, построенная на AE как на диаметре, где $\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AB}$, $AE=\frac{3}{4}R$. Пусть C — центр окружности, построенной на AE как на диаметре, а (C) — сама эта окружность.

Свойства окружностей (ω). Точки A и H делят гармонически тот диаметр $\alpha\beta$ окружности (C), который лежит на прямой ωA. Значит (C) и (ω) ортогональны. Итак, все окружности (ω) ортогональны окружности (C).

2°. Изучение двух пересекающихся окружностей (ω). Пусть (ω_1) и (ω_2) — две окружности семейства (ω), пересекающиеся в точках M и N. Так как окружность (C) ортогональна каждой из них, то ее центр C имеет одинаковую степень относительно обеих этих окружностей, равную квадрату радиуса (C); значит, центр C лежит на радикальной оси MN окружностей (ω_1) и (ω_2) и $\overline{CM}\cdot\overline{CN}=\overline{CA}^2$, отсюда следует, что окружность (MNA) касается CA в точке A. Прямая MN есть перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую $\omega_1\omega_2$. Если ω_2 стремится к ω_1, то прямая $\omega_1\omega_2$ стремится к касательной, проведенной к полуокружности (Γ) в точке ω_1, а прямая MN стремится к перпендикуляру, опущенному из C на эту касательную. Точки m и n, в которых перпендикуляр, опущенный из C на касательную к (Γ) в точке ω_1, пересекает (ω_1), будут предельными положениями точек M и N. Окружность (Amn), являющаяся предельным положением окружности (AMN), так же, как и эта последняя, касается CA в точке A; ее центр Ω

расположен одновременно на касательной в точке A к (Γ) — на медиатрисе mn, которая является касательной к (Γ) в точке (ω_1). Длины ΩA и $\Omega\omega_1$ равны (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки), и, значит, окружность (Amn) с центром Ω, проходящая через A, пройдет и через ω_1. Точка ω_1, расположенная на медиатрисе хорды mn окружности (Amn), есть середина дуги $\overset{\smile}{mn}$ этой окружности, поэтому $A\omega_1$ — биссектриса угла mAn.

3°. Преобразование конфигурации инверсий $(A, 4R^2)$. В инверсии $(A, 4R^2)$ окружность (C) перейдет в прямую (C'), перпендикулярную AB в точке E' такой, что $\overline{AE}\cdot\overline{AE'}=4R^2$. Так как $AE=\frac{3}{4}R$, то $AE'=\frac{8R}{3}$. Всякая окружность (ω), будучи ортогональной к (C), перейдет в окружность (I), ортогональную прямой (C'), иначе говоря, в окружность с центром на этой прямой. Центр I этой окружности есть точка, в которой прямая $A\omega$ пересекает (C'); в то время как ω описывает полуокружность (Γ), эта точка I опишет полупрямую $E'y$, лежащую на прямой (C'). Пусть (ω_1) — одна из окружностей (ω). Ее центр ω_1, будучи расположен на (Γ), перейдет при инверсии в точку ω_1', расположенную на образе (Γ) в инверсии $(A, 4R^2)$, т. е. на полупрямой Bz, лежащей на касательной к (Γ) в точке B. Окружность (Amn) касается AB в точке A, поэтому она перейдет в прямую, параллельную AB и проходящую через ω_1'. Точки m и n перейдут в точки p и q, в которых Am и An пересекают эту прямую. Образ (I_1) окружности (ω_1) проходит через эти точки p и q, и центр I_1 окружности (I_1) есть точка, в которой прямая $A\omega_1$ пересекает $E'y$. Так как ω_1' есть основание биссектрисы угла A треугольника pAq, то $\frac{pA}{p\omega_1'}=\frac{qA}{q\omega_1'}$, а так как p из m получается инверсией $(A, 4R^2)$, то $Ap=\frac{4R^2}{Am}$. С другой стороны, так как p и ω_1' — образы m и ω_1 в инверсии $(A, 4R^2)$, то $\omega_1'p=\frac{4R^2}{A\omega_1\cdot Am}\cdot\omega_1 m$. Отсюда и из предыдущего соотношения находим $\frac{Ap}{\omega_1'\gamma}=\frac{A\omega_1}{\omega_1 m}$. Но по условию $A\omega_1=2\omega_1 m_1$, поэтому $\frac{pA}{p\omega_1'}=2$. Аналогично $\frac{qA}{q\omega_1'}=2$. Таким образом, отношения расстояний от точек p и q до точек A и ω_1' равно 2 при любом выборе окружности (ω_1). Но так как расстояния от точек p и q до точки ω_1' являются расстояниями от этих точек до прямой (Δ), то точки p и q лежат на гиперболе с фокусом A, директрисой (Δ), соответствующей этому фокусу, и эксцентриситетом 2. Если ω_1 изменяется, то ω_1' описывает луч Bz, а каждая из точек p и q — верхнюю часть ветви указанной гиперболы.

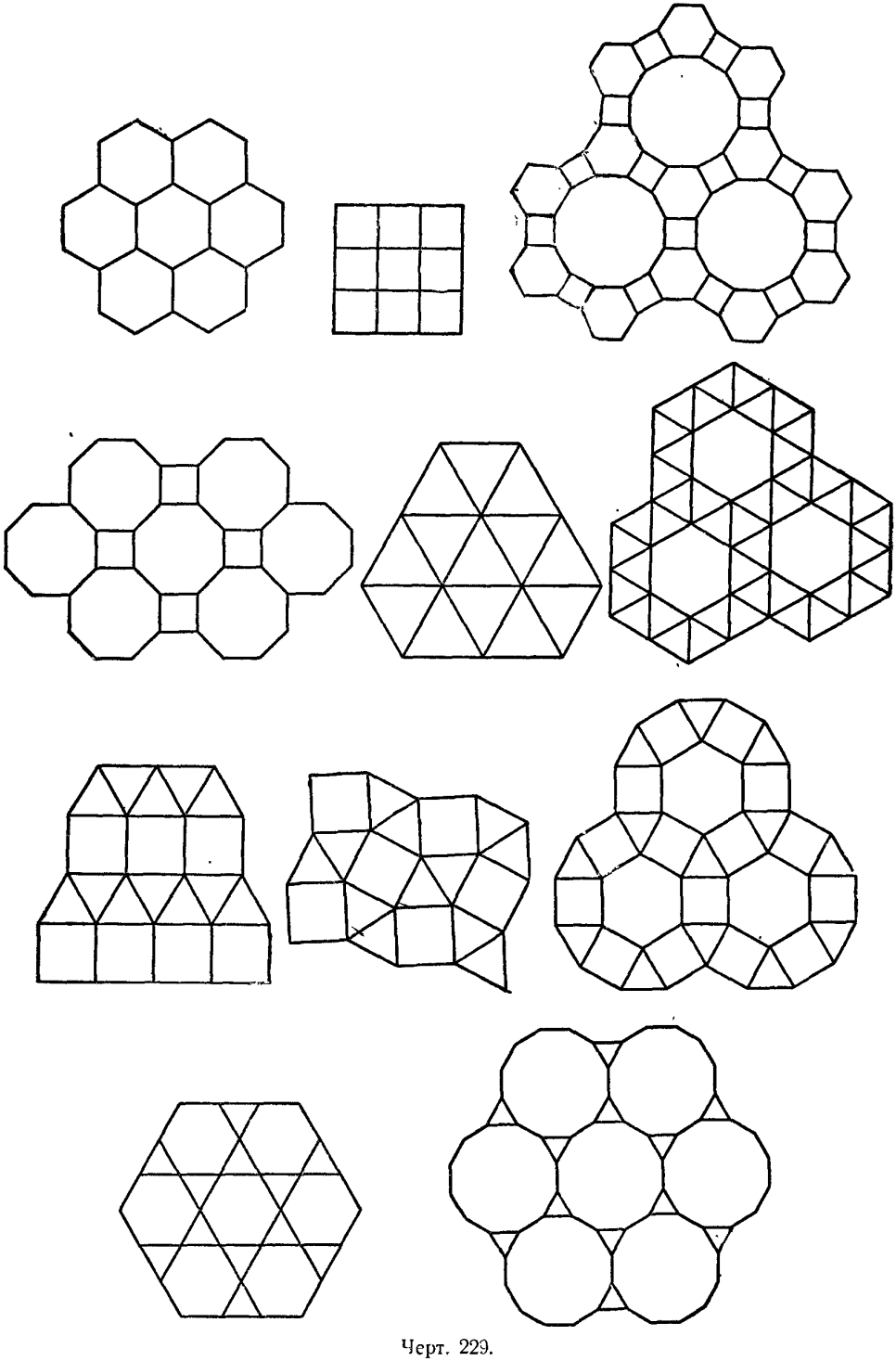
4°. Взаимное расположение (I_1) и (H). Так как точки A и ω_1' гармонически сопряжены с границами диаметра $\alpha'\beta'$ окружности (I_1), окружность $(A\omega_1'p)$ ортогональна (I_1); ее центр расположен поэтому на касательной в точке p к (I_1), и если T — точка, в которой эта касательная пересекает (Δ), то одним из диаметров окружности $(A\omega_1'p)$ является pT. Отсюда следует, что $\angle pAT=90°$. Но (Δ) — директриса, соответствующая фокусу A гиперболы (H); значит, pT — касательная к гиперболе (H) в точке p. Аналогично доказывается, что касательная к (I_1) в точке q есть и касательная в точке q к гиперболе (H). Впрочем, это следует и из того, что точки p и q симметричны относительно $E'y$, которая является мнимой осью гиперболы (H).

Раздел II. Стереометрия

Глава XXII. Задачи на вычисление

§ 1. Прямые и плоскости в пространстве

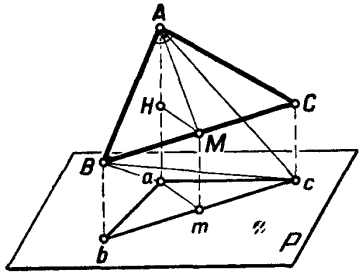
. $\frac{1}{2}(a-b\pm\sqrt{a^2-6ab+b^2})$. **2.** 15° и 75°. **3.** 60°. **4.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$. **5.** 30°. **6.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **7.** Или $a(\sqrt{3}+1)$, или $a(\sqrt{3}-1)$. **8.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\pm 1)\sqrt{b^2-a^2}$. **9.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab}$. **10.** 3. **11.** 90°. **12.** 30°, 60°, 120°, 60°.



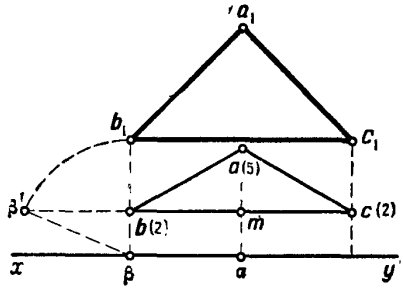
Черт. 229.
(К задаче № 12, гл. XXI)

§ 2. Треугольная пирамида

1. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 2. 6, 10, 14. 3. $\frac{ab}{a+b}$. 4. 576 *см*³. 5. $\frac{\sqrt{3}}{4}q^2\left(1+\sqrt{\frac{3(2m+n)}{n}}\right)$. 6. $\frac{\sqrt{3}\sqrt{k^2-1}}{\pi^3}$. 7. $\frac{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-m_1m_2m_3}{m_1m_2m_3}$. 8. $x:y:z$. 9. 6.

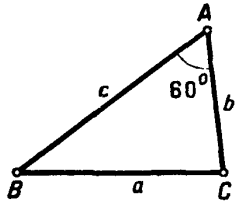


Черт. 230.

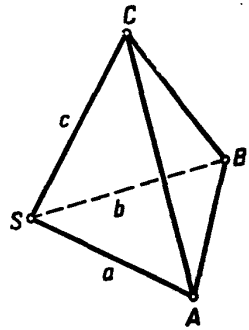


Черт. 231.

10. $\frac{2\sqrt{11}}{49}a^2$. 11. 3. 12. $4s_1+\frac{36}{25}(s_2+s_3+s_4)$. 13. 1. 15. В сечении прямоугольник со сторонами $\frac{1}{2}(a\pm 2b\sqrt{2})$; периметр $2a$, площадь $\frac{1}{4}(a^2-8b^2)$. 16. $\frac{1}{3}\sqrt{(m-a^2)(m-b^2)(m-c^2)}$, где $m=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$. 17. $\frac{21}{125}$. 18. а) $\frac{4}{9}s$; б) $\frac{1}{4}s$; в) $\frac{25}{36}s$. 19. а) $\frac{9}{16}s$; б) $\frac{1}{4}s$ или s; в) $\frac{1}{16}s$ или s. 20. 16. 21. $\frac{2}{9}v$. 22. 1°. $Aa=2+\frac{l}{\sqrt{2}}$ (см. черт. 230 и 231); треугольник ABC — прямоугольный, равнобедренный. 3°. Объем пирамиды $aBbcC$ равен $6\sqrt{3}$ *см*³; объем пирамиды $aABc$



Черт. 232.



Черт. 233.

равен $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ *см*³. 4°. Расстояние от a до плоскости ABC равно $\frac{5}{\sqrt{3}}$. 23. 1°. $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}$ (черт. 232), $s=\frac{bc\sqrt{3}}{4}$. 2°. $10a^2=b^2+c^2-bc$ (черт. 233) (1) и $2a^2+bc=a(b+c)$ (2). 3°. $10a^2=S^2-3P$, $2a^2=aS-P$, $S^2-3aS-4a^2=0$, отсюда $S=4a$, $P=2a^2$; значения b и c при условии, что $\angle BAC=90°$ и $BC=a\sqrt{10}$; $b=a(2+\sqrt{2})$, $c=a(2-\sqrt{2})$. 4°. $s=\frac{a^2}{2}(3\sqrt{3}+7)$.

§ 3. Многоугольные пирамиды

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{16h^3b^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$. 3. 1920 *см*². 4. $\frac{5}{4}s$. 5. 3 : 5. 6. $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. 7. $\frac{5a^2h}{24}$. 8. $\frac{a^2h}{6}$. 9. $\frac{5}{9}s$. 10. а) $\frac{3}{4}s$; б) $\frac{15}{16}s$ или $\frac{7}{16}s$. 11. $\frac{15}{4}$. 12. $\frac{21}{4}$ и $\frac{91}{12}$. 13. 126. 14. $\frac{s_1+s_2}{2}$.

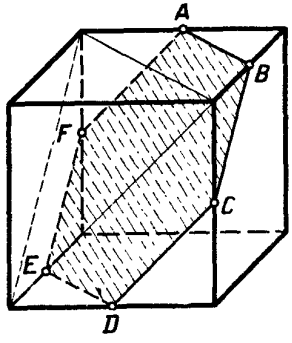
15. $\frac{q}{16}(2+\sqrt{3})\sqrt{4b^2+3q^2}$. 16. $\frac{1}{2}s$. 17. $\frac{7}{4}s$. 18. $\frac{11}{4}ab$ и $\frac{26}{9}ab$. 19. а) $\frac{5}{4}s$; б) $\frac{25}{16}s$. 20. $\frac{36}{35}Dd$. 21. а) $\frac{dl}{8}$; б) $\frac{dl}{3}$; в) $\frac{33}{12}dl$; г) $\frac{35}{96}dl$.

§ 4. Призмы

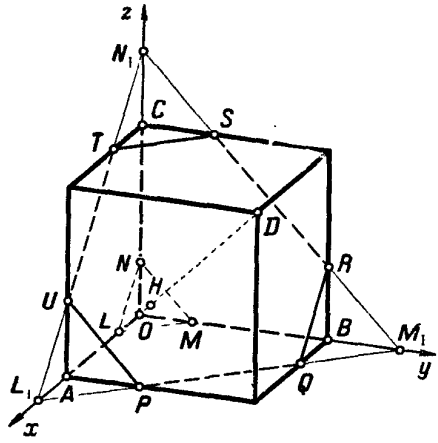
1. 17346. 2. 5:3:3:1. 3. $ab(\sqrt{2}+1)$. 5. $\frac{3}{8}$. 6. $\frac{1}{12}$. 7. а) $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$; б) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$. 8. $32(6+\sqrt{6})$. 9. 12. 10. $\frac{7}{8}a^2\sqrt{2}$. 11. $2\sqrt{2}a^3$. 12. 9. 13. 51 и 75. 14. $\frac{7}{4}s$. 15. $\frac{11}{12}s$. 16. $\frac{3}{4}v$. 17. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$. 18. а) 3. б) 1. 19. $\frac{19}{24}s$. 20. $\frac{27}{28}s$. 21. 3. 22. а) $\frac{1}{8}Dd$; б) $\frac{3}{8}Dd$; в) $\frac{5}{8}Dd$; г) $\frac{23}{32}Dd$; д) $\frac{3}{4}Dd$. 23. $\frac{11}{18}v$. 24. а) $\frac{7}{\sqrt{3}}a^3$; б) $4a^3$.

§ 5. Куб

1. $\frac{126}{65}$. 2. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 3. Приблизительно 70%. 4. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 5. Плоскость, проходящая через концы ребер, выходящих из одной и той же вершины куба, перпендикулярна его диагонали, выходящей из той же вершины, и делит ее в отношении 1:2; отсюда, между прочим, следует, что указанная в условии задачи плоскость пересекает грани куба по прямым, параллельным соответствующим диагоналям граней — это



Черт. 234.

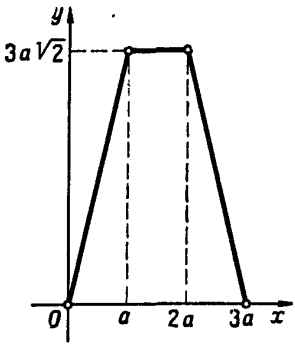


Черт. 235.

дает возможность точно построить данное сечение куба, наметив сечение AB, скажем верхней его грани (черт. 234); в сечении получается равноугольный шестиугольник (все углы 120°), противоположные стороны которого параллельны; длины меньших сторон $\frac{1}{2}a\sqrt{2}-b\sqrt{6}$, длины больших сторон $\frac{1}{2}a\sqrt{2}+b\sqrt{6}$; площадь $\frac{3\sqrt{3}}{4}(a^2-4b^2)$. 6. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 7. 1:1. 8. Плоскость должна проходить через диагональ и середину любого скрещивающегося с ней ребра. 9. $\frac{15}{16}v$. 10. $\frac{a^3}{4}$. 11. $\frac{1}{3}$. 12. $\frac{1-l}{2}a\sqrt{2}$. 13. $\frac{7}{48}$. 14. $\frac{1}{9}$ или $\frac{169}{1125}$.

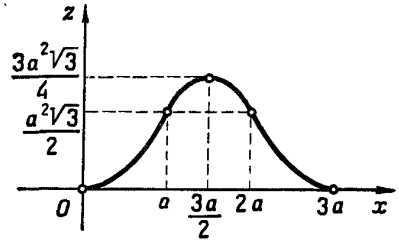
15. 1°. **Сечения куба плоскостями (П).** Пусть D—вершина куба, противоположная точке O. Рассмотрим куб с ребрами OL, OM, ON; он гомотетичен данному кубу по отношению к O; OD несет на себе диагональ этого куба, которая перпендикулярна плоскости LMN; эта последняя пересекает куб, если точка H пересечения плоскости LMN с OD лежит на отрезке OD. Находим $OH=\frac{x}{\sqrt{3}}$; отсюда:

плоскость LMN перссекает куб, если $0 < \frac{x}{\sqrt{3}} < a\sqrt{3}$ или $0 < x < 3a$; если $0 < x \leqslant a$, сечение — равносторонний треугольник LMN; если $a < x < 2a$ (это случай $L_1M_1N_1$ — на черт. 235), то сечение — шестиугольник $PQRSTU$; наконец, если $2a \leqslant x < 3a$, сечение снова — равносторонний треугольник.



Черт. 236.

2°. **Периметр сечения.** Если $0 < x \leqslant a$, $p = 3x\sqrt{2}$; если $a < x < 2a$, сечение — шестиугольник $PQRSTU$. Треугольник QM_1R равно-



Черт. 237.

сторонний, значит, $QR = RM_1$; значит, $QR + RS = SM_1 = a\sqrt{2}$, значит, периметр в этом случае равен $3a\sqrt{2}$. Наконец, если $2a \leqslant x < 3a$, $p = 3(3a - x)\sqrt{2}$. График $p = p(x)$ изображен на черт. 236 — равнобочная трапеция.

3°. **Площадь сечения.** Если $0 < x \leqslant a$, $s = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$. Если $a < x < 2a$, $s = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} - 3$ пл. $QM_1R = (-2x^2 + 6ax - 3a^2)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2$; наконец, если $2a < x < 3a$, то $s = \frac{\sqrt{3}}{2}(3a - x)^2$. График функции $s = s(x)$ состоит из дуг трех парабол (черт. 237).

§ 6. Многогранники

1. 14. 2. 13. 3. $\frac{3}{4}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$. 7. $\frac{bh}{6}(c + 2a)$. 8. $\frac{h}{6}[2(ab + cd) + ad + bc]$. 9. $\frac{ah^2}{2}$.

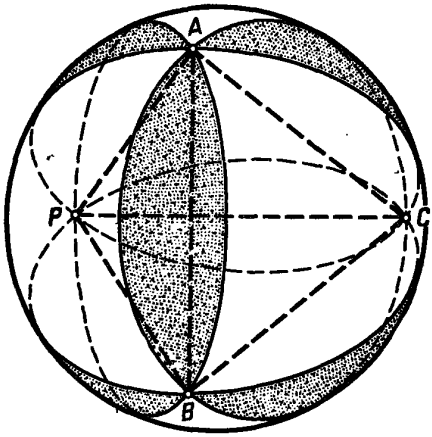
§ 7. Сфера и ее части; комбинации сфер с прямыми и плоскостями

2. $r = \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} - a^2 - b^2}}$, $h = \sqrt{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} - a^2 - b^2}$. 4. $\frac{13}{14}$. 5. $\frac{1}{5}(2A + 2B + \pi d^2)$. 6. $\frac{\frac{s}{4\pi} + a\sqrt{\frac{s}{2\pi} - R^2 - a^2}}{a + \sqrt{\frac{s}{2\pi} - R^2 - a^2}}$, $\frac{\frac{s}{4\pi} - a\sqrt{\frac{s}{2\pi} - R^2 - a^2}}{a - \sqrt{\frac{s}{2\pi} - R^2 - a^2}}$.

7. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$. 8. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 9. $\frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}r$ и $\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}r$. 10. $\frac{r}{5}(5 \pm \sqrt{13})$. 11. $\frac{r}{3}(3 \pm \sqrt{5})$. 12. $\frac{r}{12}(9 \pm \sqrt{69})$. 13. $5 + 2\sqrt{6}$. 14. $\frac{R}{3}$. 15. $r(1 + \sqrt{2})$. 16. $\frac{3 - \sqrt{3}}{4}$. 17. $\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)r$. 18. $2 \pm \sqrt{3}$. 19. $\frac{5}{7}R$. 20. $2r(3 - 2\sqrt{2})$. 21. $5 \pm \sqrt{24}$. 22. $3 \pm 2\sqrt{2}$.

§ 8. Сфера, вписанная в многогранник и описанная вокруг него

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$. 2. $\frac{3}{7}$, $\frac{12}{29}$. 3. $\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}$ см³. 4. $\frac{384}{1255}$. 5. 9. 6. 27. 7. 5. 8. 13. 9. 5. 10. 13. 11. 65. 12. 13. 13. 5. 14. $\frac{2r^2}{3}(R \pm \sqrt{R^2 - r^2})$. 15. $\frac{12}{25}$. 16. $\frac{4}{3}$. 17. $\frac{6}{5}$. 18. $\frac{45}{16}$. 19. $\frac{36}{11}$. 20. а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{2}{5}$. 21. $\frac{60}{149}$ или $\frac{60}{101}$. 22. $\frac{\pi}{12}(15 - 8\sqrt{2})$. 23. 45°. 24. $a(2 - \sqrt{2})$, $6\pi a^2(5\sqrt{2} - 7)$. 25. $\frac{4 \pm \sqrt{7}}{7} a$. 26. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} s_1 \left(1 + \sqrt{\frac{s_2}{s_1}}\right)$.

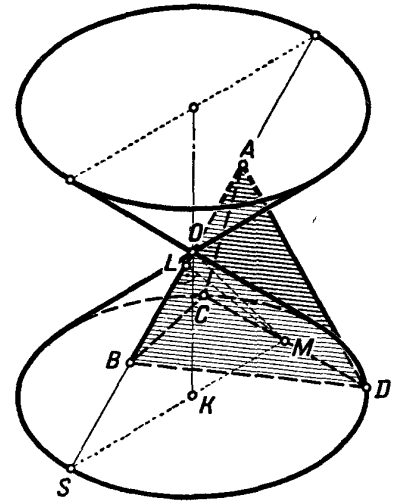


Черт. 238.

27. Пусть A, B, C — точки встречи ребер тетраэдра, выходящих из вершины P, через которую проходит сфера, с этой сферой; тогда тетраэдр $PABC$ также правильный, а сфера проходит через его вершины (описана вокруг него). Продолжим все грани тетраэдра до пересечения со сферой; тогда сфера разделится на десять частей: четыре криволинейных треугольника и шесть криволинейных двуугольников (черт. 238). Обозначая площадь каждого из таких криволинейных треугольников через x (это и есть искомая площадь), а площадь двуугольника — через y, получим $4x + 6y = s$, $x + 3y = s_1$, где $s_1 = \frac{s}{3}$ — поверхность сферического сегмента, отсекаемого от нашей сферы плоскостью какой-нибудь грани тетраэдра $PABC$. Из полученных уравнений находим: $x = \frac{s}{6}$. 28. $\frac{s}{6}$, $\frac{s}{18}$. 29. $\frac{3}{4}(6 \pm \sqrt{17})$.

§ 9. Цилиндр, конус, сфера в комбинации друг с другом, с плоскостями и многогранниками

1. $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^3$. 2. $\frac{4}{3}\pi \frac{r^3 h^3}{(r + \sqrt{r^2 + h^2})^3}$. 3. $\frac{\pi r^3}{8\sqrt{3}}$. 4. $r_{1,2} = \sqrt{\frac{s^2 \pm \sqrt{s^4 - 72 s \pi v^2}}{4\pi s}}$. 5. $\frac{2m^2}{1 + 2m}$. 6. $\frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (d - r)^2})^3}{3(d - r)^2}$, $\frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (d + r)^2})^3}{3(d + r)^2}$. 8. 60°. 9. $100\sqrt{3970} - 6300 = 780$ м. 10. $\frac{(2 - q) q^2}{4}$, $0 < q < 2$. 11. $\frac{2\pi r}{3}(r^2 + rR - R^2)$.



Черт. 239.

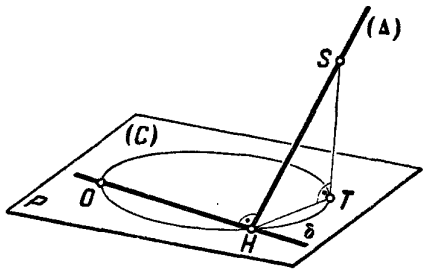
12. $\frac{\pi H (R - r)^2 (R + 2r)}{3R}$; объем вне конуса равен $\frac{2}{3}\pi r^3 \frac{H}{R}$. 13. $2\sqrt{3}$. 14. $\frac{4\pi}{3a} p(p - a)(p - b)(p - c)$, где $p = \frac{a + b + c}{2}$. 15. $\pi \sqrt{\frac{a + b}{2b}} \left(a^2 + b^2 + (a + b)\sqrt{\frac{b(b - a)}{2}}\right)$. 17. Радиус шара $\frac{R^2}{4r}$; радиус окружности прикосновения $\frac{R^3}{R^2 + 4r^2}$. 18. $\frac{\pi}{18}$. 19. $\frac{3\sqrt{3}\pi(\sqrt{2} - 1)^3}{4}$. 20. $a(3 - \sqrt{6})$. 21. $3\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$. 22. Отрезок LM, соединяющий середины ребер AB и CD тетраэдра, перпендикулярен к ним обоим, и его длина равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (черт. 239). Прове-

дем через ребро CD плоскость, перпендикулярную оси конуса. Плоскость круга сечения наклонена под углом 45° к AB; значит, $LM = LS = \frac{a}{\sqrt{2}}$, поэтому $SM = a$, а так как $CD = a$, то легко находим радиус круга рассматриваемого сечения $SK = \frac{5a}{8}$. Расстояние же от вершины O до ребра CD равно: $\sqrt{\left(\frac{5a}{8}\right)^2 + \left(\frac{3a}{8}\right)^2} = \frac{a\sqrt{34}}{8}$. **23.** $\frac{3}{8}s$. **24.** $\frac{a^2}{9}(2\pi + 3\sqrt{3})$. **25.** $\frac{a^2}{8}(\pi + 5\sqrt{3})$. **26.** $\frac{3a^2}{4}(\pi + 2)$. **27.** $\frac{8}{3}(7\pi + 6\sqrt{3})$. **28.** 6. **29.** а) $\frac{10}{3}$; б) $\frac{9}{2}$. **30.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **31.** а) $\frac{3\sqrt{3}\pi}{64}$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; в) $\frac{6\sqrt{3}\pi}{125}$; г) $\frac{18\sqrt{3}\pi}{343}$. **32.** а) 1. б) 1. **33.** $\frac{90}{37}$ и $\frac{45}{19}$. **34.** $\frac{8}{11}$. **35.** $\frac{6}{5}$. **36.** 288. **37.** а) при $\frac{1}{5} \leqslant k < 1$, $q = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{1}{k} - 1\right)$; при $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{5}$, $q = \frac{16\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{k} - 1\right)^2}$; при $k = \frac{1}{5}$, $q_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$; б) при $\frac{1}{3} \leqslant k < 1$, $q = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{k} - 1\right)$; при $0 < k \leqslant \frac{1}{3}$, $q = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{k} - 1\right)^2}$, при $k = \frac{1}{3}$, $q_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$; в) при $\frac{1}{2} \leqslant k < 1$, $q = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \left(\frac{1}{k} - 1\right)$; при $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{k} - 1\right)^2}$; при $k = \frac{1}{2}$, $q_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$. **33.** а) 1) $\frac{1}{108}$; 2) $\frac{2}{27}$; 3) $\frac{1331}{32\,000}$; 4) $\frac{27}{2048}$; 5) $\frac{61}{6912}$; б) 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{27}{250}$; 3) $\frac{729}{16\,000}$; 4) $\frac{27}{1024}$; 5) $\frac{13}{384}$. **39.** 15. **40.** $\frac{15}{11}$ или $\frac{10}{7}$. **41.** 4. **42.** $\frac{1}{4}$. **43.** а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **44.** 25. **45.** $r\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \pm 1\right)$. **46.** $r\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \pm 1\right)$. **47.** $r\left(\frac{\sqrt{17}}{4} \pm 1\right)$. **48.** а) $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pm 1\right)$. **49.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **50.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **51.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; б) $\frac{a\sqrt{22}}{16}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$, $\frac{3a\sqrt{2}}{10}$. **52.** а) $\frac{\pi}{24}$ или $\frac{\pi}{27}$; б) $\frac{\pi}{16}$. **53.** а) $\frac{\pi\sqrt{3}}{128}$ или $\frac{3\sqrt{3}\pi}{128}$; б) $\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$ или $\frac{\sqrt{3}\pi}{27}$; в) $\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$; г) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{125}$ или $\frac{6\sqrt{3}\pi}{125}$. **54.** $\sqrt{\frac{10 - \sqrt{48}}{12}}$. **55.** а) $\frac{r^3\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{r}{2}(3 \pm \sqrt{6})$. **56.** $\frac{45\sqrt{5}}{64}$. **57.** а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{5}{33}$; в) $\frac{49}{152}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{28}$. **58.** а) $\frac{22}{161}$; б) $\frac{10}{33}$; в) $\frac{18}{35}$; г) $\frac{49}{76}$. **59.** $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{5}{6}$. **60.** 45°. **61.** 4. **62.** а) 30°; б) $\sin\alpha = \frac{5}{8}$. **63.** а) $\frac{h}{5}$ или h; б) r или $5r$. **64.** а) 2 или $\frac{3}{4}$; б) $\frac{12}{5}$ или $\frac{4}{5}$. **65.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{2r_1r_2}}$. **66.** $\frac{1}{4}$. **67.** $\frac{91}{3072}$. **68.** $r_1 = \frac{3}{16}$, $r_2 = \frac{4}{43}$. **69.** Радиусы шаров, вписанных в трехгранные углы при нижнем основании призмы, равны $r_1 = \frac{12}{29}$ и $r_2 = \frac{6}{7}$, а радиусы шаров, вписанных в трехгранные углы при верхнем основании, $r_3 = \frac{12}{25}$ и $r_4 = \frac{3}{5}$.

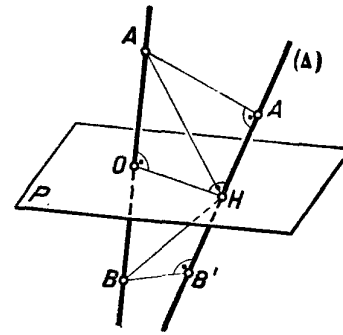
Глава XXIII. Геометрические места точек

1. Сфера. **2.** Надо построить сферу, для которой данная точка и центр данной сферы являются диаметрально противоположными точками. Множество всех точек построенной сферы, лежащих внутри данной сферы, и есть искомое множество точек — это или сферический сегмент, или сфера с выколотой точкой, или просто сфера, в зависимости от того, лежит ли данная точка вне, на, или внутри данной

сферы. **3.** а) Дуга окружности, лежащая внутри сферы, причем данная точка и центр сферы служат концами диаметра указанной окружности; б) окружность с «выколотой» точкой; «выколотая» точка есть данная точка; в) окружность. **4.** Сфера. **5.** Плоскость. **7.** Точка O—пересечения прямой AB с плоскостью p (если $AB \not\perp p$), отстоит от точки касания шара на постоянном расстоянии $d = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$. **8.** Пусть A' и B' — проекции данных точек A и B на плоскость γ, а a и b — расстояния от точек A и B до плоскости γ. Обозначим через C и C' точки, лежащие

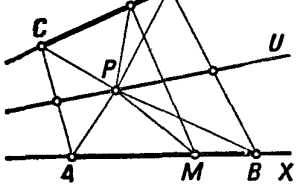


Черт. 240.



Черт. 241.

на прямой, проходящей через A' и B', и такие, что $\frac{CA'}{CB'} = \frac{C'A'}{C'B'} = \frac{a}{b}$. Тогда искомым геометрическим местом будет окружность, построенная на CC' как на диаметре. **9.** Плоскость. **10.** Прямая. **13.** Сфера радиуса $\sqrt{\overline{AM} \cdot \overline{MB}}$ с центром в точке M. **14.** 1°. Ответ: плоскость, перпендикулярная OA. 2°. Ответ: пусть δ — прямая, по которой плоскость (P) пересекается с плоскостью, проходящей через точку O, перпендикулярно заданному направлению. Искомое геометрическое место прямых (Δ) есть плоскость, проходящая через прямую δ параллельно заданному направлению (черт. 240). 3°. Пусть T — ортогональная проекция данной точки S на плоскость (P) и пусть точки T и O различны. Угол SHO проектируется на плоскость (P) в прямой угол OHT. Следовательно, точка H лежит на окружности (C), построенной на OT как на диаметре. Обратно: если точка H лежит на окружности (C), то $\angle THO = 90°$; следовательно, $\angle OHS = 90°$ и прямая SH есть прямая (Δ). Значит, геометрическим местом прямых (Δ) является конус с вершиной S, для которого окружность (C) является направляющей. Если точка T совпадает с точкой O, то SO — единственная прямая, удовлетворяющая условию. 4°. $OH \perp (\Delta)$, $AA' \perp (\Delta)$ и $BB' \perp (\Delta)$, значит, OH, AA', BB' параллельны одной и той же плоскости. Но O — середина AB, значит, H — середина $A'B'$. Далее: $\triangle AHA' = \triangle BHB'$, значит, $AA' = BB'$. 5°. Обратно: если $AA' = BB'$, то $\triangle AHA' = \triangle BHB'$, значит, $HA' = HB'$. Так как $AO : OB = A'H : HB' = 1$, то AA', BB', OH параллельны одной и той же плоскости; но AA' и BB' перпендикулярны (D), значит, и $OH \perp (D)$, т. е. (D) есть прямая (Δ) (черт. 241). **15.** Пусть I и J — соответственно середины AB и CD. Тогда

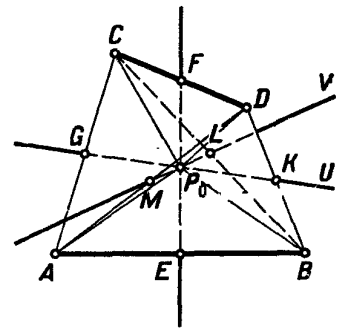


Черт. 242.

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MI}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4},\quad \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2\overline{MJ}^2 + \frac{\overline{CD}^2}{4};$$

значит, $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$ тогда и только тогда, когда $\overline{MI}^2 - \overline{MJ}^2 = \frac{\overline{CD}^2 - \overline{AB}^2}{4}$. Искомое геометрическое место есть плоскость, перпендикулярная отрезку IJ в точке H такой, что $2\overline{IJ} \cdot \overline{OH} = \frac{\overline{CD}^2 - \overline{AB}^2}{4}$. **16.** 1°. а) Геометрическое место точек P таких, что $PA = PC$ есть плоскость, (π_{AC}) — медиатриса отрезка AC. Геометрическое место точек P таких, что $PB = PD$ есть плоскость, (π_{BD}) — медиатриса BD. Так как X и Y—скрещивающиеся прямые, то AC и BD—также скрещивающиеся прямые; значит, плоскости (π_{AC}) и (π_{BD}) пересекаются по прямой U, для всех точек которой и только для них мы будем иметь одновременно $PA = PC$ и $PB = PD$ (черт. 242). б) Геометрическое место точек P таких, что $PA = PD$ и $PB = PC$ есть прямая V, по которой пересекаются плоскости (π_{AD}) и (π_{BC}) — медиатрисы

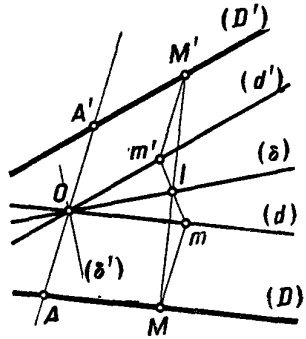
отрезков AD и BC. Прямая U пересекает плоскость (π_{AD}); в самом деле, если бы прямая U была параллельна плоскости (π_{AD}), она была бы ортогональна AD, а так как $U \perp AC$, то прямая U была бы ортогональна плоскости ACD; значит, прямая BD, которая также ортогональна U, лежала бы в плоскости ACD, что по предположению не имеет места. Пусть P_0 — точка, общая U и (π_{AD}). Тогда $P_0A = P_0D$, $P_0A = P_0C$ и $P_0B = P_0D$, значит, $P_0B = P_0C$ и, значит, точка P_0 лежит на (π_{BC}), следовательно, и на прямой V. Итак, прямые U и V пересекаются в точке P_0 такой, что $P_0A = P_0B = P_0C = P_0D$ (черт. 243). 2.° Пусть Q — какая-нибудь точка прямой U. Тогда $QA = QC$ и $QB = QD$. Так как $AB = CD$, то $\triangle QAB = \triangle QCD$, значит, и $QM = QN$, ибо NC и $MB = ND$. Значит, Q лежит на (π_{MN}); но Q — любая точка U; следовательно, (π_{MN}) проходит через U. Так как E и F — середины AB и CD, то $EA = FC$, $EB = FD$ и плоскость-медиатриса отрезка EF проходит через U. Пусть R — произвольная точка прямой V; тогда $RA = RD$ и $RB = RC$; значит, $\triangle RAB = \triangle RCD$, а медианы RE и RF этих треугольников равны между собой; значит, R лежит на плоскости-медиатрисе EF; (π_{EF}) проходит через V. Итак, (π_{EF}) есть плоскость, проходящая через U и V.



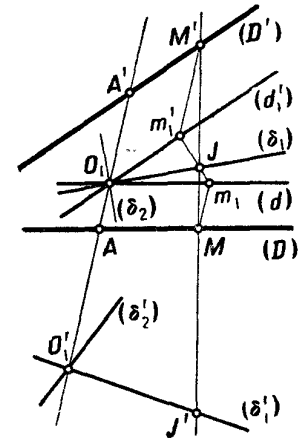
Черт. 243.

3°. Прямая U есть GK; прямая $V = LH$. Точка P_0 есть точка пересечения GK и LH и так как $GHKL$ — квадрат, то U и V пересекаются под прямым углом. Отрезки EF, GK и HL равны и пересекаются попарно под прямыми углами.

17. 1°. Геометрическое место середин I отрезка MM'. Назовем через I середину отрезка MM'; O — середина AA' (черт. 244); O принадлежит геометрическому месту. Проведем через O две прямые (d) и (d'), параллельные соответственно прямым (D) и (D'); затем через точки M и M' проведем прямые, параллельные AA', а точки пересечения этих прямых с (d) и (d') обозначим соответственно через m и m'. Так как $\overrightarrow{Mm} = \overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{m'M'} = \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{Mm} = \overrightarrow{m'M'}$. Четырехугольник $MmM'm'$, следовательно, — параллелограмм и середина I отрезка MM'



Черт. 244.



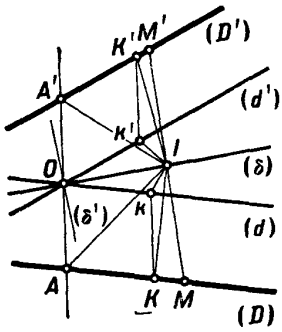
Черт. 245.

есть в то же время середина отрезка mm'; но $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{Om'} = \overrightarrow{A'M'}$, а так как $AM = A'M'$, то $Om = Om'$. Треугольник Omm' равнобедренный, прямая OI — медиана, относящаяся к стороне mm', и в то же время биссектриса угла mOm'. Обратно: если мы возьмем точку I на любой из биссектрис (δ) или (δ') угла, образованного прямыми (d) и (d') и проведем через I в их плоскости перпендикуляр к OI, то получим равнобедренный треугольник Omm'; значит, параллели AA', проведенные через m и m', пересекут (D) и (D') в точках M и M' таких, что $AM = A'M'$. Геометрическое место I середин отрезков MM' есть, следовательно, пара биссектрис (δ) и (δ') углов, которые мы получим, проводя через середину O отрезка AA' прямые (d) и (d'), параллельные (D) и (D').

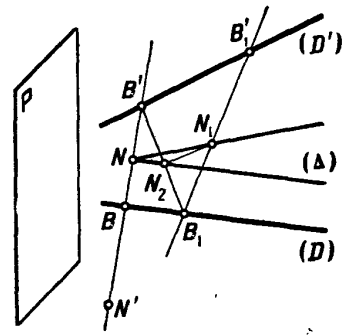
Геометрическое место точек, делящих MM' в данном отношении k. На каждом отрезке MM' существуют две точки, делящие его в отношении k:

$\frac{JM}{JM'} = \frac{J'M}{J'M'} = k$ (черт. 245). Одна из них лежит внутри отрезка MM', другая — вне этого отрезка. Мы исследуем лишь точку J, лежащую внутри MM' (исследование J' — аналогично). Пусть O_1 — точка, делящая AA' в отношении k, $\frac{O_1A}{O_1A'} = k$. Проведем через точку O_1 прямые (d_1) и (d_1'), соответственно параллельные (D) и (D'), затем через M и M' — прямые, параллельные AA', пересекающие (d_1) и (d_1') соответственно в точках m_1 и m_1'. Имеем: $\overrightarrow{M_1m_1} = \overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{m_1'M_1'} = \overrightarrow{O_1A'}$; следовательно, $\frac{Mm_1}{m_1'M'} = \frac{O_1A}{O_1A'} = k$. Четырехугольник $Mm_1M'm_1'$ — трапеция, отношение параллельных сторон которой равно k. Диагонали этой трапеции пересекаются в точке J, так как $\frac{Jm_1}{Jm_1'} = \frac{Mm_1}{m_1'M'} = k$. Так как $\overrightarrow{O_1m_1} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{O_1m_1'} = \overrightarrow{A'M'}$, то треугольник $O_1m_1m_1'$ — равнобедренный, направление основания m_1m_1' его фиксировано. Геометрическое место точек J есть, следовательно, геометрическое место точек основания равнобедренного треугольника $O_1m_1m_1'$ таких, что $\frac{Jm_1}{Jm_1'} = k$. Это свойство сохраняется при гомотетии относительно O_1. Значит, геометрическое место точек J образовано двумя прямыми (δ_1) и (δ_2), проходящими через точку O_1 (или O_1'), делящую отрезок AA' в данном отношении k, расположенными в плоскости (d_1, d_1') и проходящими через точки J_1 и J_2 отрезка MM' такие, что $\frac{\overline{J_1M}}{\overline{J_1M'}} = -\frac{\overline{J_2M}}{\overline{J_2M'}} = k$. Аналогично геометрическое место точек J' образовано двумя прямыми (δ_1') и (δ_2'), проходящими через точку O_1' и расположенными в плоскости, параллельной (D) и (D').

2°. Случай, когда $AA' \perp (D)$ и $AA' \perp (D')$. Точка I — середина MM' лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AA' параллельно прямым (D) и (D'). В рассматриваемом случае эта плоскость будет перпендикулярна AA' и, значит, $IA = IA'$. Отсюда следует, что $\triangle IAM = \triangle IA'M'$. Значит, $\angle AMI = \angle A'M'I$, прямая MM' одинаково наклонена к прямым (D) и (D'). **Плоскость-медиатриса**



Черт. 246.

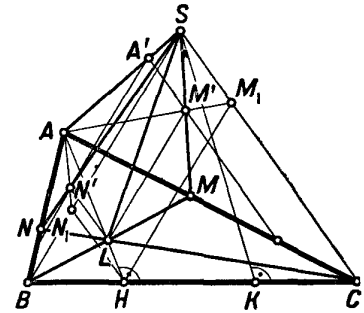


Черт. 247.

отрезка MM'. В п. 1° было доказано, что геометрическое место точек I образовано двумя биссектрисами углов между прямыми, проходящими через середину O отрезка AA' параллельно прямым (D) и (D'). В случае $AA' \perp (D)$ и $AA' \perp (D')$ треугольники OAM и $OA'M'$ равны, значит, $OM = OM'$ и, значит, точка O лежит на плоскости, перпендикулярной отрезку MM' и проходящей через его середину. Значит, эта плоскость проходит через прямые OI, иначе через (δ) и (δ'). Прямые (G_1) и (G_2) являются прямыми (δ) и (δ'). **Точки G_1 и G_2 равноотстоят от (D) и (D').** Пусть IK и IK' — перпендикуляры, опущенные из точки I на прямые (D) и (D'). Эти перпендикуляры проектируются ортогонально на плоскость (δ, δ') соответственно в перпендикуляры Ik и Ik' к (d) и (d') на основании теоремы о проекции прямого угла (теорема о трех перпендикулярах). Так как I лежит на одной из биссектрис (δ) или (δ'), то $Ik = Ik'$. С другой стороны, $kK = OA$, $k'K' = OA'$; но $OA = OA'$, значит, $kK = k'K'$. Отсюда следует, что $\triangle IkK = \triangle Ik'K'$, поэтому $IK = IK'$ (черт. 246).

3°. Геометрическое место точек, делящих BB' в данном отношении k. Рассмотрим какую-нибудь прямую BB', параллельную плоскости (P) и пересекающую две скрещивающиеся прямые (D) и (D'). Существуют две точки: N и N', делящие отрезок BB' в отношении k (черт. 242): $\frac{NB}{NB'} = \frac{N'B}{N'B'} = k$. Пусть B_1B_1' — какая-нибудь другая прямая, параллельная плоскости (P) и пересекающая (D) и (D') в точках B_1 и B_1'. Пусть N_1 и N_1' — точки, делящие отрезок B_1B_1' в отношении k. Предположим, что BB' фиксирована, а B_1B_1' — переменная прямая. Проведем $NN_2 \parallel (D)$; пусть эта прямая пересекает B_1B' в точке N_2; соединим N_2 с N_1. Имеем $\frac{N_2B_1}{N_2B'} = \frac{NB}{NB'} = k = \frac{N_1B_1}{N_1B_1'}$, откуда, следует, что $N_2N_1 \parallel (D')$. Следовательно, плоскость NN_2N_1 фиксирована, поскольку она параллельна (D) и (D') (ибо она проходит через NN_2 и N_2N_1). Треугольник NN_2N_1 остается все время подобным себе, если B_1B_1' перемещается. В самом деле, стороны NN_2 и N_2N_1 остаются параллельными (D) и (D'). Далее, $\frac{NN_2}{BB_1} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{B'N}{B'N + BN} = \frac{1}{1+k}$, $\frac{N_2N_1}{B'B_1'} = \frac{B_1N_1}{B_1B_1'} = \frac{B_1N_1}{B_1N_1 + B_1'N_1} = \frac{1}{1+k}$, откуда $\frac{NN_2}{N_2N_1} = \frac{BB_1}{B'B_1'}$; но $\frac{BB_1}{B'B_1'} = \text{const}$, ибо B_1B_1' остается параллельной плоскости (P). Значит, $\frac{NN_2}{N_2N_1} = \text{const}$. Отсюда также следует, что направление NN_1 фиксировано в плоскости, проходящей через N параллельно (D) и (D'). Геометрическое место точек N_1 есть, следовательно, прямая, проходящая через точку N (аналогично и для N'). Следствие. Если k изменяется, существует бесконечное множество прямых, являющихся геометрическим местом точек, делящих отрезок BB' в отношении k. Эти прямые, по доказанному, пересекают все прямые BB'; все они, по доказанному, параллельны плоскости, параллельной (D) и (D'). Итак, прямые BB', параллельные плоскости (P) и пересекающие две скрещивающиеся прямые, не параллельные этой плоскости, пересекают еще (каждая) бесконечное множество прямых, параллельных другой плоскости (Q).

18. Пересечение (R) с плоскостью SML. Плоскость SML содержит прямую SB. Плоскость (R) параллельна плоскости SBC, параллельна и прямой SB. Значит, плоскость (R) пересекает плоскость SML по прямой, параллельной прямой SB (черт. 248).



Черт. 248.

Сечение пирамиды $SANLM$ плоскостью (R). Обозначим через A', M и N' точки пересечения ребер SA, SM и SN с (R). Мы видим, что $LM' \parallel SB$. Грань SAN содержит прямую SB, значит, (R) пересекает эту прямую по прямой $A'N' \parallel SB$. Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что (R) пересекает SNL и SAM по прямым LN' и $A'M'$, параллельным SC. Четырехугольник $A'M'LN$, противоположные стороны которого параллельны, есть, следовательно, параллелограмм.

Площадь параллелограмма (P_1). Гомотетия $\left(A, \frac{\overline{AH}}{\overline{AL}}\right)$ преобразует L в H и, следовательно, плоскость (R) — в плоскость SBC. Она преобразует параллелограмм (P) в параллелограмм (P_1) с диагональю SH, стороны которого параллельны SB и SC; пусть SN_1HM_1 — этот параллелограмм. Площадь треугольника SBC равна $s = \frac{SK \cdot BC}{2} = \frac{k(b+c)}{2}$. Треугольники BHN_1 и CHM_1 подобны треугольнику SBC и, значит, $\frac{BHN_1}{s} = \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 = \frac{b^2}{(b+c)^2}$, $\frac{CHM_1}{s} = \left(\frac{CH}{CB}\right)^2 = \frac{c^2}{(b+c)^2}$, значит, $CHM_1 + BHN_1 = \frac{b^2+c^2}{(b+c)^2}s$, значит, $P_1 = s - \frac{b^2+c^2}{(b+c)^2}s = \frac{kbc}{(b+c)^2}$. **Площадь параллелограмма (P).** (P) получается в результате гомотетии (P_1) с коэффициентом гомотетии $\frac{\overline{AL}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HL} - \overline{HA}}{\overline{AH}} = \frac{l-a}{a}$, значит, $P = P_1\left(\frac{l-a}{a}\right)^2 = \frac{kbc}{(b+c)^2}\left(\frac{l-a}{a}\right)^2$.

Объем пирамиды $SA'M'LN'$. $AH \perp BC$ и, если мы опустим из точки A перпендикуляр на плоскость SBC, то длина этого перпендикуляра будет равна $a \sin \alpha$,

ибо величина двугранного угла с ребром BC равна, по предположению α. Расстояние от точки A до плоскости (R) гомотетично этому последнему $(a \sin\alpha)$ в отношении $\frac{a-l}{a}$; оно равно, следовательно, $(a-l)\sin\alpha$. Расстояние же от S до плоскости (P) есть разность расстояний от точки A до плоскостей SBC и (R) и, таким образом, высота пирамиды $SA'N'LM'$ равна $l\sin\alpha$, а ее объем $v = Pl\sin\alpha = \frac{kbc}{3(b+c)^2}\left(\frac{a-l}{a}\right)^2 l\sin\alpha$.

Геометрическое место точек S таких, что $P = \text{const}$. Длины a, b, c, d фиксированы, значит, если $P = \text{const}$, то $k = \text{const}$ и наоборот. Геометрическое место точек S — это геометрическое место точек, равноудаленных от BC. Это цилиндр вращения с осью BC и радиусом k; отсюда надо исключить две образующие, расположенные в плоскости треугольника ABC.

Геометрическое место точек S таких, что $v = \text{const}$. Мы видим, что $v = \text{const}$ тогда и только тогда, когда $k\sin\alpha = \text{const}$, а так как $k\sin\alpha$ есть расстояние от точки S до плоскости ABC, то геометрическое место точек S таких, что $v = \text{const}$ состоит из двух плоскостей, параллельных плоскости треугольника ABC на расстоянии $k\sin\alpha$ от этой плоскости.

4°. Геометрическое место S при условии, если а) P — прямоугольник. Напомним, что параллелограмм (P_1) с вершинами S, N_1, H, M подобен (P). Значит, в этом случае угол BSC должен быть прямым и, следовательно, точка S должна быть на сфере с диаметром BC. Из этой сферы исключаются точки ее пересечения с плоскостью треугольника ABC.

б) **(P) — ромб.** В этом случае SH — биссектриса угла BSC. Следовательно, если мы обозначим через H' точку, сопряженную с H относительно B и C, то биссектрисы углов BSC должны проходить через фиксированные точки H и H' и геометрическое место точек есть сфера, построенная на HH' как на диаметре, за исключением точек этой сферы, расположенных в плоскости треугольника ABC.

в) **(P)—квадрат.** Необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно условия а) и б). Геометрическое место точек S есть окружность, по которой пересекаются сферы с диаметрами BC и HH', за исключением двух точек этой окружности, лежащих в плоскости треугольника ABC. **Геометрическое место вершин квадрата (P).** H — фиксировано, S описывает предыдущую окружность; значит, вершины M_1 и N_1 описывают также окружности с осью BC, поскольку эти точки M_1 и N_1 лежат на медиатрисе отрезка HS по одну и по другую сторону от HS на расстоянии $\frac{1}{2}HS$. Геометрическое место вершин (P) получается из предыдущих в результате гомотетии $\left(A, \frac{\overline{AL}}{\overline{AH}}\right)$; L фиксировано, A' описывает окружность, гомотетичную окружности, которую описывает S, а M' и N' — окружности, гомотетичные тем, которые описывают M_1 и N_1 в гомотетии $\left(A, \frac{\overline{AL}}{\overline{AH}}\right)$.

Вычисление SB и SC. Треугольник SBC — прямоугольный (S — прямой угол) и H — основание биссектрисы угла BSC. Имеем

$$\frac{SB^2}{b^2} = \frac{SC^2}{c^2} = \frac{BS^2+CS^2}{b^2+c^2} = \frac{BC^2}{b^2+c^2} = \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2},$$

откуда

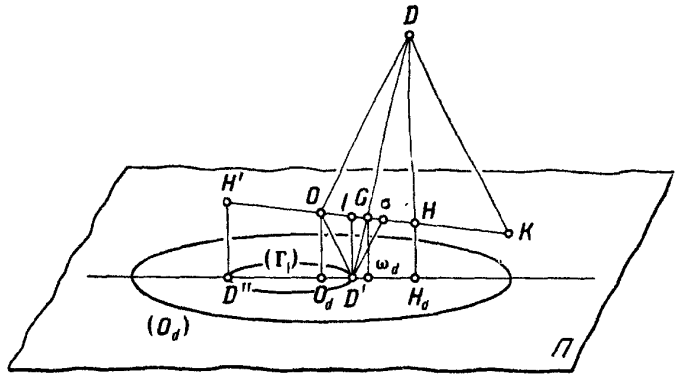
$$SB = \frac{b(b+c)}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad SC = \frac{c(b+c)}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Вычисление сторон квадрата. Приложим к треугольнику BSC теорему о биссектрисе, получим $SB\cdot SC = SH^2 + BH\cdot CH$, откуда $SH = \frac{bc\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Диагональ (P_1) имеет эту величину, диагональ (P) равна $\frac{bc\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\frac{a-l}{a}$, а сторона $\frac{bc(a-l)}{a\sqrt{b^2+c^2}}$.

19. Зная ортоцентр H ортоцентрического тетраэдра (T) и центр O сферы, описанной вокруг него, легко построить центр тяжести $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$, центр первой сферы Эйлера тетраэдра — также и центр σ второй сферы Эйлера:

$$\overrightarrow{G\sigma} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}.$$

Исследование тетраэдра (T) с заданной вершиной D. Предположим, что D — вершина тетраэдра (T) (черт. 249). Центр тяжести D' противоположной грани получается из D в результате преобразования гомотетии $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$. Плоскость ($\Pi$) противоположной грани — это плоскость, перпендикулярная DH и проходящая через D'; треугольник ABC вписан в окружность (O_d) пересечения сферы (O) с центром O и радиусом OD с плоскостью (Π). Обозначим проекцию точки O на плоскость (Π) через O_d; точка O_d служит центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Точка H_d пересечения прямой DH с плоскостью (Π) служит



Черт. 249.

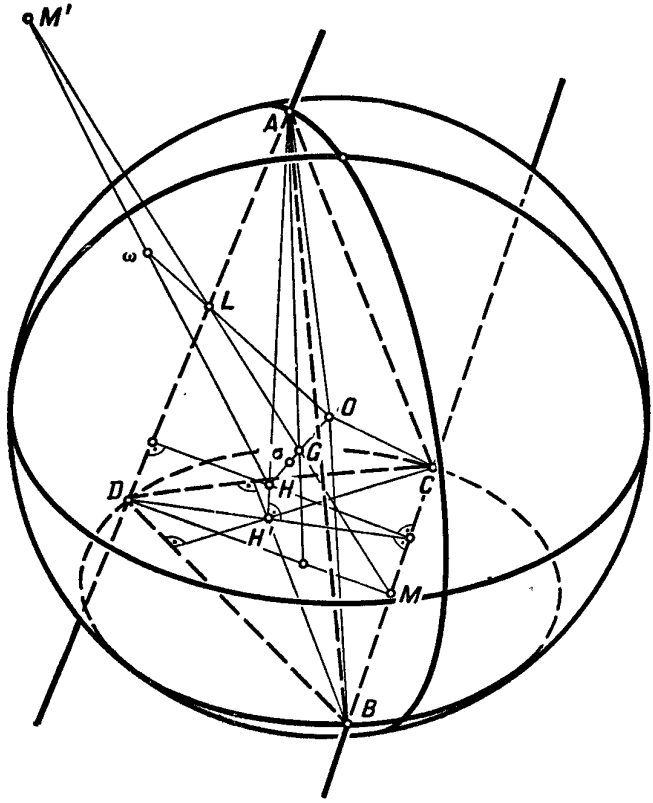
ортоцентром треугольника ABC, а точка D' — центр тяжести грани ABC; в самом деле, обозначая через ω_d проекцию точки G на плоскость (Π), будем иметь $\overrightarrow{O_d\omega_d} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O_dH_d}$, $\overrightarrow{D'\omega_d} = \frac{1}{6}\overrightarrow{O_dH_d}$, следовательно, $\overrightarrow{O_dD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O_dH_d}$. Указанное построение приводит к тетраэдру (T), если сфера (O) и плоскость (Π) пересекаются и если существует треугольник ABC, вписанный в (O_d) и имеющий H_d своим ортоцентром, и если, наконец, плоскость (Π) не проходит через точку D. Сфера (O) и плоскость (Π) пересекаются, если $OO_d < OD$. На основании задачи № 76, 2° (глава XX) возможно построить треугольник ABC, для которого окружность (O_d) будет описанной, а H_d будет ортоцентром, если точка D' лежит внутри окружности (O_d), т. е. если $OD' < OD$. Заметим, что из этого одного условия уже следует, что $OO_d < OD$, так как $OO_d \leqslant OD'$. Таким образом, если $OD' < OD$, то имеется бесконечное множество треугольников ABC и, следовательно, бесконечное множество тетраэдров (T) с заданной вершиной D. Обозначим через D'' точку, гармонически сопряженную с точкой D' относительно точек O_d и H_d, через (Γ_1) — окружность с диаметром $D'D''$. Тогда, если $OD' < OD < OH_d$, геометрическое место вершин треугольников ABC есть часть окружности (O_d), внешняя по отношению к (Γ_1); огибающая стороны — соответствующая часть гиперболы с фокусом O_d, для которой направляющей окружностью является окружность, полученная из окружности (O_d) в результате гомотетии $\left(D', -\frac{1}{2}\right)$. Если $OH = OD$, геометрическое место вершин — окружность (O_d), и огибающая сторон треугольника ABC вырождается в две точки: O_d и H_d. Если $OH_d < OD$, геометрическое место вершин — окружность (O_d), а огибающая сторон — эллипс, для которого O_d — фокус, а направляющей окружностью служит окружность, полученная из (O_d) в результате гомотетии $\left(D', -\frac{1}{2}\right)$. Условие $OD' < OD$ существования тетраэдра (T) можно модифицировать: обозначим через K точку прямой OH, полученную из O в результате преобразования гомотетии $(G, -3)$, тогда $DK = 3D'O$ и условие существования тетраэдра будет иметь вид $DK < 3DO$. Это неравенство показывает, что точка D должна лежать вне сферы (Σ_1), имеющей диаметром GH', где H' — точка, симметричная с точкой H по отношению к O. Так как плоскость ABC не должна проходить через D, то это означает, что прямые DG и DH не должны быть перпендикулярны, а значит точка D не должна лежать на сфере (Σ_2) с диаметром GH. Итак, области пространства, где расположены вершины тетраэдра (T), суть точки, внешние для сферы (Σ_1), за исключением точек сферы (Σ_2).

Построение тетраэдра (T), грань ABC которого лежит в данной плоскости. Предположим, что задана плоскость (Π), в которой лежит грань ABC тетраэдра (T). Центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, является проекцией O_d точки O на плоскость (Π), а точка H пересечения высот является проекцией H_d точки H на плоскость (Π). Следовательно, центр тяжести G' треугольника ABC есть точка D' такая, что $\overrightarrow{O_dD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O_dH_d}$; вершину D тетраэдра (T) построим, произведя над точкой D' гомотетию (G, -3); сфера (O) с центром O и радиусом OD пересекает плоскость (Π) по окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Это построение приведет к тетраэдру (T), если сфера (O) и плоскость (Π) пересекаются, если существует треугольник ABC, имеющий (O_d) в качестве описанной вокруг него окружности и H_d в качестве ортоцентра, и, наконец, если плоскость (Π) не проходит через D. Сфера (O) и плоскость (Π) пересекаются, если $OO_d < OD$. На основании предыдущего, существуют треугольники ABC, если точка D' лежит внутри окружности (O_d), и мы видим, что геометрическое место вершин — это часть окружности (O_d), внешняя по отношению к (Γ_1); огибающая сторон — коническое сечение с фокусом O_d, для которого направляющей окружностью служит образ окружности (O_d) в гомотетии $\left(D', -\frac{1}{2}\right)$; полное исследование уже было дано выше. Для того чтобы точка D' была внутренней точкой окружности (O_d), необходимо и достаточно, чтобы $OD' < OD$; рассматривая центр σ второй сферы Эйлера, это условие можно переписать так: $D'O < 3D'\sigma$; отсюда следует, что точка D' должна лежать вне сферы, являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых отношение расстояний от точек O и σ равно 3. Это сфера с диаметром GH; тогда точка D' есть проекция точки J, симметричной с точкой σ относительно G на плоскость (Π). Таким образом, плоскости (Π) — это плоскости, не проходящие через точку G и такие, что ортогональные проекции на них точки J лежат вне сферы (Σ_3). Рассмотрим теперь плоскость, проектирующую прямую OH на плоскость (Π); эта плоскость пересекает сферу (Σ) по окружности σ_3 с диаметром GH и плоскость (Π) по прямой O_dH_d; точка D' является внешней точкой по отношению к окружности σ_3, поэтому прямая O_dH_d пересекает гиперболу, для которой J — фокус, а σ_3 — направляющая окружность. Плоскость (Π) — это, следовательно, такая плоскость, что проекция на нее прямой OH пересекает эту гиперболу. Значит, плоскость (Π) — это любая плоскость, пересекающая двуполостной гиперболоид вращения, полученный при вращении этой гиперболы вокруг оси OH, за исключением плоскостей, проходящих через точку G.

Изучение тетраэдра (T), для которого задана прямая, на которой лежит одно из его ребер. Предположим, что ребро AD тетраэдра (T) расположено на данной прямой (X) (черт. 250). Ортогональная проекция L точки O на (X) есть середина AD; середина M противоположного ребра CD есть точка, симметричная с точкой L относительно G. Перпендикуляр (Z), опущенный из H на (X), есть общий перпендикуляр для прямой (X) и для прямой (Y), на которой лежит сторона BC. Прямая (Y), следовательно, получится, если на прямую (Z) из точки M опустить перпендикуляр. Так как HM ортогональна (X), прямая (Y) расположена в плоскости (Z, HM). Вершина A и D — это две точки прямой (X), симметричные по отношению к L и такие, что AH перпендикулярна плоскости (D, Y); следовательно, $AH \perp DM$. Пусть M' — точка, симметричная с точкой M относительно L; тогда $AM' \parallel DM$, значит $\angle M'HM = 90°$. Следовательно, точка A лежит на сфере (Σ) с диаметром $M'H$. Центр этой сферы лежит в точке ω пересечения прямых OL и $M'H$, ибо $OG = GH$, $LG = GM$. Точки A и D суть, следовательно, точки пересечения сферы (Σ) с прямой (X); эти точки симметричны относительно точки L, а потому ωL есть диаметр сферы (Σ); перпендикулярный прямой (X). Для того, чтобы эти точки существовали, необходимо и достаточно, чтобы $\omega L < \omega H$. Обозначая через σ центр второй сферы Эйлера для тетраэдра (T), будем иметь $\overrightarrow{\omega H} = \frac{3}{2}\overrightarrow{L\sigma}$, $\overrightarrow{\omega L} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LO}$; значит, условие $\omega L < \omega H$ примет вид $LO < 3L\sigma$. Это неравенство показывает, что точка L должна лежать вне сферы, являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых отношение расстояний до O и до σ равно 3. Эта сфера есть сфера (Σ_3) с диаметром GH; H и D, таким образом, будут определены: вершины B и C будут точками пересечения сферы с центром O и радиусом OA с прямой (Y). Эти точки существуют, если $OM < OA$ или $LH < OA$. Далее имеем $OA^2 = AL^2 + LO^2 = \omega H^2 - \omega L^2 + OL^2 = \frac{9}{4}L\sigma^2 + \frac{3}{4}OL^2$ и $LH^2 = 2LG^2 + 2OG^2 - OL^2$. Прилагая теорему Стюарта к треугольнику LOG и секущей $L\sigma$, получим $L\sigma^2 \cdot \overline{OG} + LO^2 \cdot \frac{\overline{OG}}{3} - LG^2 \cdot \frac{4}{3}\overline{OG} - \frac{4}{3}\overline{OG} \cdot \overline{OG} \cdot \frac{1}{3}\overline{OG} = 0$, откуда $L\sigma^2 = \frac{4}{9}OG^2 + \frac{4}{3}LG^2 - \frac{1}{3}LO^2$, следовательно,

$OA^2 = 3LG^2 + OL^2$. Предыдущее условие принимает вид $2LG^2 + 2OG^2 - OL^2 < 3LG^2 + OG^2$ или $OG^2 < LG^2 + LO^2$. Отсюда следует, что точка L должна лежать вне сферы (Σ_4) с диаметром OG. Таким образом, прямая (X), на которой лежит ребро тетраэдра (T) — это такая прямая, для которой ортогональная проекция L на нее точки O лежит вне сферы (Σ_4), а также и вне сферы (Σ_3).

Прямые (X), проходящие через данную точку S. Геометрическое место ортогональных проекций точки O на прямые, проходящие через точку S, образуют сферу (S) с диаметром OS. Эта сфера пересекается со сферой (Σ_4), так как сферы (Σ_4)

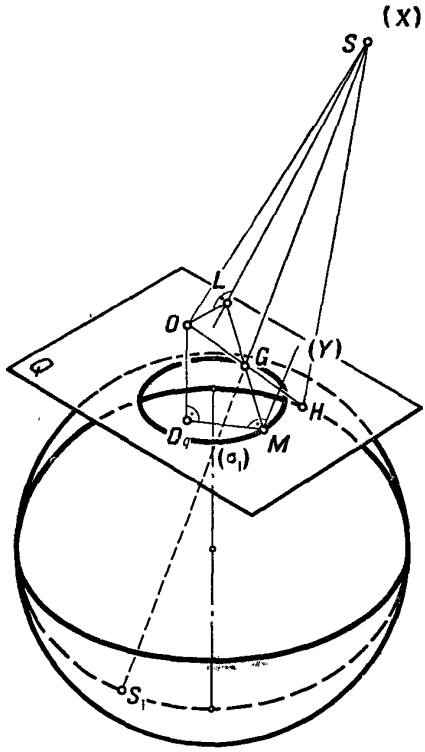


Черт. 250.

и (Σ_3) имеют общую точку O; пусть (σ_4) — окружность, по которой пересекаются сферы (S) и (Σ_4). Прямая, выходящая из точки S, только тогда может быть прямой (X), если она проходит вне конуса (C_4), имеющего S своей вершиной, а (σ_4) — направляющей окружностью. Если при этом сфера (S) не пересекается со сферой (Σ_3), то всякая прямая, проходящая через точку S, внешняя по отношению к конусу (C_4), будет прямой (X). Если же сфера (S) пересекается со сферой (Σ_3) по окружности (σ_3), то окружности (σ_3) и (σ_4) будут различны, так как они расположены на сферах (Σ_3) и (Σ_3), внешне касающихся друг друга. Прямой (X) является в этом случае любая прямая, проходящая через точку S и расположенная вне конусов с вершиной в S, направляющими окружностями которых служат окружности (σ_3) и (σ_4).

Прямые (X), расположенные в данной плоскости (P). Геометрическое место ортогональных проекций точки O на прямые плоскости (P) — это сама плоскость (P). Заметим, что если O_p — проекция точки O на плоскость (P), то проекция точки O на прямую, лежащую в плоскости (P), совпадает с проекцией точки O на эту прямую. Прямая плоскости (P) может быть прямой (X) тогда и только тогда, когда ортогональная проекция точки O_p на эту прямую лежит и вне сферы (Σ_3), и вне сферы (Σ_4). Поэтому, если плоскость (P) не пересекает (Σ_3) и (Σ_4), всякая прямая плоскости (P) есть прямая, на которой может лежать ребро тетраэдра (T). Если плоскость (P) пересекает одну из этих сфер, например сферу (Σ_3) по окружности (σ_3), то проекция точки O_p на прямую (X) плоскости (P) должна лежать

вне окружности (σ_3). Следовательно, если сама точка O_p лежит внутри окружности (σ_3), прямая (X) плоскости (P) — это любая прямая плоскости (P), которая не пересекает эллипс (E_3), имеющий O_p своим фокусом, а (σ_3) — направляющей окружностью. Если точка O_p лежит вне окружности (σ_3), прямые (X) — это прямые, пересекающие гиперболу (H_3), имеющую O_p фокусом, а (σ_3) — направляющей окружностью. Следовательно, если плоскость (P) пересекает только сферу (Σ_3), прямые плоскости (P), на которых может лежать ребро тетраэдра (T), это, в соответствии с рассмотренными случаями, либо прямые, не пересекающие эллипс (E_3), либо прямые, пересекающие гиперболу (H_3). Если плоскость (P) пересекает обе сферы (Σ_3) и (Σ_4) по окружностям (σ_3) и (σ_4), то, повторяя предыдущие рассуждения и замечания, что точка O_p не может лежать одновременно внутри (σ_3) и (σ_4) (ибо сферы (Σ_3) и (Σ_4) касаются внешним образом), получим, что если точка O_p лежит вне обеих окружностей (σ_3) и (σ_4), то прямые (X) плоскости (P) — это все прямые, пересекающие гиперболу (H_3) и гиперболу (H_4) с фокусом O_p и направляющей окружностью (σ_4); если точка O_p лежит внутри (σ_3) и, следовательно, вне окружности (σ_4), прямые (X) плоскости (P) — это все прямые, которые не пересекают эллипс (E_3) и пересекают гиперболу (H_4); если точка O_p лежит вне окружности (σ_3) и, следовательно, внутри окружности (σ_4), то прямые (X) плоскости (P) — это все прямые, лежащие в этой плоскости, которые пересекают гиперболу (H_3) и не пересекают эллипс (E_4).



Черт. 251.

Исследование прямых (Y), соответствующих прямым (X), проходящим через данную точку S. Пусть дана прямая SX, проходящая через данную точку S, на которой (т. е. на прямой X) расположено ребро тетраэдра (T) (черт. 251). Прямая (Y), на которой лежит противоположное ребро тетраэдра (T), перпендикулярна плоскости (SX, H) и, следовательно, ортогональна прямой SH этой плоскости. Таким образом, прямые (Y), соответствующие прямым (X), проходящим через данную точку S, ортогональны фиксированной прямой SH. Рассмотрим теперь фиксированную плоскость (Q), перпендикулярную SH. Геометрическое место ортогональных проекций L точки O на прямые SX составляет часть сферы (S) с диаметром OS [внешнюю по отношению к сферам (Σ_3) и (Σ_4)]. Геометрическое место середин M противоположных ребер получается в результате симметричного преобразования указанного геометрического места относительно точки G. Заметим, что при этой симметрии сфера (Σ_3) перейдет в сферу (Σ_4) и наоборот. Отсюда следует, что геометрическое место точек M есть часть [внешняя по отношению к (Σ_3) и (Σ_4)] сферы с диаметром S_1H, где S_1 — точка, симметричная точке S относительно G. Для прямых (Y), расположенных в фиксированной плоскости (Q), перпендикулярной SH, геометрическое место точек M есть часть окружности, по которой пересекаются сфера (S_1) и плоскость (Q), расположенная вне сфер (Σ_3) и (Σ_4) (если, конечно, плоскость (Q) пересекается со сферой S_1). Обозначим теперь через O_q ортогональную проекцию точки O на плоскость (Q) и через (σ_1) — окружность, по которой плоскость (Q) пересекает сферу (S_1). Прямая (Y) плоскости (Q) — это такая прямая, для которой ортогональная проекция на нее точки O_q лежит на указанной выше части окружности (σ_1). Мы видим, таким образом, что огибающая прямых (Y) плоскости (Q) (если она существует) есть эллипс, или гипербола, или дуги этих линий, имеющих фокус O_q и направляющую окружность (σ_1). Если O_q лежит внутри (σ_1), то эта огибающая — эллипс, а если точка O_q лежит вне окружности (σ_1), эта огибающая — гипербола.

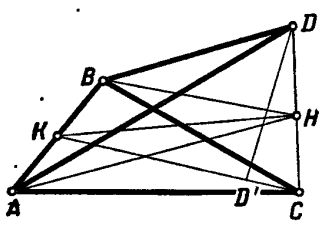
Построение тетраэдра (T) по двум точкам S и S', через которые проходят соответственно ребра AB и CD. Мы видели, что прямые (Y), соответствующие прямым (X), проходящим через точку S, перпендикулярны прямой SH

Следовательно, прямые (Y), проходящие через точку S', расположены в плоскости (Q), проведенной через точку S' перпендикулярно SH. Мы также установили, что прямые (Y), лежащие в плоскости $(Q) \perp SH$, соответствующие прямым (X), проходящим через точку S, огибают эллипс или гиперболу с фокусом O_q (O_q — проекция O на плоскость Q) и направляющей окружностью (σ_1), по которой плоскость (Q) пересекается со сферой (S_1), симметричной сфере (S) с диаметром OS относительно G. Следовательно, прямые $S'Y$ суть касательные, проведенные из точки S' к указанной выше линии второго порядка. Следовательно, задача имеет два, одно или ни одного решения. Возьмем одно из решений $S'Y$; проекция точки O_q на прямую $S'Y$ дает середину M ребра, расположенного на $S'Y$; обозначая через L середину противоположной стороны (точка L симметрична точке M относительно точки G), мы находим прямую SL, на которой лежит противоположное ребро тетраэдра. Зная две прямые, на которых лежат два противоположных ребра тетраэдра (T), можно построить этот тетраэдр так, как уже было указано выше.

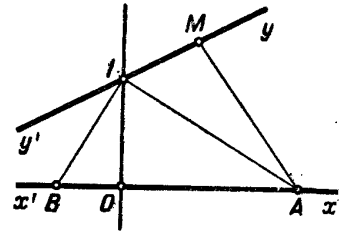
Глава XXIV. Задачи на доказательство

33. 1°. Плоскость, содержащая C и D (черт. 252). Так как $CA = CB$, то C лежит в плоскости, проходящей через середину K отрезка AB перпендикулярно этому отрезку. Так как $DA = DB$, то точка D лежит в этой же плоскости. Так как CD лежит в плоскости, ортогональной AB, то $AB \perp CD$. Если плоскости CAB и DAB совпадают, то точки C и D лежат на медиатрисе отрезка AB; $CD \perp AB$.

2°. $AH = BH$. Высоты, выходящие из A и B, в треугольниках ACD и BCD лежат в плоскости, проходящей через AB перпендикулярно CD; эта плоскость существует, так как $AB \perp CD$; значит, высоты AH и BH пересекаются в точке H, в которой эта плоскость пересекает CD. Далее, так как отрезок CD лежит в плоскости (Π), проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку, то и точка H лежит в этой плоскости, значит $AH = BH$.



Черт. 252.



Черт. 253.

3°. **Величина $CA = \sqrt{a^2 + d^2 + x^2}$. Соотношение между a и d, при котором плоскости ACD и BCD будут перпендикулярны.** AHB — линейный угол между указанными плоскостями, он должен быть прямым. Но KH — медиана, проведенная к гипотенузе. Значит, искомое соотношение $a = d$.

4°. а) **Точка D' на CK.** Так как CK — одновременно медиана и высота равнобедренного треугольника ABC, то $AB \perp KC$. Но $AB \perp CD$, значит, AB и плоскость KCH перпендикулярны и, значит, плоскость KCH перпендикулярна плоскости ABC; значит, перпендикуляр DD', опущенный из C на плоскость ABC, лежит также в плоскости KCH; значит, точка D' лежит на прямой CK.

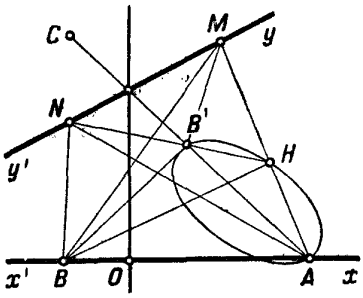
б) **Ортогональность DB и AC.** Для того чтобы DB и AC были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы плоскость BDD', которая перпендикулярна плоскости ABC, была бы перпендикулярна AC, иначе говоря, чтобы пересечение BD' этих двух плоскостей было перпендикулярно AC, т. е. BD' — высота треугольника ABC; но CK — высота того же треугольника. В таком случае AD' — третья высота ABC; следовательно, она перпендикулярна BC. Плоскость $AD'D$ перпендикулярна BC, значит, $AD \perp BC$.

Построение. Пусть Cx — прямая, ортогональная AB. Пусть D' — ортоцентр треугольника ABC. Искомая точка D есть точка пересечения Cx с прямой, лежащей в плоскости CKx и перпендикулярной CK. Исключение составляет тот случай, когда $Cx \perp$ пл. ABC.

34. 1°. Ортогональность AM и BI. Если $d^2 = ab$ (черт. 253), то $OI^2 = -\overline{OA} \cdot \overline{OB}$; треугольник AIB — прямоугольный ($I = 90°$), значит, $BI \perp AI$. С другой стороны, $y'y \perp x'x$ и $y'y \perp IO$, значит, $y'y$ перпендикулярна плоскости ABI, поэтому $BI \perp IM$. Кроме того, $IA \perp IM$, а BI перпендикулярна плоскости AIM, значит, $BI \perp AM$.

Объем тетраэдра *ABMI*. Треугольник AIB — основание, IM — высота, $v = \frac{1}{6} ab(a+b)$.

2°. Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из *B* на *AM*. Так как $d^2 \neq ab$, то ортогональная проекция B' точки B на плоскость, проходящую через A и $y'y$ есть точка прямой AI, отличная от I (черт. 254). Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из B на AM. Соединим B' с H. На основании теоремы о трех перпендикулярах $B'H \perp AM$ и обратно. Значит, геометрическое место точек H есть окружность, построенная в плоскости $(A, y'y)$ на AB' как на диаметре.



Черт. 254.

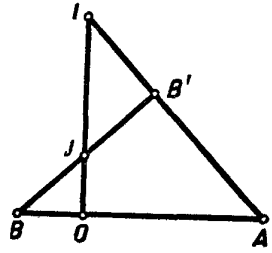
3°. Точка *N* такая, что *AM* $\perp$ *BN*. Если M задана, то точка N лежит в плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно AM. Если M отлична от I, то AM — наклонная к $y'y$ и эта плоскость пересекает $y'y$ в точке N. Эта плоскость содержит BB' и BH и пересекает плоскость $(A, y'y)$ по прямой $B'H$; точка N, следовательно, — точка пересечения HB' с $y'y$.

***M* — ортоцентр *AB'N*.** На основании 1°, $y'y \perp AB'$; на основании 3°, $NB' \perp AH$. Таким образом, MN и MA суть высоты треугольника $AB'N$ на его стороны AB' и NB'; значит, M — ортоцентр этого треугольника.

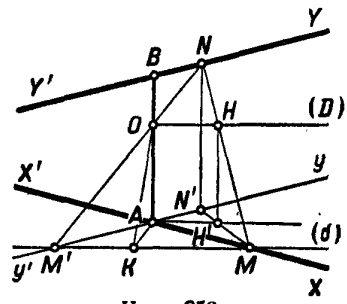
Ортогональность *AN* и *BM*. Из предыдущего следует, что MB' — третья высота треугольника $AB'N$, значит, $MB' \perp NA$. Так как BB' — перпендикуляр к плоскости AMN, то $BB' \perp AN$, значит, $AN \perp BB'$ и $AN \perp B'M$, поэтому AN — перпендикуляр к плоскости $BB'M$ и значит, $AN \perp BM$.

4°. Произведение $\overline{IM} \cdot \overline{IN}$. Пусть C — точка, симметричная точке B' относительно $y'y$. Точка B' — ортоцентр треугольника AMN, так как $NH \perp AM$ и $AI \perp NM$; значит, окружность, описанная вокруг треугольника AMN, проходит через точку C, и мы имеем (выражая двумя способами степень точки I относительно этой окружности) $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IA} \cdot \overline{IC} = -\overline{IA} \cdot \overline{IB'} = \text{const}$ (при условии, если точка M описывает прямую $y'y$).

Значение этого произведения в функции *a*, *b*, *d*. Обозначим через J точку пересечения BB' с OI (черт. 255). Треугольники BOJ и IOA подобны, следовательно, $\frac{OB}{OI} = \frac{OJ}{OA}$, откуда $OJ = \frac{ab}{d}$. Точки J, O, A, B' лежат на одной окружности; значит, $\overline{IA} \cdot \overline{IB'} = \overline{IO} \cdot \overline{IJ} = d\left(d - \frac{ab}{d}\right) = d^2 - ab$. Итак, $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = ab - d^2$.



Черт. 255.



Черт. 256.

Случай $d^2 = ab$. В этом случае предыдущее соотношение принимает вид $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = 0$. Если точка M лежит на прямой $y'y$, но не совпадает с I, то $IM \neq 0$, значит, $\overline{IN} = 0$ и точка N совпадает с I. Если точка M совпадает с I, то $\overline{IM} = 0$, значит, величина $\overline{IN}$ — произвольная; следовательно, точка N — любая точка прямой $y'y$.

35. 1°. Перпендикулярность *MN* и *Y'Y* (черт. 256). Проведем через точку A прямую $y'Ay$, параллельную прямой $Y'BY$; пусть (π) — плоскость, в которой лежат прямые $X'AX$ и $y'By$. Спроектируем ортогонально M на $y'Ay$ и проекцию обозначим через N'. Угол между $X'AX$ и $y'Ay$ равен 60°. Мы имеем также $AN' = \frac{AM}{2} = x$. Следовательно, AN' и BN равны и параллельны; значит, $AN'NB$ — прямоугольник. Отсюда следует, что $NN' \parallel AB$ и $NN' \perp (\pi)$ и что $\angle AN'N$ есть

ортогональная проекция угла BNM на плоскость (π), значит, $\angle BNM = 90°$, т. е. $MN \perp Y'Y$.

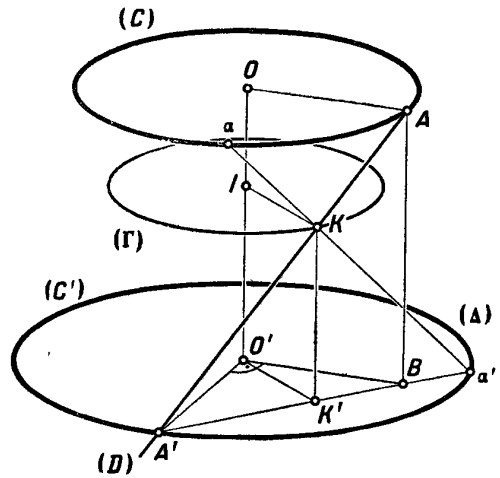
2°. **Пересечение (D) плоскостей (P) и OMN.** Пусть H — точка пересечения плоскости (P) с MN; прямая (D) есть тогда прямая OH. Имеем: $\frac{\overrightarrow{HM}}{\overrightarrow{HN}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}} = -2$. Проведем $H'H \parallel NN'$ и пусть H' — точка пересечения HH' с MN'; имеем также $\frac{\overrightarrow{H'M}}{\overrightarrow{H'N}} = \frac{\overrightarrow{HM}}{\overrightarrow{HN}} = -2$, а так как по предположению $\frac{AM}{AN'} = 2$, то AH' есть биссектриса угла xAy. Но эта биссектриса есть ортогональная проекция OH на плоскость (π); прямая (D) параллельна AH'. Отсюда следует, что (D) — фиксированная прямая. Она образует с осями $X'X$ и $y'y$ углы по 30°.

3°. **Прямая MN, определяемая плоскостью, проходящей через (D).** Возьмем точку M на $X'AX$; она определит вместе с прямой (D) проходящую через них плоскость, и эта плоскость не будет перпендикулярна AB. Эта плоскость пересечет $y'Ay$ в точке M' такой, что $AM' = AM$. Отсюда следует, что плоскость (M, D) и плоскость $(AB, y'y)$ пересекаются по прямой OM', причем OM' пересекает $Y'Y$ в точке N такой, что $\frac{BN}{AM'} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$, откуда $BN = \frac{1}{2}AM$. Прямая MN, которая соединяет точки пересечения плоскости (M, D) с $X'X$ и $Y'Y$, следовательно, такова, что $AM = 2BN$ и на основании предыдущего $MN \perp Y'Y$.

4°. Ответ: $x = a\sqrt{2}$. Сфера с диаметром MN пересекает тогда AB в точке O и еще в точке O', симметричной O по отношению к основанию перпендикуляра, опущенного на AB из середины MN. Но середина MN проектируется в середину AB, а потому точка O' — это точка, лежащая на отрезке AB и такая, что $O'A = a$, $O'B = 2a$. При этом $\angle MO'N$, так же как и $\angle MON$, равен 90°.

5°. **Синус угла между AB и MON.** Пусть K — ортогональная проекция точки A на MM'. На основании теоремы о трех перпендикулярах $OK \perp MM'$; следовательно, плоскость AOK перпендикулярна плоскости OMN, а потому OK есть ортогональная проекция AB на плоскость OMN, и угол AB с плоскостью OMN — это угол AOK. Но $AM = 2a\sqrt{2}$, $AK = a\sqrt{2}$, откуда $\operatorname{tg} AOK = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и, значит, $\sin AOK = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

37. 1°. Длина AA' и угол AA' с OO'. Пусть B — ортогональная проекция A в плоскость окружности (C'); тогда $A'B = \text{const}$, так как $A'B$ — гипотенуза треугольника $A'Q'B$, катеты которого R и R' — постоянны, $AB = \text{const}$, ибо $AB = OO'$, значит, $AA' = \text{const}$ (как гипотенуза треугольника с постоянными катетами). Отсюда следует, что и $\angle BAA' = \text{const}$, (черт. 257). **Вычисление AA' и $(\widehat{OO', AA'})$.** Так как $OA = 15$, $O'A' = 20$, то $A'B = 25$, но и $AB = 25$, значит, $AA' = 25\sqrt{2}$ и $\angle BAA' = (\widehat{OO', AA'}) = 45°$.



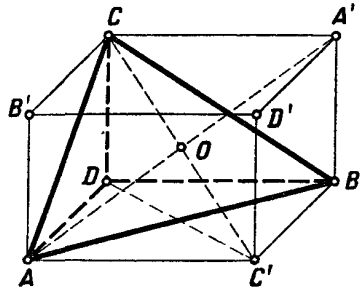
Черт. 257.

2°. **Общий перпендикуляр к OO' и AA'.** Общий перпендикуляр IK к AA' и OO' параллелен плоскости окружностей (C) и (C'), ибо OO' — перпендикуляр к этим плоскостям и проектируется на плоскость окружности (C') в отрезок $O'K'$, который является перпендикуляром из O' на $A'B$ (ибо одна из сторон, именно KI прямого угла IKA, параллельна плоскости проекции). Находим $\frac{BK'}{K'A'} = \frac{O'B^2}{O'A'^2} = \frac{15^2}{20^2} = \frac{9}{16}$ и далее $\frac{OI}{IO'} = \frac{AK}{KA'} = \frac{BK'}{K'A'} = \frac{9}{16}$, откуда $\frac{OI}{9} = \frac{IO'}{16} = \frac{OI + IO'}{9 + 16} = \frac{25}{25} = 1$, значит, $OI = 9$, $IO' = 16$. Значит, I — фиксированная точка. Так как $IK = O'K'$, то $O'K' = \frac{O'B \cdot O'A'}{BA'} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$. Итак, $IK = 12$.

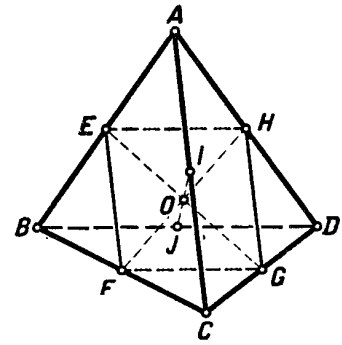
3°. Геометрическое место точек K. Из предыдущего следует, что точка K описывает окружность (Γ), радиус которой равен 12, центр I, а плоскость параллельна плоскостям окружностей (C) и (C').

Прямые (D) и (Δ), проходящие через точку K окружности (Γ). Пусть K — какая-нибудь точка окружности (Γ) и K' — ее проекция на плоскость (C'); так как $O'K' = IK = 12$, то точка K' лежит внутри окружности (C'). Проведем через точку K' хорду (C') перпендикулярно $O'K'$, пусть A' и α' — концы этой хорды. Имеем $A'K'^2 = O'A'^2 - O'K'^2 = 20^2 - 12^2 = 16^2$, откуда $A'K' = 16$, следовательно, $A'K' = K'K$. Отметим на продолжении отрезка $A'K'$ за точку K' точку B такую, что $O'B \perp O'A'$; проведем KA'; проведем через точку B прямую, параллельную KK'. Эти последние прямые пересекаются в точке A, и мы имеем $A'B = \frac{B'A^2}{A'K'} = \frac{20^2}{16} = 25 = BA$; значит, точка A лежит в плоскости круга (C). Далее $O'B = \frac{O'K' \cdot A'B}{A'O'} = \frac{12 \cdot 25}{20} = 15$, значит, $OA = 15$, а поэтому точка A лежит на окружности (C). Таким образом, прямая KA' пересекает окружность (C) в точке A; радиус OA, параллельный $O'B$, перпендикулярен радиусу $O'A'$ окружности (C'). Прямая KA' есть прямая (D). Аналогично доказывается, что прямая $K\alpha'$ пересекает окружность (C) в точке α; прямая $K\alpha'$—это прямая (Δ). Так как $\triangle KK'A'$ прямоугольный и равнобедренный, то $\angle (D, \Delta) = 90°$, прямые (D) и (Δ) взаимно-перпендикулярны.

38. Построим прямоугольный параллелепипед с ребрами $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$. Его диагонали AA', BB', CC', DD' будут тогда диаметрами сферы (O), описанной вокруг $DABC$. Обозначим через p, q и r расстояния вершин A, B, D



Черт. 258.



Черт. 259.

грани ABD до диаметра CC'. Треугольники CAC', CBC', CDC' — прямоугольные и поэтому $p \cdot 2R = AC' \cdot AC = DB \cdot AC = b\sqrt{a^2 + c^2}$ (черт. 258) и аналогично $q \cdot 2R = a\sqrt{b^2 + c^2}$, $r \cdot 2R = c\sqrt{a^2 + b^2}$. Очевидно, что квадрат любой из величин $b\sqrt{c^2 + a^2}$, $c\sqrt{a^2 + b^2}$, $a\sqrt{b^2 + c^2}$ меньше суммы квадратов других величин и, значит, меньше квадрата их суммы. Следовательно, треугольник со сторонами p, q, r существует. Площадь s этого треугольника можно определить из соотношения $16s^2 = 4q^2r^2 - (q^2 + r^2 - p^2)^2$, откуда $16s^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4R^4}(a^2 + b^2 + c^2)$. Но $4R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, значит, $16s^2R^2 = a^2b^2c^2$ и, значит, $s = \frac{abc}{4R}$.

39. 2°. Если E — середина AB, то F, G, H — середины BC, CD, DA и т. д.

3°. $AE = \frac{AB \cdot AC}{AC + BD}$.

4°. $EG = FH$ (диагонали прямоугольника равны); $EG = IJ$, значит, $FH = IJ$, значит, $IHJF$ — прямоугольник (параллелограмм с равными сторонами), но его стороны параллельны AB и CD, значит, $AB \perp CD$ (черт. 259).

40. 1°. Так как точка G делит отрезок $O\omega$ и DG_d в отношении 3, то $3\overline{\omega\omega_d} + \overline{OO_d} = 4\overline{GG'_d} = \overline{DH_d}$, но $\overline{DH_d} = \frac{1}{2}\overline{DD'} + \overline{OO_d}$, значит,

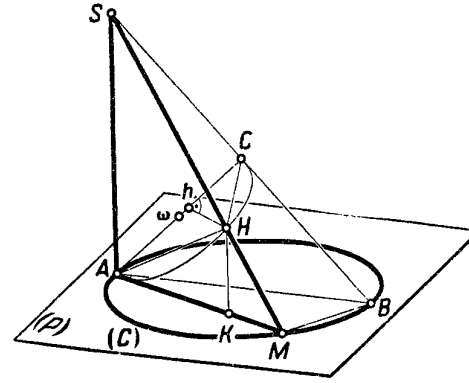
$$\overline{\omega\omega_d} = \frac{1}{6}\overline{DD'}. \qquad (1)$$

2°. Если сфера касается грани ABC, то точка касания непременно совпадает с точкой G_d и на основании (1) $\frac{1}{6}\overline{DD'} = \overline{\omega\omega_d} = \overline{\omega G_d} = \frac{R}{3}$ и $DD' = 2R$. Прямая $DD' =$

$= DH_d$ совпадает с осью OO_d окружности ABC и, значит, $DA = DB = DC$ и обратно 3°. Следствие 2°. 4°. Следствие 2°.

5°. Пусть G' — центр тяжести тетраэдра $A'BCD$; (ω') и (ω_1) — сферы двенадцати точек тетраэдров $A'BCD$ и A_1BCD. Точки G и G' делят отрезки AG_a и $A'G_a$ в отношении $\frac{AG}{GG_a} = \frac{AG'}{G'G_a} = 3$; значит, прямая $GG' \parallel AA'$, поэтому прямая GG' перпендикулярна плоскости BCD. С другой стороны, сферы (ω) и (ω') преобразуются из сферы (O) гомотетиями $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$ и $\left(G', -\frac{1}{3}\right)$; они поэтому равны, а кроме того, прямая $\omega\omega' \parallel GG'$ и, значит, прямая $\omega\omega'$ перпендикулярна плоскости BCD. Наконец, на основании (1) расстояния от точек ω и ω' до плоскости BCD равны $\frac{1}{6}\overline{AA'}$ и $\frac{1}{6}\overline{A'A}$, поэтому сферы (ω) и (ω') симметричны относительно плоскости BCD, и сфера (ω_1), которая симметрична сфере (ω') относительно этой плоскости, совпадает со сферой (ω). 6°. Относительно взаимного расположения тетраэдра (T) и сферы (ω) можно сделать следующие предположения: (ω) не касается ни одной грани (T); (ω) касается только одной грани (T); (ω) касается только двух граней (T); (ω) касается четырех граней (T). В первых трех предположениях грани тетраэдра высекают из сферы (ω) четыре, три или два сферических сегмента, расположенных вне (T). Проведем к этим сферическим сегментам касательные плоскости, параллельные соответствующим граням тетраэдра (T). Мы получим тетраэдр (T_1), для которого сфера (ω_1) вписанная. Так как соответствующие грани тетраэдров (T) и (T_1) параллельны или совпадают, то тетраэдр (T_1) из тетраэдра (T) получается в результате некоторой гомотетии с коэффициентом $k > 1$. Сфера (ω), вписанная в тетраэдр (T_1), при этой гомотетии переходит в сферу (I) радиуса r, вписанную в (T) и, значит, $\frac{R}{3} = kr$, где $k > 1$, т. е. $\frac{R}{r} = 3k > 3$. Для правильного тетраэдра (T) и (T_1) совпадают; $k = 1$ и $\frac{R}{r} = 3$. Итак, минимум отношения $\frac{R}{r}$ равен 3, и он достигается лишь для правильного тетраэдра.

41. 1°. Ортогональность AB и CD. Предположим, что ортогональная проекция a точки A на грань BCD лежит на высоте BH треугольника BCD. Прямая Aa ортогональна CD, $BH \perp CD$. Прямая CD, таким образом, перпендикулярна плоскости, содержащей прямые Aa и BH, значит, ортогональна прямой AB, лежащей в этой плоскости.



Черт. 260.

2°. Обратное положение формулируется так: если два ребра AB и CD тетраэдра ортогональны, то ортогональная проекция точки A на плоскость BCD расположена на высоте BH треугольника BCD. В самом деле, $Aa \perp CD$, так как Aa перпендикулярна плоскости BCD. Плоскость BAa содержит две прямые: Aa и AB, ортогональные CD, и, значит, она перпендикулярна CD. Следовательно, $Ba \perp CD$. Итак, ортогональная проекция a точки A на BCD лежит на высоте BH треугольника BCD.

3°. b, c, d — ортоцентры граней, если a — ортоцентр грани BCD. Докажем, например, что если a — ортоцентр грани BCD, то b — ортоцентр ACD. В самом деле, если a — ортоцентр BCD, то прямые Ba, Ca и Da — высоты треугольника BCD. На основании 1° заключаем, что $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$. Из 2° следует, что если $AB \perp CD$, то ортогональная проекция b точки B на ACD лежит на высоте треугольника ACD; аналогично из ортогональности AC и BD следует, что точка b лежит на высоте треугольника ACD, выходящей из вершины D; наконец, из ортогональности AD и BC следует, что точка b лежит на высоте треугольника ACD, выходящей из вершины C. Итак, b — ортоцентр треугольника ACD. Аналогично доказывается, что c и d — ортоцентры треугольников ABD и ABC.

42. 1°. Перпендикулярность плоскостей SAM и SBM. Угол AMB прямой. Прямая AS перпендикулярна плоскости (P) и, значит, $AS \perp MB$; отсюда следует, что MB — перпендикуляр к плоскости SAM, а так как плоскость SMB проходит через прямую MB, то и она перпендикулярна плоскости SAM (черт. 260).

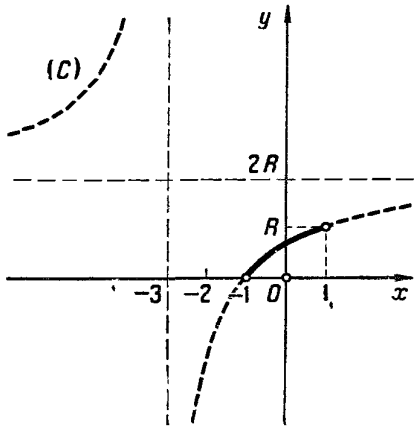
Ортогональность AH и SB. Прямая AH, проведенная через точку A плоскости SAM перпендикулярно линии SM пересечения двух перпендикулярных плоскостей ASM и BSM, будет перпендикулярна плоскости BSM, значит, $AH \perp SB$.

Геометрическое место прямых AH. Прямая AH ортогональна прямой SB; значит, прямая AH лежит в плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно SB. Обратно: пусть AH — любая прямая плоскости (Q), проходящей через A перпендикулярно SB. Тогда плоскость SAH пересекает (P) по прямой AM, и, как уже было доказано, плоскость SMB будет перпендикулярна плоскости SAM. Эти плоскости пересекаются по прямой SM; прямая AH будет перпендикулярна SM. Итак, геометрическое место прямых AH есть плоскость (Q), проходящая через A перпендикулярно SB.

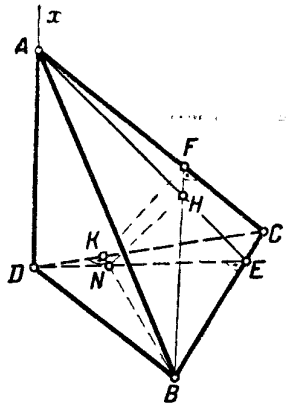
Геометрическое место точек H. Пусть C — точка, в которой плоскость (Q) пересекает SB; точка C — середина SB, ибо $AB = AS$. Соединим C и H; так как прямая AH перпендикулярна плоскости SBM, то она перпендикулярна и HC. Значит, $\angle AHC = 90°$. Геометрическое место точек H есть окружность, построенная на AC как на диаметре; ее центр ω — середина AC, радиус равен $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

2°. **Расстояние y от точки H до плоскости (P).** Ответ: $y = \frac{2R\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$. Если $y = d$, то $\cos x = \sqrt{\frac{d}{2R-d}}$. Решение возможно при условии, что $0 < \frac{d}{2R-d} < 1$, т. е. $d < R$.

Геометрическое решение. Геометрическое место точек H есть окружность с диаметром AC, лежащая в плоскости (Q). Пусть h—точка прямой AC, расстояние которой до AB равно d. В плоскости (Q) геометрическое место точек расположенных на расстоянии d от плоскости (P), есть перпендикуляр в точке h к прямой AC. Точка H получается в пересечении этого перпендикуляра с окружностью, являющейся геометрическим местом точек H. Задача имеет два решения, симметричные относительно AC. 3°. $y = 2R\frac{X+1}{X+3}$; при этом $-1 \leqslant X \leqslant 1$. Соответствующая дуга гиперболы выделена на черт. 261.



Черт. 261.



Черт. 262.

43. 1°. Ортогональность плоскостей ADE и ABC (черт. 262). Ребро AD перпендикулярно плоскости BDC; значит, перпендикулярно прямой BC, лежащей в этой плоскости. Ребро BC ортогонально AD, а также высоте DE; значит, прямая BC перпендикулярна плоскости ADE. Плоскость ABC проходит через прямую BC, поэтому плоскости ABC и ADE также перпендикулярны.

2°. **а) Ортогональность плоскостей BFK и ABC.** Прямая $BK \perp AD$, потому что она расположена в плоскости DBC, перпендикулярной AD; по построению также $BK \perp DC$. Значит, BK — перпендикуляр к плоскости ADC и, значит, $BK \perp AC$. Далее $AC \perp BF$, значит, AC — перпендикуляр к плоскости BKF. Плоскость ABC проходит через прямую AC; значит, плоскости ABC и BKF также перпендикулярны (черт. 262).

б) Ортоцентр H треугольника BAC. Плоскости ADE и BFK перпендикулярны плоскости ABC и, значит, пересекаются по прямой, перпендикулярной

плоскости ABC. Одна из точек, общая этим плоскостям, есть точка N пересечения DE и BK — ортоцентр треугольника BDC; другая точка, общая плоскостям ADE и BFK, есть точка H пересечения AE и BF; эта точка H есть ортоцентр треугольника ABC; в самом деле, AE — высота ABC, так как BC есть перпендикуляр к плоскости ADE. Прямая NH, следовательно, перпендикулярна плоскости ABC, и ортоцентр H треугольника ABC есть ортогональная проекция ортоцентра N треугольника BCD на плоскость ABC.

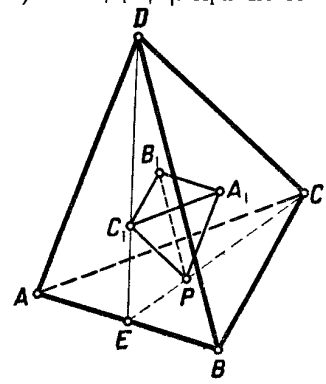
3°. **Геометрическое место точек H.** Если A описывает полупрямую Dx, плоскость ADE остается фиксированной, точки N и E этой плоскости также фиксированы. Мы видели, что точка H есть ортогональная проекция точки N в плоскость ABC; значит, $\angle NHE = 90°$. Следовательно, геометрическое место точек H есть полуокружность плоскости xDE, построенная на NE как на диаметре.

Геометрическое место точек F. Так как плоскость BFK перпендикулярна плоскости ABC, а прямая AC перпендикулярна линии BF их пересечения, то AC—перпендикуляр к плоскости BFK; значит, $AC \perp FK$. Поэтому $\angle KFC = 90°$; следовательно, если точка A описывает полупрямую Dx, то точки C и K остаются фиксированными, так же как и плоскость ADC. Геометрическое место точек F есть, следовательно, полуокружность плоскости xDC с диаметром CK.

4°. **Сфера, проходящая через шесть точек: C, E, H, F, K, N.** Рассмотрим четырехугольник, образованный четырьмя точками: C, E, N, K. Его противоположные углы E и K прямые. Далее, отрезок HN перпендикулярен плоскости ABC; значит, отрезок NC из точек E, K, H виден под прямым углом. Итак, пять точек: N, C, E, K, H лежат на сфере с диаметром NC. Далее, прямая AC перпендикулярна плоскости BFK, следовательно, перпендикулярна и прямой NF этой плоскости; $\angle NFC = 90°$; значит, точка F лежит на той же сфере. Итак, шесть точек: C, E, N, F, K, H лежат на одной и той же сфере с диаметром NC; ее центр — середина отрезка NC, радиус равен половине отрезка NC.

Глава XXV. Разные задачи

3. Правильный шестиугольник. **16.** Исходный треугольник — остроугольный. Сумма косинусов внутренних его углов равна 2. **20.** Обозначим через s, α, β и γ площади треугольников ABC, PBC, PCA и PAB; тогда (черт. 263) $s = \alpha + \beta + \gamma$. Прямые CP и DC_1 пересекаются в точке E, лежащей на AB, имеем $\frac{PC_1}{DC} = \frac{EP}{EC} = \frac{\gamma}{s}$. Аналогично $\frac{PA_1}{DA} = \frac{\alpha}{s}$, $\frac{PB_1}{DB} = \frac{\beta}{s}$. Трехгранные углы $D\,(ABC)$ и $P\,(A_1B_1C_1)$ равны (ребра соответственно параллельны), поэтому их объемы относятся как произведения сторон $\frac{v_1}{v} = \frac{PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1}{DA \cdot DB \cdot DC} = \frac{\alpha\beta\gamma}{s^3}$. Объем v_1 будет максимальным, если $\alpha\beta\gamma$ будет максимально, а так как $\alpha + \beta + \gamma = \text{const}$, то $\alpha\beta\gamma$ будет максимально при условии $\alpha = \beta = \gamma$; в этом случае точка P совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.



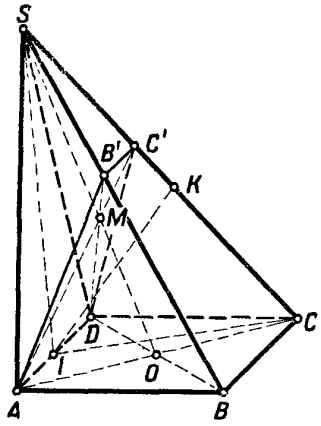
Черт. 263.

21. 1°. **Грани тетраэдра $ABMN$.** $AB \perp (D)$ и $AB \perp (\Delta)$; значит, грани ABM и ABN — прямоугольные треугольники (прямые углы A и B). Так как $(D) \perp (\Delta)$, то (D) перпендикулярна плоскости, образованной прямыми (Δ) и AB; значит, (D) перпендикулярна и AN и, значит, $\angle MAN = 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle BMN = 90°$.

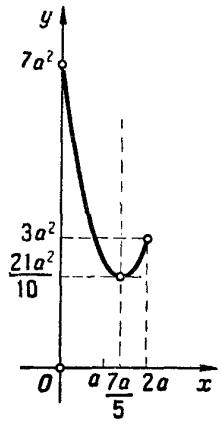
2°. **Сфера, описанная вокруг тетраэдра $ABMN$.** Углы MAN и MBN прямые; значит, точки A и B лежат на сфере с диаметром MN. Центр Ω этой сферы — середина MN.

Геометрическое место середин MN. Середина Ω отрезка MN равноотстоит от фиксированных точек A и B; значит, точка Ω лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку. Пусть Ox и Oy — прямые, параллельные (D) и (Δ), проведенные через середину O отрезка AB. Они лежат в плоскости, проходящей через середину отрезка AB, перпендикулярно этому отрезку. Обратно. Пусть Ω — любая точка этой плоскости и пусть сфера с центром Ω, проходящая через A и B, пересекает (D) и (Δ) в точках M и N. Тогда точки M и N — диаметрально противоположные точки этой сферы, так как $\angle NAM = \angle NBM = 90°$; значит, Ω — середина MN; итак, геометрическое место середин отрезков MN есть плоскость, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно к этому отрезку.

Геометрическое место точек Ω, если $MN = 2l$. Если $MN = 2l\ (> AB)$, то $A\Omega = \Omega B = \frac{1}{2} MN = l$. Значит, геометрическое место точек Ω состоит из тех точек плоскости xOy, которые отстоят от A на расстоянии l, — это окружность, лежащая в плоскости xOy с центром O и радиусом $\sqrt{l^2 - \frac{1}{4} AB^2}$.



Черт. 264.



Черт. 265.

4°. $v = \frac{1}{6} dn^2$.

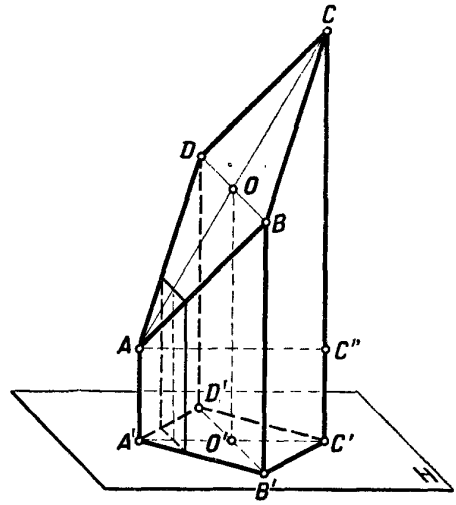
22. 1°. Геометрическим местом точек M является отрезок SO, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD (черт. 264).

2°. $y = \frac{5}{2} x^2 - 7ax + 7a^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2a$. При изменении x от 0 до $\frac{7a}{5}$, y убывает от $7a^2$ до $\frac{21a^2}{10}$; при изменении x от $\frac{7a}{5}$ до $2a$, y возрастает от $\frac{21a^2}{10}$ до $3a^2$ (черт. 265).

3° и 4°. Если $l^2 < \frac{21a^2}{10}$, задача не имеет решения; если $l^2 = \frac{21a^2}{10}$, задача имеет одно решение; если $\frac{21a^2}{10} < l^2 < 3a^2$, задача имеет два решения; если $3a^2 < l^2 < 7a^2$, задача имеет одно решение; если $l^2 > 7a^2$, задача не имеет решений.

5°. Точка C' является точкой пересечения ребра SC со сферой, центр которой I есть середина AD, а радиус равен $\sqrt{\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{4} a^2}$. Расстояние от точки I до SC равно $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Отсюда, сравнивая $\sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$ и $\frac{2a}{\sqrt{5}}$, получим результаты предыдущего исследования.

23. 1°. Ромб $ABCD$ (черт. 266) проектируется на плоскость (H) в ромб $A'B'C'D'$, поскольку одна из сторон прямого угла между диагоналями BD и AC параллельна плоскости (H). Далее, $A'C' = AC \cos 60° = 4a \cdot \frac{1}{2} = 2a$, а потому $A'C' = B'D'$ и, значит, $A'B'C'D'$ — квадрат. Рассмотрим плоскость, проходящую через AC и перпендикулярную плоскости (H). Эта плоскость есть плоскость симметрии ромба $ABCD$, потому что она проходит через середину O диагонали BD ромба и перпендикулярна отрезку BD. По той же причине эта плоскость есть плоскость симметрии квадрата $A'B'C'D'$; отсюда следует, что эта плоскость есть плоскость симметрии (T). Плоскости, проектирующие отрезки AC и BD на плоскость (H), взаимно перпендикулярны, так как BD перпендикулярна плоскости $ACC'A'$ (черт. 266).

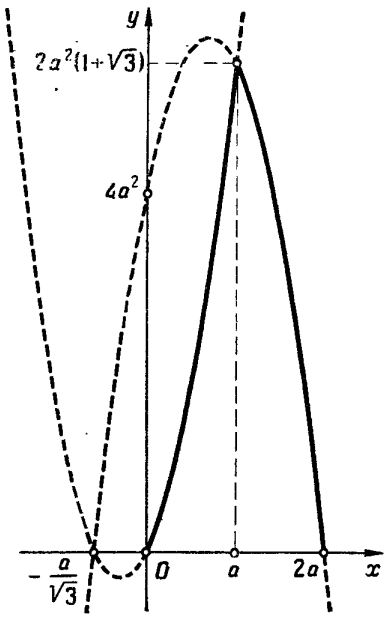


Черт. 266.

2°. **Ребра, полная поверхность и объем (T).** Ответы: $A'B' = a\sqrt{2}$, $AB = a\sqrt{5}$, $CC' = a(1 + 2\sqrt{3})$, $BB' = DD' = a(1 + \sqrt{3})$. Для вычисления полной поверхности (T) и объема удобно дополнить (T) до прямой призмы. Пусть O_1 — точка, симметричная точке O' относительно O. Проведем через точку O_1

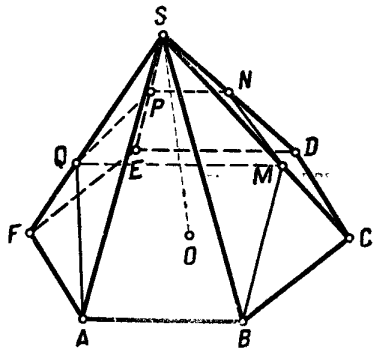
плоскость, параллельную (H), и пусть она пересечет продолжение боковых ребер (T) в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и т. д. Полная поверхность (T) равна $S=2a^2(3+2\sqrt{3}+2\sqrt{6})$; объем $v=2a^3(1+\sqrt{3})$.

3°. **Сечения (T) плоскостями (P).** Так как боковые противоположные грани (T) параллельны, то в сечении (T) плоскостью (P) получится параллелограмм. Для того чтобы этот параллелограмм был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы один из его углов был бы прямым; угол сечения, вершина которого расположена на AA', проектируется в прямой угол A' квадрата $A'B'C'D'$. Однако прямой угол проектируется ортогонально в прямой тогда и только тогда, когда одна из его сторон параллельна плоскости, на которую производится проектирование. Таким образом, в сечении получится прямоугольник тогда и только тогда, когда секущая плоскость (P) параллельна одной из сторон квадрата $A'B'C'D'$. Для того чтобы сечение было ромбом, необходимо и достаточно, чтобы диагонали сечения были взаимно-перпендикулярны, а так как эти диагонали проектируются во взаимно-перпендикулярные диагонали $A'C'$ и $B'D'$ квадрата $A'B'C'D'$, то одна из диагоналей сечения должна быть параллельна плоскости (H), следовательно, и одной из диагоналей $A'C'$ или $B'D'$ квадрата; значит, секущая плоскость (P) должна быть параллельна одной из диагоналей квадрата $A'B'C'D'$. Наконец, для того чтобы сечение было квадратом, необходимо и достаточно, чтобы плоскость (P) была параллельна и стороне, и диагонали квадрата, лежащего в плоскости (H), и, значит, (P) должна быть параллельна (H).



Черт. 267.

4°. **Сечения (T) плоскостями, параллельными BD.** Эти плоскости пересекают $ABCD$ и $A'B'C'D'$ по прямым, параллельным BD, а боковые грани — по прямым, перпендикулярным (H). Следовательно, в сечении получается прямоугольник. Рассмотрим два случая — первый, когда секущая плоскость пересекает

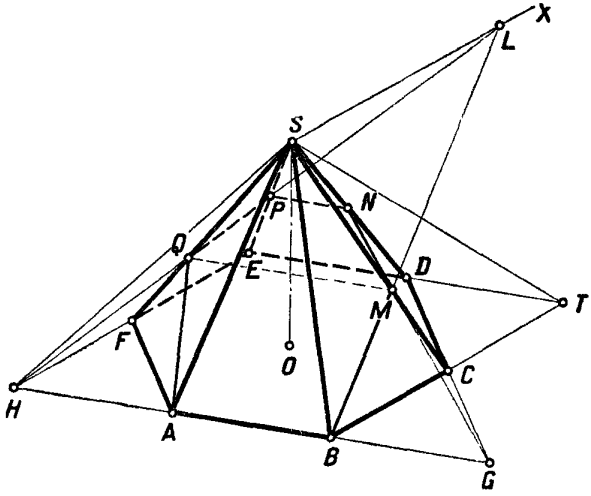


Черт. 268.

диагональ $A'C'$ в точке, расположенной между A' и O', и второй, когда эта точка лежит между точками O' и C', иначе говоря, I: $0<x<a$ и II: $a<x<2a$. I. В этом случае $s=2x(a+x\sqrt{3})$; в случае II $s=2(2a-x)(a+x\sqrt{3})$. В первом случае график функции $s=2x(a+x\sqrt{3})$ — дуга параболы, ось которой $x=-\frac{a\sqrt{3}}{6}$, а вершина $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}, -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$; эта дуга ограничена началом координат и точкой $[a, 2a^2(1+\sqrt{3})]$. В случае II кривая $s=2(2a-x)(a+x\sqrt{3})$ — также дуга параболы, выпуклость которой направлена вниз; ось $x=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, вершина $\left[a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right), \frac{a^2}{6}(12+13\sqrt{3})\right]$; эта дуга ограничена точками $[a, 2a^2(1+\sqrt{3})]$ и $(2a, 0)$ (черт. 267).

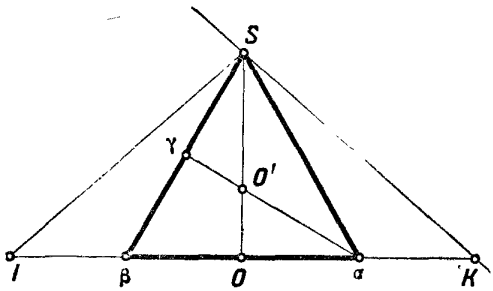
24. 1°. **Изучение сечения $ABMNPQ$** (черт. 268). Плоскостью симметрии сечения является плоскость, проходящая через вершину S перпендикулярно AB. Далее $PN \parallel MQ \parallel AB$. Прямая BM проходит через фиксированную точку B.

Прямая QA — через точку A. Прямая MN проходит через точку G пересечения прямых AB и CD. Прямая PQ проходит через точку H пересечения прямых AB и EF (черт. 269).



Черт. 269.

2°. **Геометрическое место точек пересечения пар прямых (*MN* и *PQ*), (*BM* и *AQ*).** *MN* и *PQ* симметричны по отношению к плоскости (*П*), проходящей через середину *AB* перпендикулярно *AB*. Значит, точка пересечения этих прямых лежит в плоскости (*П*); то же относится и к точке пересечения прямых *BM* и *AQ*. Рассмотрим сечения данной фигуры плоскостью (*П*) (треугольник $\alpha S\beta$ (черт. 270), где α и β — середины сторон *AB* и *DE*). Легко доказать, что этот треугольник равносторонний (сторона равна $a\sqrt{3}$). Отметим еще в плоскости основания пирамиды точки *K*, *G*, *T* и *I* пересечения продолжений сторон (черт. 271). Прямые *MN* и *PQ* суть прямые пересечения переменной плоскости с плоскостями граней *CSD* и *EFS*. Эти плоскости пересекаются по прямой *SI* и геометрическое место точек *L* пересечения *MN* и *PQ* есть отрезок *SI* (см. черт. 270), причем $\beta I = O\beta = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Прямые *BM* и *AQ* суть прямые пересечения переменной плоскости с плоскостями граней *CSD* и *EFS*. Эти плоскости пересекаются по прямой *SK*, и, как видно из чертежей, точка *L'* их пересечения описывает продолжения *KY* и *SY'* отрезка *SK* за точки *S* и *K*; прямые *BM* и *AQ* параллельны, если секущая плоскость параллельна прямой *SK*; точка *L'* в этом случае — бесконечно удаленная точка прямой *SK*.

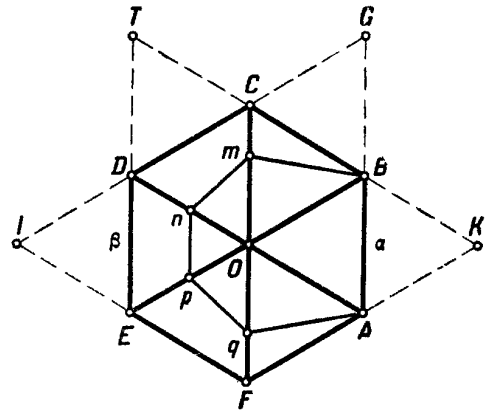


Черт. 270.

Геометрическое место точек пересечения *BM* и *PQ*; *AQ* и *MN*. *AD* и *MN* симметричны *BM* и *PQ* по отношению к плоскости (*П*), поэтому достаточно рассмотреть пару прямых *BM* и *PQ*. Прямые *BM* и *PQ* суть пересечения переменной плоскости с плоскостями граней *BSC* и *EFS*; одна из этих плоскостей проходит через *BC*, другая—параллельна *BC*. Значит, прямая, по которой они пересекаются, есть прямая *SX*, проходящая через *S* параллельно *BC*. Прямые *BM* и *PQ* пересекаются в точке *L луча SX*, идущего в направлении вектора $\overrightarrow{BC}$; все точки этого луча и есть геометрическое место точек пересечения прямых *BM* и *PQ*.

Геометрическое место точек пересечения *BM* и *PN*, *AQ* и *PN*. Рассмотрим лишь пару прямых: *BM*, *PN*. Прямые *BM* и *PN* пересекаются на прямой *ST*. Геометрическое место точек их пересечения есть отрезок *ST*.

3°. В треугольнике SEH, SF и HP — медианы, пересекающиеся в точке Q; значит, $SQ = \frac{2}{3} SF$. Аналогично из $\triangle SDG$ имеем $SM = \frac{2}{3} SC$. Площадь сечения $ABMNPQ$ равна $\frac{13a^2}{8}$. Объем пирамиды $SABMNPQ$ равен $\frac{13a^3\sqrt{3}}{48}$.



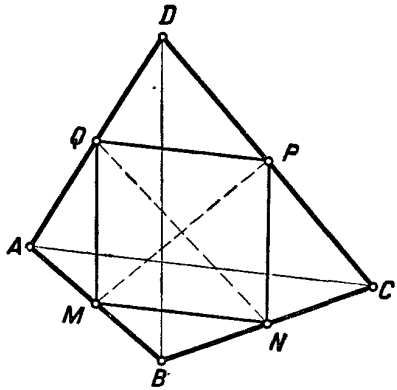
Черт. 271.

25. 1°. Существует 6 отрезков, соединяющих данные точки попарно: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Будем называть отрезки противоположными, если они не имеют общей вершины. Имеется три пары противоположных отрезков: (AB, CD), (AC, BD) и (AD, BC). Пространственный четырехугольник мы получим, опуская какую-нибудь пару пространственных отрезков; значит, имеется три различных пространственных четырехугольника: $ABCD$, $ACBD$, $ABDC$.

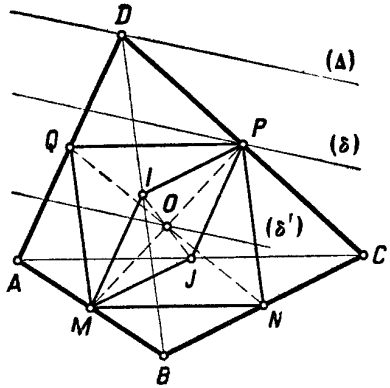
Общая часть двух четырехугольников. Так как каждый пространственный четырехугольник мы получаем опуская пару противоположных отрезков, то у двух пространственных четырехугольников имеется пара общих противоположных отрезков.

2°. Фигура $MNPQ$ — параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD четырехугольника $ABCD$. Аналогично и для четырехугольников $ACBD$ и $ABDC$ (черт. 272).

Общая часть двух параллелограммов. Мы видели в п. 1°, что два пространственных четырехугольника имеют пару общих противоположных сторон; следовательно, соответствующие параллелограммы имеют две противоположные вершины и, значит, и общие диагонали.



Черт. 272.



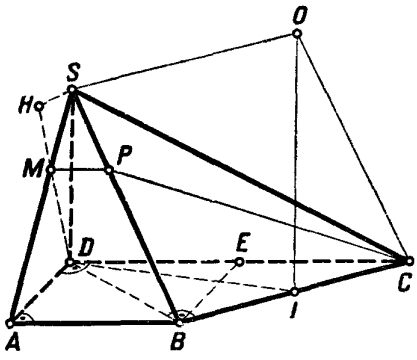
Черт. 273.

3°. Фигура, образованная отрезками, соединяющими середины противоположных сторон и середины диагоналей, состоит из трех отрезков: QN, MP и IJ (черт. 273), пересекающихся в точке O — середине каждого из них.

4°. Так как $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, то если D описывает прямую (Δ), то P описывает прямую (δ), полученную из (Δ) гомотетией $\left(C, \frac{1}{2}\right)$. Так как A и B фиксированы, то M — фиксирована. Так как $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP}$, то O соответствует P в гомотетии $\left(M, \frac{1}{2}\right)$; значит, если P описывает (δ), то O описывает прямую (δ'),

параллельную (δ), следовательно, и (Δ). Итак, геометрическое место центров параллелограммов $MNPQ$ есть прямая (δ'), параллельная (Δ).

26. 1°. Боковые грани пирамиды $SABCD$ (черт. 274). SD перпендикулярно плоскости $ABCD$, следовательно, грани SDA и SDC — прямоугольные треугольники (прямые углы при вершине D). Если мы опустим перпендикуляр BE на DC, то мы получим квадрат $ABED$; значит, $BE = ED = EC$; треугольник BDC, следовательно, прямоугольный (прямой угол B). Углы SAB и SBC проектируются ортогонально в плоскость $SBCD$ в углы DAB и DBC; значит, эти углы прямые. Итак, боковые грани пирамиды $SABCD$ — прямоугольные треугольники.

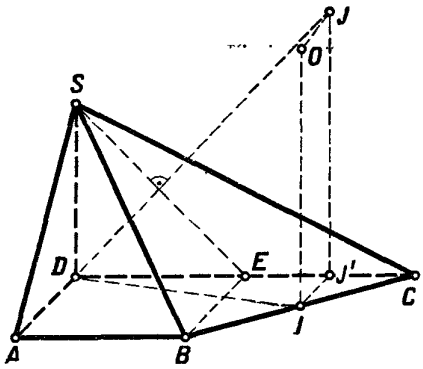


Черт. 274.

2°. Величина DI. $DI = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Сфера, проходящая через точки S, B, E и C. Ось окружности, проходящей через точки B, E и C, есть прямая, перпендикулярная в точке I плоскости $ABCD$. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки B, E, C, S и R — ее радиус, тогда $R^2 = \overline{OS}^2 = \overline{OC}^2$. Так как $\angle OIC = 90°$, то $\overline{OC}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IC}^2$, и из прямоугольной трапеции $SDIO$: $\overline{OS}^2 = \overline{DI}^2 + (DS - OI)^2 = DI^2 + DS^2 - 2OI \cdot DS + OI^2$; отсюда $IC^2 + OI^2 = DI^2 + DS^2 - 2OI \cdot DS + OI^2$; значит, $2OI \cdot DS = DI^2 + DS^2 - IC^2 = \frac{10a^2}{4} + a^2 - \frac{2a^2}{4} = 3a^2$, откуда, наконец, $OI = \frac{3a}{2}$. Этим фиксирован центр. Радиус $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Другое решение (черт. 275). Центр O искомой сферы есть точка пересечения осей окружностей, описанных вокруг треугольников BEC и SEC тетраэдра. Первая ось проходит через точку I и параллельна DS; вторая—проходит через точку пересечения медиатрис отрезков SE и EC. Если J' — середина EC, то так как $DJ'J$ — равнобедренный и прямоугольный треугольник то $J'J = DJ' = \frac{3a}{2}$. Эта вторая ось параллельна $J'I$ и пересекает первую в искомом центре O таком, что $IO = \frac{3a}{2}$.



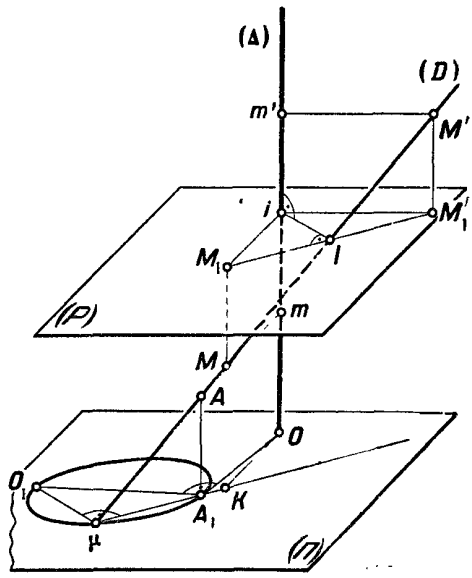
Черт. 275.

3°. Тип четырехугольника $DMPC$. Плоскость MDC содержит DC, а $DC \parallel AB$, поэтому плоскость MDC пересекает плоскость SAB по прямой $MP \parallel DC$; четырехугольник $DMPC$, следовательно, — трапеция. Более того, плоскость MDC перпендикулярна плоскости SDA потому, что она содержит прямую CD, перпендикулярную этой плоскости. Углы M и D, следовательно, прямые. Итак, трапеция $DMPC$ прямоугольная; M и D — прямые углы.

Объем $SDMPC$. Опустим из точки S перпендикуляр SH на DM. Он будет вместе с тем перпендикуляром к плоскости $DMPC$; значит, SH — высота пирамиды $SDMPC$. Объем пирамиды $SDMPC$ будет равен $v = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{MD\,(DC + MP)}{2}$; но $\frac{SH \cdot MD}{2}$ — площадь треугольника SDM. Имеем $\frac{\text{пл. } \triangle SDM}{\text{пл. } \triangle SDA} = \frac{SM}{SA} = \frac{x}{a\sqrt{2}}$, откуда пл. $\triangle SDM = \frac{x}{a\sqrt{2}}$, пл. $\triangle SDA = \frac{ax}{2\sqrt{2}}$; далее, $\frac{MP}{AB} = \frac{SM}{SA}$, значит, $MP = \frac{ax}{a\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$, откуда $v = \frac{1}{12} ax\,(2a\sqrt{2} + x)$. Если $v = \frac{5a^2}{24}$, то $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — точка M совпадает с серединой отрезка SA.

27. 1°. Построение M' (черт. 276). Пусть m — проекция M на (Δ); возьмем на прямой (Δ) точку m' такую, что $mm' = h$, затем повернем полуплоскость (M, Δ) на угол $+\frac{\pi}{2}$, а в этой последней полуплоскости проведем через точку m' луч, перпендикулярный (Δ); точка M' есть точка этого луча такая, что $m'M' = mM$.

Построение M и M', если известна середина I отрезка MM'. Проведем через точку I плоскость (P), перпендикулярную (Δ); пусть M_1 и M_1' — проекции точек M и M' на эту плоскость. Обозначим через i проекцию I на (Δ). Угол M_1iM_1' — линейный угол двугранного угла $M(\Delta)M'$, а потому $\angle M_1iM_1' = \frac{\pi}{2}$. Далее, $iM_1 = mM$, $iM_1' = m'M'$, значит, $iM_1 = iM_1'$ и $\triangle M_1iM_1'$ прямоугольный и равнобедренный. Значит, iI — одновременно и медиана и высота и $IM_1 = IM_1' = iI$. Чтобы построить точки M и M', достаточно провести в плоскости (P) перпендикуляр к iI и взять на нем точки M_1 и M_1' такие, что $IM_1 = IM_1' = iI$, затем восставить в точках M_1 и M_1' перпендикуляры к (P) и отложить на них отрезки $M_1M = -\frac{h}{2}$ и $M_1'M' = \frac{h}{2}$ (черт. 276).



Черт. 276.

Соотношение между d, α и h. $iI = d$ есть кратчайшее расстояние между (D) и (Δ), так как iI перпендикулярна к (D) и (Δ). Так как $\triangle IM'M_1'$ — прямоугольный, то $IM_1' = M'M_1' \operatorname{tg}\alpha$. Но $IM_1' = Ii = d$, $M'M_1' = \frac{h}{2}$, значит, $d = \frac{h}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Прямые (D), проходящие через точку A. Рассмотрим плоскость (Π), перпендикулярную (Δ) и такую, что проекция A_1 точки A на эту плоскость отстоит от точки A на расстоянии $\frac{h}{2}$; $AA_1 = \frac{h}{2}$. Пусть μ — точка, в которой прямая (D) пересекает (Π); тогда $\mu A_1 = d$, где d — расстояние между (D) и (Δ). Это также расстояние от точки O пересечения (Π) и (Δ) до проекции прямой (D) на плоскость (Π), $OK = d$. Значит, конус, образованный прямыми (D), проходящими через точку A, пересекает плоскость (Π) по геометрическому месту точек μ таких, что $A_1\mu = OK$. Обозначим через O_1 точку пересечения перпендикуляра к $A_1\mu$ в точке μ с перпендикуляром к OA_1 в A_1. Треугольники OA_1K и $A_1\mu O_1$ равны, так как $A_1\mu = OK$, $\angle OKA_1 = \angle A_1\mu O_1 = \frac{\pi}{2}$ (и $\angle A_1OK = \angle \mu A_1O_1$ как углы с перпендикулярными сторонами). Значит, $A_1O_1 = OA_1$; точка O_1 фиксирована, а так как $\angle A_1\mu O_1 = \frac{\pi}{2}$, то геометрическое место точек μ есть окружность, построенная на A_1O_1 как на диаметре — это направляющая окружность конуса (A — его вершина); конус — круговой, наклонный.

Пересечение (D) и (D'). Пусть (D) — прямая MM'; обозначим через M'' образ M' в преобразовании (H). Образ (D') прямой (D) есть прямая $M'M''$; она пересекает (D) в точке M'. Обратно: пусть (L) — такая прямая, которая пересекает свой образ (L') в преобразовании (H), и λ' — точка их пересечения. Обозначаем через λ прообраз λ'; точка λ лежит на (L), так как ее образ λ' лежит на (L'). Значит, (L) — прямая (D). Таким образом, необходимое и достаточное условие того, что прямая есть прямая (D), состоит в том, что эта прямая и ее образ (D') должны иметь общую точку.

3°. Геометрическое место точек I при условии, что M зачерчивает плоскость (P). Точка I из точки M может быть получена в результате переноса $\frac{h}{2}$,

поворота вокруг (Δ) на угол $\frac{\pi}{4}$ и аксиального подобия (ось Δ) с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Все эти преобразования плоскость переводят в плоскость. Значит, геометрическое место точек I есть плоскость. Заметим, что если точка M описывает прямую (L), а точка M' описывает ее образ — (L'), то геометрическое место точек I есть также прямая линия. Значит, если рассмотреть две прямые плоскости (P), то геометрическое место точек I при условии, что точка M зачерчивает плоскость (P), будет плоскость, определяемая двумя прямыми, ассоциированными указанным образом с выбранными прямыми.

Геометрическое место точек M — плоскости (P), образы которых лежат также в плоскости (P). Пусть (P) — произвольная плоскость, а (P') — ее образ. (L') — прямая, по которой пересекаются (P) и (P'); (L) — прообраз (L'). Прямая (L) лежит в плоскости (P), так как прямая (L') лежит в плоскости (P'). Прямая (L) и состоит из тех точек плоскости (P), образы которых лежат также в плоскости (P) [так как прямая (L') лежит также и в плоскости (P)].

Огибающая прямых (D) плоскости (P). Пусть M — произвольная точка прямой (L) плоскости (Π), а M' — ее образ, лежащий на (L'). Тогда MM' — это прямая (D) плоскости (P). Обозначим через U' точку пересечения прямых (L) и (L'), а через U — прообраз U'. Отрезки UM и $U'M'$ равны; значит, если M_1 и M_2 — два положения точки M на прямой (L), а M_1' и M_2' — их образы (они лежат на прямой L'), то $M_1M_2 = M_1'M_2'$. Но в таком случае прямая MM' огибает параболу, касающуюся прямых (L) и (L') соответственно в точках U и U'', где U'' — образ U'.

28. I. Изучение иррационального уравнения. 1°. Число неотрицательных значений x, соответствующих положительному значению y. Пусть m — какое-нибудь положительное значение y. Найдем, сколько значений x соответствуют условию

$$m = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}, \quad x \geqslant 0, \quad \text{где } \alpha > 1 \text{ и } \beta > 0. \tag{1}$$

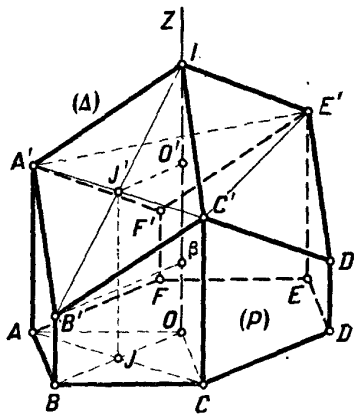
Эта смешанная система эквивалентна следующей: $m + x = \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, или следующей $(m + x)^2 = \alpha x^2 + \beta$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Окончательно x найдем из условий

$$(\alpha - 1)x^2 - 2mx + \beta - m^2 = 0, \quad x \geqslant 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 0. \tag{2}$$

Мы видим, что если $m > \sqrt{\beta}$, то так как $\alpha > 1$, то крайние коэффициенты квадратного уравнения будут разных знаков, уравнение имеет два корня противоположных знаков, а задача — одно решение. Если $0 < m \leqslant \sqrt{\beta}$, то произведение $\frac{\beta - m^2}{\alpha - 1}$ и сумма корней уравнения (2), т. е. дробь $\frac{2m}{\alpha - 1}$, больше или равна 0. Условие действительности корней: $m \geqslant \sqrt{\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha}}$. Так как это число меньше, чем $\sqrt{\beta}$, окончательно имеем: 1) если $0 < m < \sqrt{\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha}}$, то ни какому значению $x \geqslant 0$ не соответствует положительного значения y; 2) если $\sqrt{\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha}} \leqslant m \leqslant \sqrt{\beta}$, то два значения x соответствуют заданному значению $y = m$; 3) если $m > \sqrt{\beta}$, то лишь одно положительное значение x соответствует заданному положительному значению $y = m$.

2°. Минимум функции y. Из соотношения (1) следует, что каждому значению $x \geqslant 0$ соответствует единственное положительное значение y, так как если $x \geqslant 0$, то в силу $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ имеем $\sqrt{\alpha x^2 + \beta} > x$ и, значит, $y > 0$. Из I, 1° следует, что если $y < \sqrt{\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha}}$, то никакое положительное значение x не соответствует этому значению y. Значит, при всех положительных значениях x функция $\geqslant \sqrt{\frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha}}$; это число есть, следовательно, нижняя грань функции y; эта грань достигается при значении x, которое является двойным корнем уравнения (2), т. е. при $x = \frac{m}{\alpha - 1} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha - 1)}}$.

II. Свойства многогранника (Δ). 1°. Свойства ребер BB', DD', FF'. Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной, расположенной в плоскости (P) (черт. 277). Проведем через точки A, C и E прямые, перпендикулярные плоскости (P), по одну сторону от этой плоскости, и отложим на них отрезки $AA' = CC' = EE' = l$. Затем на полупрямой OZ, перпендикулярной плоскости (P), отложим отрезок $OI = l + x$ $(0 < x < l)$. Пусть плоскость $IA'C'$ пересекает перпендикуляр в точке B к плоскости (P) в точке B'. Прямые IB' и $A'C'$ плоскости $IA'C'$ пересекаются в точке J', ортогональная проекция J которой на плоскость (P) есть точка пересечения прямых OB и AC. На основании свойства шестиугольника, J есть середина OB и AC. Значит, J' есть середина IB'. Обозначим теперь через O' и β ортогональные проекции J' и B' на OZ. Так как $AA' = CC' = l$, то прямая $A'C'$ параллельна плоскости (P) и $OO' = JJ' = AA' = l$. Далее, O' — середина βI. По предположению $0 < x < l$, значит, I лежит внутри сегмента $O'K = l$, где точка K лежит на продолжении отрезка OO' за точку O'. Точка β симметрична точке I относительно O' и, значит, лежит внутри сегмента $O'O$, симметричного $O'K$ относительно β; значит, β расположена над плоскостью (P), а потому B' расположена над плоскостью (P). Аналогично доказывается, что и точки D' и F' пересечения плоскостей $IC'E'$ и $IE'A'$ с перпендикулярами к (P) в точках D и F лежат по ту же сторону. Далее, $O\beta + OI = 2OO'$, откуда $O\beta = 2OO' - OI = 2l - (l + x) = l - x$. Итак, $BB' = DD' = FF' = l - x$.

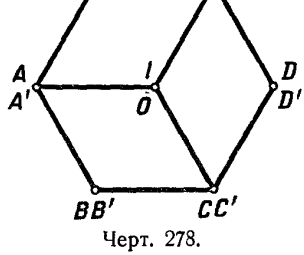


Черт. 277.

Форма четырехугольника $IA'B'C'$. Точка J', на основании предыдущего, есть середина $A'C'$ и IB'. Угол $IJ'A'$, сторона $J'A'$ которого параллельна плоскости (P), проектируется на плоскость (P) в прямой угол OJA, значит, угол $IJ'A'$ также прямой. Четырехугольник $IA'B'C'$, диагонали которого пересекаются в их серединах и перпендикулярны, — ромб; четырехугольники $IC'D'E'$ и $IE'F'A'$ — также ромбы.

Проекция многогранника (Δ) на различные плоскости. Рассмотрим многогранник (Δ), грани которого: шестиугольник $ABCDEF$, шесть прямоугольных трапеций: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$, $FAA'F'$ и три ромба: $IA'B'C'$, $IC'D'E'$ и $IE'F'A'$.

... **а) Возьмем в качестве плоскости проекции плоскость (P) и предположим, что наблюдатель находится в бесконечности в направлении полупрямой OZ.** Шестиугольник $ABCDEF$ спроектируется в правильный шестиугольник, в истинную свою величину. Вершины A', B', C', D', E', F' спроектируются соответственно в A, B, C, D, E, F, вершина I — в точку, O — центр данного правильного шестиугольника. Вертикальные грани спроектируются в стороны шестиугольника, а ромбы $IA'B'C'$, $IC'D'E'$ и $IE'F'A'$ — в ромбы $OABC$, $OCDE$, $OEFA$. Все проекции будут видимы, поскольку точка I видимая (черт. 278).

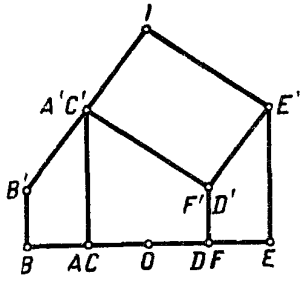


Черт. 278.

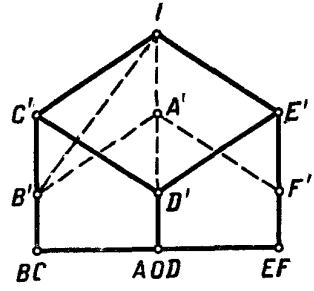
б) Возьмем теперь в качестве плоскости проекции плоскость $BB'E'E$ и предположим, что наблюдатель находится в бесконечности в направлении, перпендикуляром этой плоскости, например в направлении AC, со стороны точки C по отношению к плоскости $BB'E'E$ (черт. 279). Шестиугольник $ABCDEF$ спроектируется на эту плоскость в отрезок BE длиной $2a$, центр O — в середину этого отрезка, вершины A и C — в середину OB, а вершины D и F — в середину OE. Перпендикуляры к плоскости (P) спроектируются в перпендикуляры к отрезку BE. Вершины A', C', E' спроектируются в точки, лежащие на перпендикулярах к BE в точках A, C, E на расстоянии l от BE; I спроектируется в точку, лежащую на перпендикуляре к BE в точке O на расстоянии $l + x$. Точки B', D', F' спроектируются в точки, лежащие на перпендикулярах к BE в точках B, D, F на расстоянии $l - x$. Заметим, что плоскость $IA'B'C'$ перпендикулярна плоскости $BEE'B'$; она, следовательно, проектируется в прямую линию; все проекции точек B', A', C', I лежат на этой прямой. Контур $BEE'IB'$ видим, ибо видны все ребра. Проекция дана на черт. 279.

в) Возьмем, наконец, в качестве плоскости проекции плоскость, проходящую через середину отрезка BC, перпендикулярную этому отрезку, и

предположим, что наблюдатель расположен в бесконечности, в направлении от B к C. Шестиугольник $ABCDEF$ спроектируется в отрезок CE длиной $a\sqrt{3}$ — двойная апофема шестиугольника. Центр шестиугольника спроектируется в середину этого отрезка, туда же спроектируется A и D. Вершины B и F спроектируются соответственно в C и E. Перпендикуляры к плоскости (P) спроектируются в перпендикуляры к отрезку CE. Вершины A', C', E' спроектируются в точки, лежащие на перпендикулярах к CE в точках A, C, E на расстояниях l от CE. Вершины B', D', F' спроектируются в перпендикуляры к CE в точках B, D, F на расстоянии $l-x$, а вершина I — на перпендикуляр к CE в точке O на расстоянии $l+x$. Невидимыми будут ребра, выходящие из A' (черт. 280).



Черт. 279.



Черт. 280.

2°. а) **Диагонали ромба $IA'B'C'$:** $A'C'=a\sqrt{3}$, $IB'=\sqrt{4x^2+a^2}$. б) $\cos\varphi=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2+a^2}}$, $\cos\theta=\dfrac{2x^2-a^2}{2(x^2+a^2)}$.

в) **Объем (Δ):** $v=\dfrac{3a^2l\sqrt{3}}{2}$ (не зависит от x).

г) **Полная поверхность (Δ):** $s=3a\left(-x+\sqrt{3x^2+\dfrac{3a^2}{4}}+\dfrac{3a}{2}(a\sqrt{3}+4l)\right.$.

д) **Сумма всех ребер:** $L=3(-x+\sqrt{9x^2+a^2})+6(a+l)$.

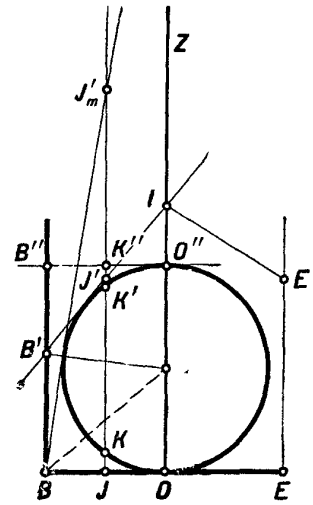
3°. На основании I находим минимумы s и L: $s_0=\dfrac{3a}{2}[a(\sqrt{3}+\sqrt{2})+4l]$ при $x=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$; $L_0=6[a(\sqrt{2}+1)+l]$ при $x=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$. Полагая $\varphi=\theta$, найдем $x=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ и обратно.

Изучение трехгранных углов с вершинами I, B', D', F' и четырехгранных углов с вершинами A', C', E' многогранника (Δ). Поскольку для (Δ_0) величина $x=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, то мы имеем $\cos\theta=\cos\varphi$ и, так как эти углы заключены между 0 и 180°, то $\theta=\varphi$, или $\angle A'IC'=\angle BB'A'$. Все плоские углы трехгранных углов $I(A'C'E')$ и $B'(BA'C')$ также равны θ, ибо $\angle BB'A=\angle BB'C=\varphi$, $\angle A'B'C'=\theta$. Трехгранные углы $I(A'C'E')$, $B'(BA'C')$, $D'(DC'E')$, $F'(FE'A')$ имеют все плоские углы, равные θ. Рассмотрим четырехгранный угол $A'(AB'IF')$. Углы $AA'B$ и $AA'F'$ равны $\pi-\varphi$, углы $B'A'I$ и $F'A'I$ равны $\pi-\theta$, значит, все плоские углы равны между собой и равны $\pi-\theta$. То же самое относится и к четырехгранным углам $C'(CB'ID')$ и $E'(ED'IF')$. Косинусы плоских углов трехгранных углов равны

$$\left(\frac{2x^2-a^2}{2(x^2+a^2)}\right)_{x=\frac{a}{2\sqrt{2}}}=-\frac{1}{3},$$

а плоские углы четырехгранных углов равны $\dfrac{1}{3}$. Из черт. 277 следует, что ABC — линейный угол двугранного угла с ребром $B'B$; этот угол равен 120°. Все двугранные углы трехгранных углов равны 120°. Аналогично: все двугранные углы четырехгранных углов, рассмотренные выше, равны между собой. Двугранный угол с ребром AA' имеет в качестве линейного угла угол FAB, равный 120°. Таким образом, все двугранные углы рассматриваемых четырехгранных углов равны 120°.

III. Многогранники (Δ), описанные вокруг сферы. Для того, чтобы в многогранник (Δ) можно было вписать сферу, прежде всего необходимо, чтобы она касалась боковых граней $AA'B'B$, $B'BCC'$, а, значит, ее центр должен находиться на равных расстояниях от этих граней, т. е. он должен быть расположен на полупрямой OZ. С другой стороны, радиус сферы должен быть равен расстоянию от точки полупрямой OZ до одной из боковых граней, т. е. апофеме данного правильного шестиугольника, а именно $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Так как сфера должна быть расположена внутри (Δ) и касаться основания $ABCDEF$, то ее центр должен быть расположен на луче OZ, перпендикулярном плоскости (P) на расстоянии $O\omega = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (черт. 281). Рассмотрим теперь сечение многогранника (Δ) одной из его плоскостей симметрии, например плоскостью $B'BEE'$; это будет пятиугольник $B'BEE'I$. Сечение сферы (Ω), вписанной в (Δ), будет окружность радиуса $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, касающаяся BE в его середине U. Так как плоскость $IA'B'C'$ перпендикулярна этой плоскости симметрии и сфера (Ω) касается этой грани, то сечение IB' этой грани касается сечения (Ω).



Черт. 281.

1°. **Построение многогранника (Δ), описанного вокруг (Ω). Заданы a и l.** Зная a и l, мы можем построить отрезок $BE = 2a$ и отрезок $JJ' = l$, перпендикулярный к OB в его середине J. Затем мы можем построить окружность радиуса $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, касающуюся BE в точке O. Прямая IB', определяющая вершину I, есть касательная, проведенная из J' к построенной окружности. Исследование. Обозначим через B'' точку пересечения перпендикуляра к BE, проведенного через точку B, с касательной (параллельной BE) в точке O'', диаметрально противоположной точке O окружности. Касательная, проведенная из точки J' к окружности, даст возможность построить многогранник (Δ), если точка B' (точка пересечения ее с BB'') будет лежать между B и B''. Если точка B' изменяется между B и B'', точка J' описывает часть перпендикуляра к BO в точке J. Так как $OJ = \frac{a}{2}$, а радиус сферы равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, т. е. больше, чем OJ, то этот перпендикуляр пересекает окружность в двух точках: K и K', а прямую $O''B''$ — в точке K''. Обозначим через J'_m точку пересечения JJ' и касательной к окружности, проведенной из точки B. Возможное изменение B' показывает, что J' описывает отрезок $K'J'_m$ и что для всех точек отрезка J'_mK'' проходит только одна касательная к окружности в то время, как через любую точку отрезка $K''K'$ проходят две касательные, дающие решение вопроса. Вычисляя JK' и JJ'_m, приходим к выводу: 1) если $\frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) < l < a\sqrt{3}$, то имеется два многогранника (Δ), вписанные в сферу; 2) если $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$, то имеется только один многогранник (Δ), вписанный в сферу; 3) если $l > 2a\sqrt{3}$, то нет ни одного многогранника (Δ), вписанного в сферу. Для $l = 2a\sqrt{3}$ многогранник (Δ) еще существует, но вершины B', D', F' совпадают соответственно с вершинами B, D, F. Для $l = a\sqrt{3}$ имеется многогранник типа (Δ) и призма, в основании которой лежит правильный шестиугольник. Для $l = \frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ имеется лишь один настоящий многогранник (Δ).

2°. **Определение x, для которых (Δ) имеет описанную сферу (Ω).** Мы видели в II, 2°, что $IB' = \sqrt{4x^2 + a^2}$. Вычислим расстояние d от точки ω до прямой IB' (черт. 281). Выражая двумя способами двойную площадь треугольника $\omega B'I$, мы имеем $d \cdot IB' = BO \cdot I\omega$ или $d\sqrt{4x^2 + a^2} = a\left(l \mp x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Прямая IB'

касается окружности сечения (Ω), если $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; тогда x удовлетворяет уравнению $\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{4x^2+a^2} = a\left(l + x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, или

$$\sqrt{3(4x^2+a^2)} = 2x - a\sqrt{3} + 2l. \tag{3}$$

Уравнение (3) эквивалентно следующей смешанной системе:

$$3(4x^2+a^2) = (2x - a\sqrt{3} + 2l)^2, \tag{4}$$

$$x > \frac{a\sqrt{3}}{2} - l. \tag{5}$$

С другой стороны, по предположению, x должен быть заключен между 0 и l. Упрощая (4), получим

$$f(x) \equiv 2x^2 - (2l - a\sqrt{3})x + l(a\sqrt{3} - l) = 0, \tag{6}$$

причем $0 < x < l$ и $x > \frac{a\sqrt{3}}{2} - l$.

Исследование. Если $l > a\sqrt{3}$, уравнение (6) имеет два корня противоположных знаков: $x' < 0 < x''$. Положительный корень удовлетворяет условию задачи, если $x'' < l$, так как условие $x'' > \frac{a\sqrt{3}}{2} - l$ удовлетворяется, ибо $\frac{a\sqrt{3}}{2} - l < 0$. Вычислим $f(l) = l(2a\sqrt{3} - l)$. Отсюда следует, что l больше, чем x'', если $l < 2a\sqrt{3}$, и l заключено между 0 и x'', если $l > 2a\sqrt{3}$. Задача имеет, следовательно, одно решение, если $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$. Если $l < a\sqrt{3}$, надо вычислить дискриминант уравнения (6): $\Delta = 3(4l^2 - 4al\sqrt{3} + a^2)$. Корни Δ суть $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ и $\frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. Если $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) < l < \frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$, то $\Delta < 0$ и корни уравнения (6) мнимые. Если $l < \frac{a}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, то уравнение (6) имеет корни одного знака, но их сумма $l - \frac{a\sqrt{3}}{2}$ отрицательна; значит, оба корня отрицательны и задача не имеет решения. Если $\frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) < l < a\sqrt{3}$, то два корня уравнения (6) положительны, $f(l) > 0$; следовательно, l вне интервала корней и l больше их полусуммы $\frac{l}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4}$; значит, корни заключены между 0 и l. С другой стороны, условие $x > \frac{a\sqrt{3}}{2} - l$ выполнено, так как $\frac{a\sqrt{3}}{2} - l < 0$. Оба корня дают решение задачи. Мы, таким образом, снова приходим к результатам геометрического исследования: 1) если $l < \frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ или $l > 2a\sqrt{3}$, то не существует многогранника (Δ), описанного вокруг сферы (Ω); 2) если $\frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) < l < a\sqrt{3}$, то существуют два ($\Delta$); 3) если $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$, существует один многогранник (Δ).

3°. Отношение объема v многогранника (Δ), описанного вокруг (Ω), к его полной поверхности s. Мы видели в II, 2°, что объем v и поверхность s многогранника (Δ) таковы: $v = \frac{3}{2}a^2l\sqrt{3}$, $s = 3a\left(-x + \sqrt{\frac{3}{4}(4x^2+a^2)}\right) + \frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+4l)$. На основании (3), если (Δ) описан вокруг сферы (Ω), мы имеем $\sqrt{3(4x^2+a^2)} = 2x - a\sqrt{3} + 2l$, откуда $-x + \sqrt{\frac{3}{4}(4x^2+a^2)} = \frac{2l - a\sqrt{3}}{2}$. В этом случае $s = 3a\frac{3l - a\sqrt{3}}{2} + \frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+4l) = 9al$, значит, $\frac{v}{s} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$, что действительно составляет $\frac{1}{3}$ от радиуса сферы (Ω).

Частный случай многогранника (Δ_0). Многогранник (Δ_0) соответствует минимуму s и соответствующее значение $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Если при этом еще многогран-

ник (Δ_0) описан вокруг сферы (Ω), то указанное значение x должно быть решением уравнения (6), т. е. $f\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{a^2}{4}-(2l-a\sqrt{3})\frac{a\sqrt{2}}{4}+l(a\sqrt{3}-l)=0$. Отсюда находим лишь одно положительное значение для l, $l=\frac{a}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Отношение объема и поверхности многогранника (Δ_0) к объему и поверхности сферы, вписанной в этот многогранник. В рассмотренном случае

$$v_0=\frac{3a^3\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4},\quad s_0=\frac{9a^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}.$$

Объем и поверхность сферы (Ω):

$$v_1=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2},\quad s_1=3\pi a^2,\ \text{отсюда}$$

$$\frac{v_0}{v_1}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi}\ \text{и}\ \frac{s_0}{s_1}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi}.$$

Эти отношения имеют одну и ту же величину. Составляя разность

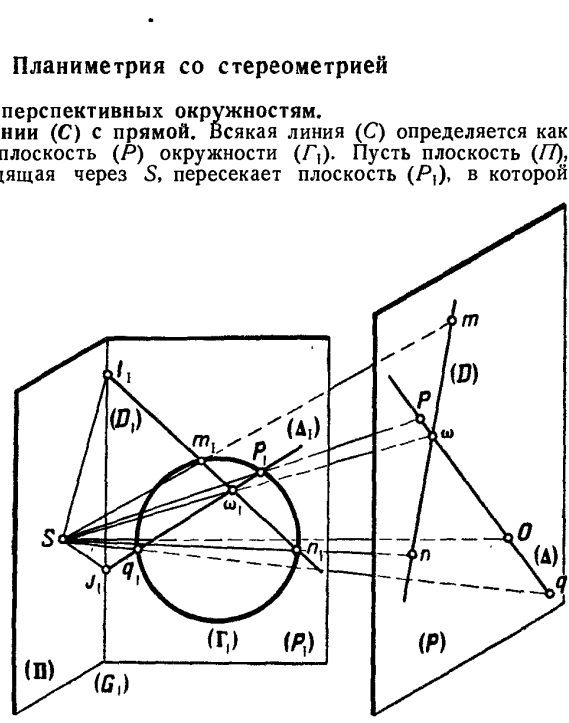
$$\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi}{\pi},$$

найдем, что эта разность $<0{,}003$.

Глава XXVI. Планиметрия со стереометрией

Изучение линий (C), перспективных окружностям.

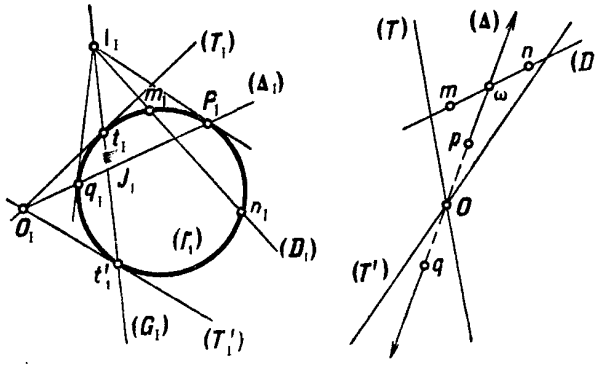
I. 1°. Пересечение линии (C) с прямой. Всякая линия (C) определяется как проекция из точки S на плоскость (P) окружности (Γ_1). Пусть плоскость (Π), параллельная (P) и проходящая через S, пересекает плоскость (P_1), в которой лежит окружность (Γ_1), по прямой (G_1). Если (G_1) — бесконечно удаленная прямая, т. е. плоскости (P) и (P_1) параллельны, то (C) является окружностью. Мы исключим этот тривиальный случай; тогда (G_1) — прямая на конечном расстоянии, а ее проекция из точки S на плоскость (P) — бесконечно удаленная прямая этой плоскости. Пусть прямая (D_1), по которой пересекаются плоскости (S, D) и (P_1), встречает прямую (G_1) в точке I_1. Всякая прямая плоскости (P_1), проходящая через I_1, проектируется на плоскость (P) в прямую, параллельную прямой SI_1, т. е. в прямую, имеющую направление, определяемое бесконечно удаленной точкой J плоскости (P), где J — проекция из точки S на плоскость (P) точки I_1 (черт. 282).



Черт. 282.

Если прямая (D_1) пересекает окружность (Γ_1) в точках m_1 и n_1, то прямая (D) пересекает линию (C) также в двух точках: m и n, являющихся перспективами m_1 и n_1. Середина ω отрезка mn гармонически сопряжена с точкой J относительно m и n, а так как гармонизм сохраняется при центральном проектировании, то точка ω есть перспектива точки ω_1 прямой (D_1), гармонически сопряженной с точками m_1 и n_1 относительно точки I_1. Отсюда следует, что геометрическое место середин параллельных хорд mn линии (C) есть перспектива хорды p_1q_1 поляры (Δ_1) точки I_1 относительно окружности (Γ_1).

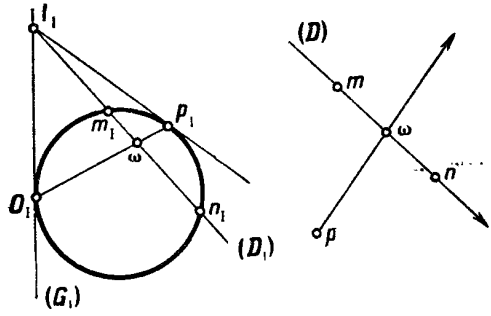
Исследование. а) (G_1) не пересекает (Γ_1) (черт. 282). Всякой точке I_1 прямой (G_1) соответствует хорда p_1q_1, которая проектируется в отрезок pq — геометрическое место середин ω хорд линии (C), параллельных mn. Всякая прямая (D), имеющая это направление, пересекает линию (C) в двух точках, если она пересекает отрезок pq; не пересекает линию (C), если она [прямая (D)] не пересекает отрезок pq, и касается линии (C) (в точке p или q), если она проходит через точку p или точку q. Линия (C) в этом случае — эллиптического типа.



Черт. 283.

б) (G_1) пересекает (Γ_1) в точках t_1 и t_1' (черт. 283). Пусть касательные (T_1) и (T_1') в точках t_1 и t_1' к окружности (Γ_1) пересекаются в точке O_1, которая будет полюсом (G_1) относительно (Γ_1). Перспективы (T) и (T') прямых (T_1) и (T_1') будут пересекаться в точке O, расположенной на конечном расстоянии, являющейся перспективой O_1. Всякой точке I прямой (G_1), лежащей вне отрезка t_1t_1', соответствует хорда p_1q_1 окружности (Γ_1), которая пересекает (G_1) и которая проектируется (в силу сохранения разделенности пар точек при проектировании) в точки двух лучей прямой pq, внешних по отношению к отрезку pq. Точки этих двух лучей образуют геометрическое место середин хорд линии (C), параллельных (D). Линия (C) в этом случае гиперболического типа.

в) (G_1) касается (Γ_1) в точке O_1 (черт. 284). Всякой точке I_1 прямой (G_1), отличной от O_1, соответствует хорда O_1p_1, перспективой которой будет луч pO (O — бесконечно удаленная точка), являющийся геометрическим местом середин хорд линии (C), параллельных прямой (D). Линия (C) в этом случае — линия параболического типа.



Черт. 284.

2°. Центры и оси линий (C). Мы будем называть осью ось симметрии линии (C). Если O — центр линии (C), то всякая точка m', симметричная точке m линии (C), будет также лежать на линии (C) и, значит, точка O гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой прямой mm' относительно точек m и m'. Значит, точка O есть перспектива точки O_1 плоскости (P_1), сопряженной относительно (Γ_1) с любой точкой (G_1), иначе O_1 — полюс прямой (G) относительно (Γ_1). Поэтому если (G_1) не касается (Γ_1), то (C) имеет и притом только один центр O (на конечном расстоянии). В противном случае линия (C) не имеет центра (на конечном расстоянии). Для того чтобы прямая (Δ) была осью (C), необходимо и достаточно, чтобы она несла на себе геометрическое место середин ω хорд mn, перпендикулярных (Δ); в этом (и только в этом) случае угол (SI_1, SJ_1) прямой (см. черт. 282). Точки I_1 и J_1 прямой (G_1) сопряжены относительно (Γ_1), а потому сферы с диаметром I_1J_1 входят в пучок (Ф) сфер, центры которых расположены на прямой (G_1) и которые ортогональны окружности (Γ_1).

Исследование. 1°. S не лежит на базисной окружности (Γ_0) пучка (Ф). В этом случае только одна сфера из пучка (Ф) проходит через S и определяет две оси линии (C).

а) (G_1) не пересекает (Γ_1). Линия (C) — эллиптического типа; она имеет две взаимно-перпендикулярные оси, каждая из которых пересекает линию (C) в двух точках, симметрично расположенных относительно O.

б) (G_1) пересекает (Γ_1) в двух точках (черт. 283). В этом случае (C) — линия гиперболического типа; она имеет две оси симметрии, и лишь одна из них пересекает линию (C) в двух точках, симметрично расположенных относительно O.

в) (G_1) касается (Γ_1) (см. черт. 284). В этом случае (C) — линия параболического типа; она имеет лишь одну ось симметрии (на конечном расстоянии), которая пересекает линию (C) в единственной точке, расположенной на конечном расстоянии.

2°. **S лежит на базисной окружности пучка (Ф).** Всякий диаметр (C), проходящий через (O), будет тогда осью (C); линия (C) будет поэтому окружностью. Это можно показать и иначе: так как базисная окружность (Γ_0) существует, то (G_1) не пересекает (Γ_1). Сфера (Σ), проходящая через (Γ_1) и S, ортогональна (Γ_0) и плоскость (Π) касается в точке S сферы (Σ). Плоскость (P), параллельная (Π), получается из сферы (Σ) инверсией с полюсом S; она пересекает конус с вершиной (S) и основанием (Γ_1) по линии (C), являющейся образом (Γ_1) в указанной инверсии. Поэтому линия (C) — также окружность.

3°. **Полюсы и поляры относительно линии (C).** Рассмотрим в плоскости (P_1) точку M_1 и ее поляру (D_1) относительно окружности (Γ_1) и пусть M и (D) — перспективы M_1 и (D_1). Всякая секущая (Δ_i) линии (C), проходящая через (M) и пересекающая (D) в точках P_i и Q_i, пересекает (D) в точке N_i (конечной или бесконечно удаленной). Четверка точек $MN_iP_iQ_i$ — гармоническая, так как она является проекцией гармонической четверки точек. Мы можем определить поэтому прямую (D) по отношению к M двумя точками: N_1 и N_2, гармонически сопряженными с M относительно точек пересечения с (C) двух секущих: (Δ_1) и (Δ_2), проходящих через M. Это определение уже не зависит от перспективы, а является инвариантным построением, относящимся исключительно к линии (C), точке M и данной прямой (D).

II. **Теорема Паскаля для линии (C).**

1°. **Линия (C) есть окружность (Γ), две хорды которой: AB' и BA' — имеют частное расположение.** Исключим тривиальный случай, когда AB' и BA' пересекаются в точке R, лежащей на окружности (Γ); в самом деле, если, например, точки A' и B' совпадают с некоторой точкой R окружности (Γ), то эта точка, очевидно, расположена на одной прямой, которая проходит через точку P пересечения BC' и CB' и через точку Q — точку пересечения AC' и CA'.

а) **AB' и BA' параллельны.** Используя равенство (по модулю π) между ориентированными углами от прямой до прямой (неориентированных) и используя те из них, которые характеризуют вписанные четырехугольники, будем иметь: $(BC', AC') = (BB', AB')$, $(B'C, A'C) = (B'B, A'B)$. Но $2(BB', AB') = \overset{\frown}{BA}$, $2(B'B, A'B) = B'A'$ (mod 2π). Так как AB' и BA' параллельны, то $\overset{\frown}{BA} = B'A'$ (mod 2π). Следовательно, $(BC', AC') = (B'C, A'C)$ и, значит, $(C'P, C'Q) = (CP, CQ)$. Если P — бесконечно удаленная точка, то CP и $C'P$ параллельны; следовательно, CQ и $C'Q$ также параллельны, а P, Q, R лежат на одной бесконечно удаленной прямой плоскости (P). В противном случае $CC'PQ$ — вписанный четырехугольник и потому $(PQ, PC) = (C'Q, C'C)$. Но $(C'Q, C'C) = (C'A, C'C) = (B'A, B'C) = (B'A, PC)$. Следовательно, $(PQ, PC) = (B'A, PC)$ и, значит, $PQ \parallel B'A$, а потому проходит через R.

б) **AB' и BA' пересекаются в центре R окружности (Γ).** Пусть M и N — точки, в которых пересекаются AC', CB' и $A'C$, BC'. Тогда $2(C'M, C'N) = 2(C'A, C'B) = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B'A'} = 2(CB', CA') = 2(CM, CN)$ (mod 2π). Если M — бесконечно удаленная точка, то CM и $C'M$ параллельны; следовательно, CN и $C'N$ также параллельны, $PCQC'$ — параллелограмм, противоположные вершины P и Q которого лежат на одной прямой с серединой R отрезка CC' (AC' и $B'C$ параллельны). В противном случае $CC'MN$ вписан в окружность, назовем ее (Γ'). Имеем $2(C'R, \overset{\frown}{C'C}) = \pi + \overset{\frown}{C'C}$ (mod 2π) и $2(MC', MC) = 2(MA, MB') = \pi + \overset{\frown}{C'C}$ (mod 2π). Следовательно, $(C'R, C'C) = (MC', MC)$ и $C'R$ — касательная к (Γ') в точке C. Отсюда следует, что CC' — поляра R относительно (Γ'), которая также ортогональна (Γ). Значит, PQ — поляра относительно (Γ') точки H пересечения MN и CC', а так как H лежит на поляре точки R, то ее поляра PQ проходит через R.

2°. **Общий случай. 1°. Линия (C) есть окружность (Γ).**

а) **AB' и BA' пересекаются в точке R, лежащей вне (Γ).** В этом случае в плоскости окружности можно взять прямую (G), проходящую через R и не пересекающую (Γ), затем взять точку S на базисной окружности (Γ_0) пучка (Ф) сфер, центры которых лежат на прямой (G) и которые ортогональны окружности (Γ). Перспектива (Γ) из точки S на плоскость (P), параллельную плоскости (S, G), есть окружность, а перспективы хорд AB' и BA', которые пересекаются в точке R, лежащей на прямой (G), будут две параллельные хорды упомянутой окружности; точки P, Q и R лежат на одной прямой, так как по доказанному выше их перспективы также лежат на одной прямой.

б) **AB' и BA' пересекаются в точке R, лежащей внутри (Γ).** В этом случае поляра (G) точки R относительно (Γ) не пересекает (Γ). Возьмем точку S на базисной окружности (Γ_0) пучка (Ф) сфер с центрами на (G), которые ортогональны окружности (Γ). Перспектива (Γ) из точки S на плоскость (P), параллельную плоскости (S, G), есть окружность, а перспективы хорд AB' и BA' суть диаметры этой окружности; точки P, Q, R лежат на одной прямой, так как их перспективы лежат по доказанному выше на одной прямой.

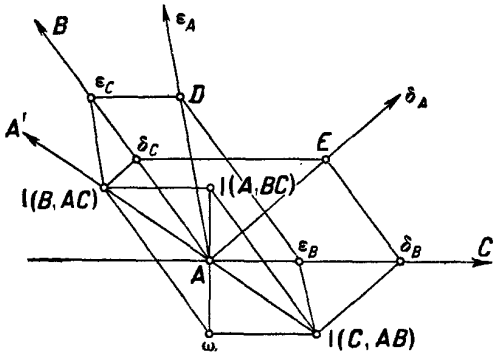
2°. **Общий случай.** Если (C) линия, являющаяся проекцией окружности, то точки P, Q и R лежат на одной прямой, так как перспективы этих точек лежат по доказанному на одной прямой.

III. **Через пять точек плоскости (P) таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой, проходит по крайней мере одна линия (C).** Пусть A, B, C, D и E — пять точек, лежащих в плоскости (P) и таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Обозначим через γ и β точки пересечения DE соответственно с AB и AC, через γ' и γ'' — точки, сопряженные γ относительно пары прямых AB, DE, а через β' и β'' — точки, сопряженные β относительно пары прямых AC, DE. Пусть (Γ_1) — окружность, проходящая через точки D и E, лежащие в плоскости (P_1), отличной от (P), и пусть I_1 — полюс DE относительно (Γ_1).

1°. Точка γ сопряжена с точками I_1 и γ'' относительно (Γ_1); следовательно, $I_1\gamma''$ — поляра γ относительно (Γ_1). Пусть S — точка [не расположенная ни в плоскости (P), ни в плоскости (P_1)], общая для плоскости $I_1\gamma'\gamma''$ и конуса с вершиной A и основанием (Γ_1). Перспектива (C) на плоскость (P) линии (Γ_1) из точки S проходит через A, D и E. Перспектива γ есть γ, а перспектива $I_1\gamma''$ есть $\gamma'\gamma''$. Следовательно, $\gamma'\gamma''$ — поляра γ относительно (C), и так как A, B, γ, γ' — гармоническая четверка, то (C) проходит и через B.

2°. Если I_1I пересекает конус в двух точках: S и S' (I — точка пересечения $\gamma'\gamma''$ и $\beta'\beta''$), то ни одна из них не лежит в плоскости (P_1), так как в противном случае I совпадала бы с β'' и γ'' (лежащими на DE), а B и C лежали бы на одной прямой с точкой A.

Точки S и S' не лежат и в плоскости (P), так как в противном случае S (или S') совпадала бы с точкой I, лежащей или на AD, или на AE, и так как плоскости I_1AD и I_1AE касаются конуса, то прямая I_1I также касалась бы конуса и не могла бы иметь с ним двух различных общих точек. Перспектива (C) на плоскость (P) окружности (Γ_1) из S (или S') проходит через A, D и E; так как S (или S') лежит в плоскости $I_1\gamma'\gamma''$, то (C) проходит через B, а так как, кроме того, точка S (или S') лежит в плоскости $I_1\beta'\beta''$, то (C) проходит через C. Пусть прямая I_1I пересекает конус в двух точках: S и S'. Точка I сопряжена с точками β и γ относительно (C), и, значит, I есть полюс DE относительно (C); следовательно, I — перспектива I_1, A — перспектива точки A_1 окружности (Γ_1). Так как I_1A_1 пересекает отрезок DE, то IA пересекает также этот отрезок DE. Обратно: если IA пересекает отрезок DE, то I лежит внутри угла DAE, значит, и внутри конуса; точка I_1 лежит вне окружности (Γ_1), значит, и вне конуса. Следовательно, I_1I пересекает конус в двух точках. Итак, необходимое и достаточное условие пересечения прямой I_1I с конусом в двух различных точках, будет то, что прямая IA пересекает отрезок DE.

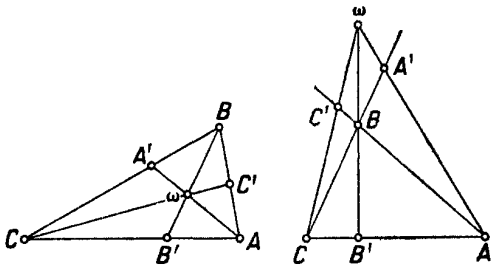


Черт. 285.

3°. Уже рассмотренную выше точку I условимся обозначать так: $I(A, DE)$ (для того чтобы напомнить ее построение по данным точкам). Сочетая в различных комбинациях данные пять точек, мы можем получить другие точки, аналогичные точке I, и не нарушая общности, предположить, что две из данных пяти точек, например B и C, находятся в бесконечности [для этого достаточно спроектировать данные 5 точек из точки S в плоскость (P), параллельную SBC]. Пусть (черт. 285) ε_A, ε_B, ε_C, δ_A, δ_B, δ_C — точки пересечения прямых (AD, BC), (BD, AC), (CD, AB), (AE, BC), (BE, AC), (CE, AB), (ε_A и δ_A — бесконечно удаленные точки); фигура $A\varepsilon_B D\varepsilon_C$ — параллелограмм, а $\varepsilon_A\varepsilon_B$ и $\varepsilon_A\varepsilon_C$ параллельны AD и симметричны относительно A. Аналогично $\delta_A\delta_B$ и $\delta_A\delta_C$ параллельны AE и симметричны относительно A. Точка $I(B, AC)$ принадлежит поляре ε_B относительно (AD, BC), а потому лежит на прямой $\varepsilon_A\varepsilon_C$. Аналогично доказывается, что $I(B, AC)$ лежит на $\delta_A\delta_C$. Значит, $I(B, AC)$ есть точка пересечения прямых $\varepsilon_A\varepsilon_C$ и $\delta_A\delta_C$. Аналогично доказывается, что точка $I(C, AB)$ есть точка пересечения $\varepsilon_A\varepsilon_B$ и $\delta_A\delta_B$. Значит, A — середина $I(B, CA)I(C, AB)$ и, значит, в силу свойств перспективы заключаем, что в общем случае (когда B и C на конечном расстоянии) точка A лежит на одной прямой с точками $I(B, AC)$ и $I(C, AB)$ и что точка A', сопряженная точке A относительно этих двух точек $I(B, AC)$ и $I(C, AB)$, лежит на BC. Аналогичные заключения можно сделать по отношению к тройкам точек: B, $I(A, BC)$, $I(C, AB)$ и C, $I(A, BC)$, $I(B, AC)$. Предполагаем снова, что точки B и C бесконечно удаленные, заключаем, что $I(A, BC)$, $I(B, CA)$ и $I(C, AB)$ — три вершины параллелограмма с центром A и сторонами, параллельными соответственно AB и AC. Четвертая вершина ω есть, следовательно, точка пересечения следующих трех прямых: $AI(A, BC)$,

$BI(B, AC)$, $CI(C, AB)$. В силу свойств перспективы заключаем, что в общем случае (когда B и C — на конечном расстоянии), прямые $AI(A, BC)$, $BI(B, AC)$, $CI(C, AB)$ пересекаются в одной точке ω.

4°. Так как никакие три из пяти точек: A, B, C, D, E не лежат на одной прямой, то точка ω не лежит ни на одной из трех прямых: AB, BC и CA, а потому, применяя теорему Чевы (черт. 286), будем иметь $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. Отсюда следует, что по крайней мере одно из трех отношений отрицательно; пусть, например, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} < 0$; прямая IB пересекает соответствующий отрезок AC. Значит, на основании III, 2°, если взять три окружности, проходящие соответственно через B и C, C и A, A и B, плоскости которых отличны от плоскости (P), то по крайней мере одна из этих окружностей подходящей перспективой может быть спроектирована в линию (C), проходящую через пять данных точек.

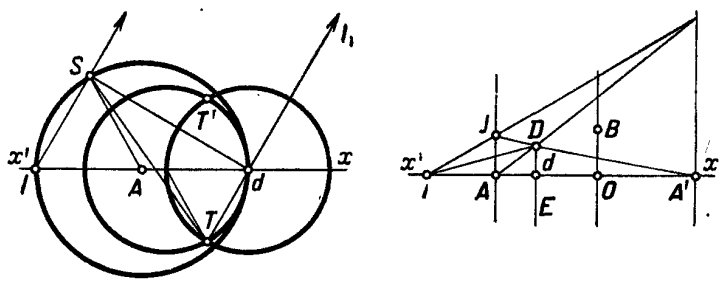


Черт. 286.

IV. 1°. Через каждые пять точек таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой, проходит и притом только одна линия (C). В самом деле, на основании предыдущего через данные пять точек проходит по крайней мере одна линия (C). Переменная прямая Ax пересекает (C) вторично в точке M, отличной или совпадающей с A. На основании теоремы Паскаля, три точки: P, Q и R, в которых пересекаются прямые (AB, DE), (BC, EM) и (CD, AM), лежат на одной прямой. Задание прямой Ax определяет прямую PQ, значит, и точку Q пересечения BC и PR и, значит, единственную точку M пересечения Ax и QE. Отсюда и следует, что пять точек: A, B, C, D, E, из которых никакие три не лежат на одной прямой, определяют только одну линию (C), через них проходящую.

2°. **Перспектива линии (C) есть снова линия (C).** В самом деле, пять точек: A, B, C, D, E, лежащих на линии (C), проектируются из точки S на плоскость (P) в пять точек A', B', C', D', E' таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой.

Пусть (Γ') — перспектива (C). Линия (Γ') проходит через A', B', C', D', E', которые определяют линию типа (C); ее мы обозначим через (C'). Проведем через



Черт. 287.

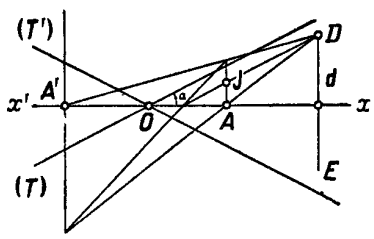
точку A' произвольную прямую $A'x'$. Так как теорема Паскаля имеет место и для линии (Γ') [ибо эта линия есть проекция линии (C)] и для линии (C') [ибо эта линия типа (C)], то на произвольной прямой $A'x'$ вторые точки пересечения ее с (Γ') и (C') будут совпадать с одной и той же точкой M' прямой $A'x'$. Значит, линии (Γ') и (C') совпадают.

V. Линии (C) суть конические сечения. Всякая линия (C) имеет по меньшей мере одну ось симметрии $x'x$ и по меньшей мере одну точку A, лежащую на этой оси (черт. 287). Пусть DE — хорда линии (C), перпендикулярная в точке d оси $x'x$. Полюс I прямой DE относительно (C) лежит на $x'x$. Если существует в плоскости-медиатрисе отрезка DE точка S, служащая вершиной конуса вращения с осью Sd и проходящего через (C), то перспектива из S линии (C) на плоскость (P_1), перпендикулярную Sd в точке D, будет окружностью (Γ_1) с осью Sd и радиусом dD.

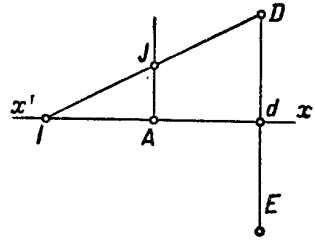
Полюс I_1 прямой DE относительно (Γ_1) лежит в бесконечности; следовательно, IS, которая проходит через I_1, будет перпендикулярна Sd и, значит, точка S лежит на окружности с диаметром Id; прямая SA пересекает dI_1 в точке T такой, что $dT = dD$; значит, точка T является точкой пересечения окружности с центром d и радиусом dD и окружности, гомотетичной окружности с диаметром Id в гомотетии $\left(A, \frac{\overline{Ad}}{\overline{AI}}\right)$. Если поэтому эти две окружности пересекаются в точках T и T', то прямая TA пересекает в точке S (по другую сторону от T относительно $x'x$) окружность с диаметром Id и, значит, (C) лежит на конусе вращения с вершиной S, осью Sd и половиной угла при вершине, равной (Sd, ST). Для того чтобы доказать, что (C) — коническое сечение, надо еще показать возможность построения указанного конуса, а для этого необходимо и достаточно установить существование точек T и T'. Точки же T и T' существуют тогда и только тогда, когда $dD < Id\frac{Ad}{AI}$, или $\frac{Ad}{IA} > \frac{dD}{Id} = \frac{AJ}{IA}$, где J — точка пересечения JC с перпендикуляром к $x'x$ в точке A.

Исследование. а) (C) — линия эллиптического типа (черт. 287). Пусть O — центр (C), B — одна из точек его оси, перпендикулярной $x'x$. Положим $OA = a$, $OB = b$, $Od = x$, $dD = y$. Тогда $Od \cdot OI = x \cdot OI = a^2$ и $\frac{AJ}{y} = \frac{OI - a}{OI - x} = \frac{a^2 - ax}{a^2 - x^2} = \frac{a}{a + x}$, $Ad = a - x$ и $Ad > AJ$, если $a^2 - x^2 > ay$. При $x = 0$, $y = b$ и если $a > b$, то $a^2 - x^2 = a^2 > ab = ay$. Это возможно в том случае, когда за ось $x'x$ взять ту, на которой лежит большая ось AA'. Таким образом, можно построить по крайней мере один конус вращения, на котором лежит линия (C); линия (C) в этом случае — эллипс. Его уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, и конус можно построить, если $1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} > \frac{y}{a}$, т. е. $y > \frac{b^2}{a}$.

б) (C) — линия гиперболического типа (черт. 288). В этом случае $x'x$ — та ось, которая пересекает (C) в двух точках: A и A'. Применяя аналогичные обозначения и обозначая еще через α половину угла между прямыми OT и OT' [см. I, I°, б)], будем иметь: $Ad > AJ$, если $x^2 - a^2 > ay$. Если x неограниченно увеличивается, то $\frac{y}{x}$ стремится к $\operatorname{tg}\alpha$ и трехчлен $x^2 - ax\operatorname{tg}\alpha - a^2$ становится положительным. Можно, таким образом, и в этом случае построить конус вращения, на котором будет лежать линия (C); линия (C) в этом случае — гипербола. Построение возможно, если $y > \frac{b^2}{a}$.



Черт. 288.



Черт. 289.

в) (C) линия параболического типа (черт. 289). Пусть I — точка, симметричная d относительно A. Положим $Ad = x$, $dD = y$; $Ad > AJ$, если $2x > y$, что может быть выполнено, так как $\frac{y}{x}$ стремится к нулю при неограниченном возрастании x. Таким образом, и в этом случае построение конуса вращения, проходящего через (C), возможно; линия (C) — парабола; ее уравнение $y^2 = 2px$. Условие возможности построения конуса $2x > p$.

2°. II. Построение точек и касательных к линии второго порядка, определенной базисной окружностью и базисной прямой.

а) Пусть (c) и (L) — базисная окружность и базисная прямая линии (C). Возьмем на окружности (c) произвольную точку m, не лежащую на фокальной оси, т. е. на прямой, проходящей через F перпендикулярно (L). Касательная к (c) в точке m пересекает (L)

в точке T, а перпендикуляр к Fm в точке F пересекает директрису (Δ), соответствующую фокусу F в точке T'; пусть, наконец, прямая TT' пересекает Fm в точке M.

Отношение расстояний от точки M до Fn и до (Δ) равно отношению расстояний от точки T до прямой FT' и до (Δ); это отношение, следовательно, равно $\frac{2p}{2\lambda}$, т. е. e. Поэтому точка M лежит на данной линии (C); более того: так как отрезок MT' виден из фокуса F под прямым углом, то TT' — касательная к (C) в точке M. Мы получаем, таким образом, способ построения любого числа точек и касательных к линии (C).

б) 1°. Пусть τ и μ — точки пересечения с (L) прямых FT' и FM; так как $T'F = F\tau$, то пучок с вершиной $T(L, TT'; TF, Tm)$ гармонический; следовательно, M гармонически сопряжена с точкой μ относительно пары (m, F).

2°. Проведем через F прямую $(L_0) \parallel (L)$; она пересекает TM и Tm соответственно в точках M_0 и m_0, и на основании предыдущего замечания $\overline{FM_0} = \overline{M_0m_0}$ или $\overline{Fm_0} = 2\overline{FM_0}$. Проведем через F прямую, параллельную TT', и пусть она пересекает Tm в точке I; тогда T — середина Im_0; следовательно, точка I лежит на прямой (δ), симметричной (L_0) относительно (L). Прямая $FI \parallel TT'$, и мы видим, как это удобно использовать для построения касательных к линии второго порядка, параллельных данной прямой (зная I, находим m, затем M — как гармонически сопряженную с μ и т. д.).

IV. а) Проведем через F прямую $(L_0) \parallel (L)$ и предположим, что прямая (D) пересекает (L) и (L_0) соответственно в точках T и M_0; прямая (d), гомологичная (D), проходит через точку T и точку m_0 прямой (L_0) такую, что $\overline{Fm_0} = 2\overline{FM_0}$. Если ($d$) пересекает ($c$) в точках m и m', то (D) пересекает (C) в точках M и M', гомологичных m и m'. Исследование тривиально.

б) Пусть p — точка, гомологичная P; предположим, что точка p лежит вне (c), и пусть pm и pm' — касательные, проведенные из p к (c); если M и M' — точки, гомологичные точкам m и m', то PM и PM' — искомые касательные.

Отметим, что из чертежа немедленно следует, что $(\widehat{FM, FP}) = (\widehat{FP, F\mu})$ (первая теорема Понселе).

V. Тип линии второго порядка определяется ее эксцентриситетом. Однако можно определить тип линии по числу общих точек этой линии с бесконечно удаленной прямой, иначе говоря — по числу общих точек, которые имеют базисная окружность (c) и прямая (δ). Таким образом:

если (δ) не пересекает (c), то (C) — эллипс;
если (δ) касается (c), то (C) — парабола;
если (δ) пересекает (c), то (C) — гипербола.

VI. Построим прямую (δ). Она пересекает окружность (c) в двух точках: α и β; образы этих точек будут бесконечно удаленными точками линии (C), т. е. $F\alpha$ и $F\beta$ будут иметь асимптотические направления. Все прямые, параллельные (D), будут иметь гомологичными прямые (d) пучка с центром I, в котором прямая $FI \parallel (D)$ пересекает (δ). Касательная к гиперболе, параллельная (D), будет образом касательной к окружности (c), проведенной из точки I. Отсюда следует, что если прямая, проходящая через F параллельно (D), пересекает (δ) в точке I, лежащей внутри отрезка $\alpha\beta$, то касательных к гиперболе, параллельных (D), не существует. Если же точка I лежит вне отрезка $\alpha\beta$, то из точки I можно провести к окружности (c) две касательные: Im и Im'. Прямые, им гомологичные, будут касательными к гиперболе, параллельными данной прямой; эти касательные легко строятся (так же, как и точки M и M' прикосновения).

Частные случаи. Если точка I совпадает с α, то касательная к (c) в точке α пересекает (L) в точке J и образ αJ есть прямая, проходящая через J параллельно $F\alpha$. Эта прямая есть, следовательно, асимптота, поскольку точка, гомологичная точке α, есть бесконечно удаленная точка гиперболы.

Аналогично строится вторая асимптота. Мы получим касательные в вершинах гиперболы, построив образы касательных к (c), параллельных (L).

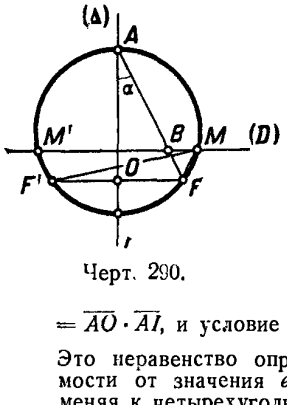
Точка пересечения асимптот гиперболы есть ее центр. Этот центр можно построить так же, как точку, гомологичную полюсу (δ), относительно (c) (это годится и для эллипса).

VII. **Пространственная интерпретация.** Рассмотрим конус вращения с вершиной S. Пусть θ — угол его образующей с осью. Обозначим через (Π_1) плоскость, проходящую через S перпендикулярно оси конуса, через (Π') — секущую плоскость, пересекающую ось конуса в точке Ω, плоскость (Π_1) по прямой (Δ_1), а конус по линии (C'). Какая-нибудь образующая Sm конуса пересекает (Π') в точке M' (лежащей на C'); пусть M_1 — проекция M' на (Π_1). Пусть, наконец, K_1 — общая проекция точек M' и M_1 на (Δ_1); $\angle M_1M'S = \theta$; обозначим $\angle M_1M'K_1$ — угол плоскости (Π') с осью конуса — через α. Из прямоугольных треугольников M_1SM'

и M_1K_1M' имеем $M_1S = M_1M' \operatorname{tg}\theta$ и $M_1K_1 = M_1M'_1 \operatorname{tg}\alpha$, откуда $\frac{M_1S}{M_1K_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha} = \text{const}$; отсюда следует, что проекция на плоскость (Π_1), перпендикулярную оси конуса вращения в его вершине S сечения (C') этого конуса плоскостью (Π'), есть линия второго порядка (C_1), для которой S — фокус, а соответствующая этому фокусу директриса есть прямая (Δ_1), по которой пересекаются плоскости (Π_1) и (Π'); эксцентриситет этой линии равен отношению тангенсов углов, которые образует ось конуса с его образующей и секущей плоскостью. Пусть теперь (Π) — плоскость, симметричная плоскости (Π_1) относительно Ω; (Δ) — проекция (Δ_1) на плоскость (Π); F — точка пересечения оси конуса с плоскостью (Π), (L) — прямая, по которой пересекаются плоскости (Π) и (Π'), и (c) — окружность, по которой плоскость (Π) пересекает конус [m — точка, лежащая на (c)]. Из предыдущего следует, что прямая (L) симметрична (Δ) относительно F и что проекция (C) линии (C') на плоскость (Π) есть также проекция на эту плоскость линии (C_1). Значит, F — фокус (C), (Δ) — соответствующая этому фокусу директриса, $e = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}$ — эксцентриситет. Следовательно, если p и λ — соответственно параметр и модуль линии (C), то $\lambda = FH$ и $e = \frac{p}{\lambda}$. Пусть R — радиус окружности (c); из треугольников $HF\Omega$ и mFS находим $R = SF \operatorname{tg}\theta$, $FH = \frac{FS}{2} \operatorname{tg}\alpha$ или $\lambda = \frac{FS}{2} \operatorname{tg}\alpha$, откуда $\frac{R}{\lambda} = 2\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}$, или $R = 2\lambda \cdot \frac{p}{\lambda} = 2p$. Мы видим, что в плоскости (Π) линия (C) получается преобразованием (H) из окружности (c) [базисная прямая (L)]. Таким образом, преобразование (H) есть результат последовательного проведения следующих преобразований:

а) центральное проектирование из центра S, при котором точка m плоскости (Π) переходит в точку M' плоскости (Π'); б) ортогональное проектирование плоскости (Π') на плоскость (Π), при котором точка M' переходит в точку M,

3. Планиметрия. 1°. $\overline{AB} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{e^2} AF^2 = \frac{1}{e^2} \overline{AF}^2$; отсюда $\overline{FB} = \frac{e^2-1}{e^2} \overline{FA}$ и геометрическое место точек B получается из (Δ) в результате гомотетии $\left(F, \frac{e^2-1}{e^2}\right)$, т. е. B описывает прямую, параллельную (Δ). Окружность (FBB') ортогональна (Γ) и (Γ'), ее центр лежит поэтому на радикальной оси этих окружностей, а так как $BB' \parallel AA'$, то эта радикальная ось есть медиатриса отрезка BB'.

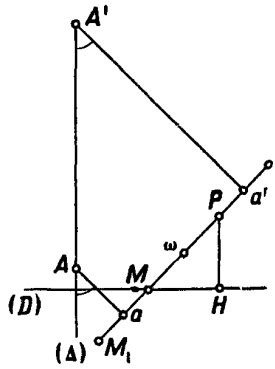


Черт. 290.

2°. Если A' стремится к A на (Δ), то радикальная ось стремится к прямой (D), проведенной через B перпендикулярно (Δ). Если I — полюс (D) относительно (Γ), то IF — поляра B относительно (Γ) и окружность с диаметром IA проходит через F и F'. Для того чтобы (D) пересекала (Γ) в двух действительных точках, необходимо и достаточно, чтобы точка I лежала вне (Γ), т. е. $AI > \frac{AF}{e}$. Но $\overline{AF}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{AI}$, и условие принимает вид $\frac{AO}{AF} < e$. Полагая $\cos\alpha = \frac{AO}{AF}$, имеем $\cos\alpha < e$. Это неравенство определяет на прямой (Δ) соответствующий отрезок (в зависимости от значения e). Если A выбрано так, что M и M' действительны, то применяя к четырехугольнику $AMFF'$ теорему Птоломея, получим (в случае $e > 1$) (черт. 290) $2c \cdot AM + AF' \cdot MF = MF' \cdot AF$, откуда $MF' - MF = 2a$ и геометрическое место точек M и M' есть гипербола (E) с фокусами F и F' и эксцентриситетом e; касательной в точке M является MI; значит, в точке M этой гиперболы касается и окружность (Γ). Если $e < 1$, то (E) — эллипс.

3°. Зафиксируем (Γ); тогда прямая (D) также будет фиксирована. Возьмем на (E) произвольную точку P и пусть H — ее проекция на (D) (черт. 291); P — есть точка прикосновения (E) с окружностью (Γ') с центром A'. Радикальная ось (Γ) и (Γ') пересекает MP в середине ω этого отрезка; пусть прямая MP вторично пересекает (Γ) в точке M_1, а (Γ') — в точке P_1; проекции a и a' точек A и A' на MP суть середины отрезков MM_1 и PP_1, а ω есть середина не только MP, но и M_1P_1, ибо $\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega M_1} = \overline{\omega P} \cdot \overline{\omega P_1}$, откуда $\overline{\omega M_1} = -\overline{\omega P_1}$. Степень точки P относительно (Γ) равна: $p = \overline{PM} \cdot \overline{PM_1} = \overline{PM} \cdot \overline{a'a}$. С другой стороны, $\frac{\overline{a'a}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{PM}}$ и $\overline{B'B} = \overline{PH}$, откуда $\overline{A'A} = \frac{e^2}{e^2-1} \overline{PH}$, и, следовательно, $p = \lambda \overline{PH}^2$, где $\lambda = \frac{e^2}{e^2-1}$.

Обратно: предположим, что $p = \lambda PH^2$, пусть PM вторично пересекает (E) в точке Q и пусть K — проекция Q на (D); тогда $\overline{PM}\cdot\overline{PM_1} = \lambda PH^2$, $\overline{QM}\cdot\overline{QM_1} = \lambda QK^2$, откуда $\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}\cdot\frac{\overline{PM_1}}{\overline{QM_1}} = \frac{PH^2}{QK^2}$. Но $\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{QK}}$, значит, $\frac{\overline{PM_1}}{\overline{QM_1}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$, поэтому точки P и Q совпадают. Таким образом, (E) есть геометрическое место точек P таких, что $p = \lambda\overline{PH}^2$. Перейдем теперь к окружностям $C(P)$. Если $\lambda > 0$, то $e > 1$ и, значит, (E) — гипербола. Если P — точка (E), служащая центром окружности $C(P)$, проходящей через Q, то она имеет одинаковую степень относительно (Γ) и относительно точки Q. Значит, точка P есть точка пересечения (E) с радикальной осью окружности (Γ) и точки Q. Значит, имеется две окружности $C(P)$, действительные или мнимые, различные или совпадающие, проходящие через точку Q.



Черт. 291.

Исследование. Радикальная ось (R) окружности (Γ) и точки Q или не пересекает (Γ) [если Q не лежит на (Γ)], или касается (Γ), если Q лежит на (Γ). Гипербола (E) касается (Γ) в точках M и M', а так как MM' параллельна фокальной оси FF', то точки, внешние для отрезка MM', будут внутренними точками гиперболы (E). Если точка Q отлична от M и M', то (R) пересекает MM' в точке, внутренней для (E), а потому пересекает (E) в двух точках; значит, существуют две различные действительные окружности $C(P)$, проходящие через Q. Если же Q совпадает с M или M', то (R) касается (Γ) в этой точке и искомая окружность («двойная») вырождается в эту точку (M или M').

Стереометрия. А. 1°. Пусть (π') — плоскость, параллельная (D) и проходящая через (Δ), OF — общий перпендикуляр к (D) и (Δ) [F — на (D), O — на (Δ)] и (π) — плоскость, проходящая через OF и перпендикулярная (D). Проекция на плоскость (π) прямой (Δ) есть прямая (Δ'), по которой пересекаются плоскости (π) и (π'); точки P, H и K, лежащие на одной прямой, проектируются в точки A [на (Δ')], F и B; сфера $S(P)$ проектируется в окружность (Γ) с центром A и радиусом kAF; точки F и B сопряжены относительно (Γ), и на основании результатов, полученных в первой части (планиметрия), точка K лежит в плоскости $(\tilde{\omega})$, полученной из (π') в результате гомотетии $(F, -k^2)$. Далее, в проекции на плоскость (π') прямая (D) проектируется в прямую (D'), перпендикулярную (Δ'), а точки P, H и K — в точки P, H' [на (D')] и K'. Из подобия треугольников PKK' и PHH' следует $\frac{\overline{PK'}}{\overline{PH'}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{PH}}$. Но $\overline{PK}\cdot\overline{PH} = k^2PH^2$; следовательно, $\overline{PK'} = k^2\cdot\overline{PH'}$ и, значит, $\frac{\overline{H'K'}}{\overline{H'P}} = 1 - k^2$. Если α — угол, дополняющий до 90° угол между (D) и (Δ), то $\frac{\overline{H'P}}{\overline{OH'}} = \operatorname{ctg}\alpha$ и $\frac{\overline{H'K'}}{\overline{OH'}} = (1-k^2)\operatorname{ctg}\alpha$. Геометрическое место точки K есть, следовательно, прямая (L), лежащая в плоскости $(\tilde{\omega})$, пересекающая OF и образующая с прямой (D) дополнительный угол (до 90°), который определяется соотношением $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-k^2}$.

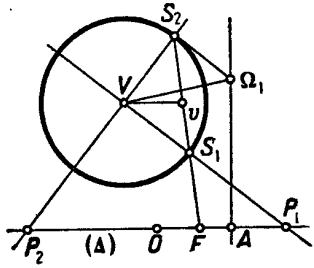
2°. Сферы $S(P)$ и $S(P_1)$ ортогональны сфере (Σ), проходящей через K, H, H_1 и K_1. Поэтому центр сферы (Σ) лежит на радикальной плоскости сфер $S(P)$ и $S(P_1)$. Но он должен лежать в плоскостях-медиатрисах отрезков HH_1 и KK_1, а так как эти плоскости пересекаются по прямой (l), перпендикулярной PP_1, следовательно, параллельной или лежащей на радикальной плоскости сфер $S(P)$ и $S(P_1)$, то прямая (l) непременно лежит в указанной радикальной плоскости.

3°. Плоскость-медиатриса отрезка HH_1, параллельная PH и P_1H_1, пересекает отрезок KK_1 в его середине I. Радикальная плоскость сфер $S(P)$ и $S(P_1)$ содержит I, так как эта точка лежит, конечно, и на медиатрисе KK_1 (см. 2°); но точка I — переменная точка прямой (L); значит, чтобы радикальная плоскость сфер $S(P)$ и $S(P_1)$ была фиксирована, необходимо, чтобы она проходила через (L); значит, прямая (L) должна быть ортогональна (Δ). Это условие и достаточно, так как если оно выполнено, то плоскость (O, L), перпендикулярная (Δ) и содержащая прямую, общую плоскостям-медиатрисам отрезков HH_1 и KK_1, является радикальной плоскостью сфер $S(P)$ и $S(P_1)$. Таким образом, искомое частное значение $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, откуда $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-k_0^2} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ и, значит, $k_0 = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Докажем теперь, что если $k \neq k_0$, то сферы $S_k(P)$ вписаны в поверхность вращения с осью (Δ). В самом деле, если $k = k_0$, то сферы $S_{k_0}(P)$ принадлежат пучку сфер, радикальной плоскостью (π_0) которых является плоскость (π_0), перпендикулярная в точке O прямой (Δ); базисной окружностью является окружность (Γ_0) пересечения плоскости (π_0) со сферой $S_{k_0}(O)$, с центром O и радиусом $k_0 \cdot OF$. Произвольная плоскость, проходящая через (Δ), пересекает $S_k(P)$ по окружности (Γ) с центром P и радиусом $R = k \cdot PH$, а окружность (Γ_0) — в точках φ и φ', расположенных на перпендикуляре в точке O к (Δ) и таких, что $O\varphi \cdot O\varphi' = k_0 \cdot OF$. Но $P\varphi = R = k_0 PH$. Следовательно, $R = \frac{k}{k_0} P\varphi$, и на основании результатов первой части (планиметрия) заключаем, что если $k < k_0$, то сферы $S_k(P)$ вписаны в поверхность вращения [с осью (Δ)], меридианом которой является гипербола с фокусами φ и φ' и эксцентриситетом $\frac{k_0}{k}$; если $k > k_0$, меридианом является эллипс.

В. 1°. **Общий случай — точка V не лежит в плоскости (R).**

а) Рассмотрим сферы $S(P)$, центры которых лежат в плоскости (R) и которые касаются сферы (V). Прямая Vx, параллельная (R), ортогональна (D) и лежит в плоскости PHV; она пересекает HS в точке v. Так как $\triangle vsV \sim \triangle HsP$, то $\frac{Vv}{PH} = \frac{Vs}{Ps} = \frac{\rho}{k \cdot PH}$, откуда $Vv = \frac{\rho}{k}$ и s лежит на одной из окружностей, (C) или (C'), являющейся сечением сферы (V) плоскостями (D, v) и (D, v'), где v и v' — точки пересечения Vx и сферы с центром V и радиусом $\frac{\rho}{k}$; сечения (C) и (C') действительны, так как в силу $k > 1$ имеем $\frac{\rho}{k} < \rho$. Обратно: если точка s лежит на окружности (C), то vs пересекает (D) в точке H, а Vs пересекает (R) в точке P; $PH \perp (D)$ и $\frac{PH}{Vv} = \frac{Ps}{Vs}$; следовательно, $Ps = kPH$. Таким образом, геометрическое место точек s состоит из двух указанных окружностей: (C) и (C'), и существует два семейства сфер $S(P)$, удовлетворяющих поставленному условию: семейство Φ сфер $S(P)$, касающихся (V) в точках окружности (C), и семейство Φ' сфер $S(P)$, касающихся (V) в точках окружности (C'). Геометрическое место (L) центров сфер семейства Φ есть пересечение плоскости (R) с конусом вращения, имеющим вершину V и направляющую окружность (C). Плоскость, параллельная (R) и проходящая через V, пересекает этот конус по двум действительным прямым [так как точка V лежит внутри (C), а прямая Vv принадлежит плоскости, проходящей через V параллельно (R)], половина угла θ между которыми определяется соотношением $\cos\theta = \frac{Vv}{\rho} = \frac{1}{k}$; значит, (L) — гипербола с эксцентриситетом k, фокальная ось которой есть прямая (R), по которой плоскость (R) пересекается с плоскостью, проходящей через V перпендикулярно (D); пусть плоскость (π) пересекает (D) в точке F, а окружность (C) — в точках s_1 и s_2; тогда Vs_1 и Vs_2 пересекут (Δ) в вершинах P_1 и P_2 гиперболы (L). Отрезок s_1s_2 лежит вне угла P_1VP_2, а так как (D) не пересекает (V), то F лежит внутри угла P_1VP_2, иначе, точка F расположена между P_1 и P_2.

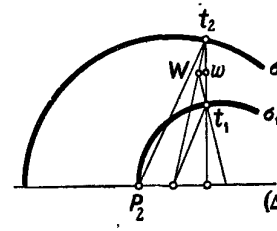


Черт. 292.

б) Изучим сферы (Ω), ортогональные всем сферам Φ (черт. 292).

Сфера (Ω_1) с центром Ω_1, вписанная в указанный выше конус так, что она касается его по окружности (C), будет ортогональна сфере (V). Всякая сфера семейства Φ, касающаяся (V) в точке окружности (C), будет, конечно, также ортогональна (Ω_1); но центры сфер семейства Φ лежат на плоскости (R), поэтому они ортогональны всем сферам (Ω) пучка (F), определенного сферой (Ω_1) и радикальной плоскостью (R). Ось пучка (F) есть перпендикуляр Ω_1A к плоскости (R), проведенный через точку Ω_1; этот перпендикуляр пересекает (R) в точке A, лежащей на прямой (Δ) и служащей центром сферы (Ω_0) (действительной или мнимой) пучка (F). Сферы $S(P_1)$ и $S(P_2)$ семейства Φ имеют центры на прямой (Δ); они принадлежат сети (r) сфер (ось которой есть Ω_1A), ортогональных сферам (Ω). Следовательно, степени точки A относительно сфер $S(P_1)$ и $S(P_2)$ равны между собой: $AP_1^2 - P_1s_1^2 = AP_2^2 - P_2s_2^2$. Но $AP_1^2 - AP_2^2 = 2\overline{P_1P_2} \cdot \overline{AO}$, где O — центр гиперболы (L) и $P_1s_1 = kP_1F$, $P_2s_2 = kP_2F$; следовательно, $P_1s_1^2 - P_2s_2^2 = 2k^2\overline{P_1P_2} \cdot \overline{FO}$, и потому $\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \frac{1}{k^2}$.

в) Изучим теперь сферы (W), касающиеся всех сфер Ф (черт. 293). Окружность (σ_1) пересечения $S(P_1)$ и (π) имеет радиус $kP_1F > P_1F_1$ и, значит, F лежит внутри (σ_1). Аналогично — точка F лежит внутри окружности (σ_2) пересечения $S(P_2)$ и (π). Отсюда следует, что всякий луч, выходящий из F и лежащий в плоскости (π), пересекает (σ_1) в точке t_1, а (σ_2) — в точке t_2. Точка F лежит внутри отрезка P_1P_2, и можно выбрать обозначения так, чтобы точка t_1 лежала внутри отрезка Ft_2. Прямая P_1t_1 пересекает тогда сторону P_2t_2 треугольника FP_2t_2 в точке W, а прямая, проходящая через W, параллельная (Δ), пересекает отрезок t_1t_2 в точке w. Треугольники t_1Ww и t_1P_1F гомотетичны; треугольники t_2Ww и t_2P_2F также гомотетичны; следовательно, $\frac{Ww}{P_1F} = \frac{Wt_1}{P_1t_1}$, $\frac{Ww}{P_2F} = \frac{Wt_2}{P_2t_2}$. Но $P_1t_1 = k \cdot P_1F$ и $P_2t_2 = k \cdot P_2F$; следовательно, $Wt_1 = Wt_2 = k \cdot Ww$ и W есть центр сферы (W) радиуса $\rho_W = k \cdot Ww$, касающийся $S(P_1)$ в точке t_1, а $S(P_2)$ — в точке t_2. Принимая сферу (W) за сферу (V) [см. выше В, 1°, а)] и применяя полученные там результаты, заключаем, что геометрическое место центров сфер $S(P)$ с центрами на плоскости (R) и касательными к (W) в точках окружности (C_w), по которой сфера (W) рассекается плоскостью (D, w), есть гипербола с вершинами P_1, P_2 и эксцентриситетом k: это гипербола (L), и, значит, сферы (W) касаются всех сфер Ф. Далее, $P_1t_1 = P_1W - \rho_W$, $P_2t_2 = P_2W - \rho_W$; следовательно, $P_1W + P_2W = P_1t_1 + P_2t_2 = k(P_1F + P_2F)$. Но точка F лежит между точками P_1 и P_2. Значит, $P_1W + P_2W = kP_1P_2$ и геометрическим местом точек W является эллипс, проходящий через фокусы гиперболы (L), причем (Δ) — его фокальная ось. Две сферы (W) с центрами на плоскости (R), следовательно и на (Δ), которые мы обозначим через (V_1) и (V_2), пересекаются плоскостью (π) по большим их кругам (v_1) и (v_2), касающимся (σ_1) и (σ_2). Центры V_1 и V_2 этих сфер суть фокусы гиперболы (L) (или концы большой оси эллипса, являющегося геометрическим местом точек W). Далее, (R) — плоскость, в которой лежат центры сфер Ф, (V_1) и (V_2). Сечения плоскостью (R) сфер Ф будут окружностями (σ'), касающимися больших кругов (v_1') и (v_2'), по которым та же плоскость (R) пересекает сферы (V_1) и (V_2). Таким образом, огибающая семейства окружностей (σ') состоит из двух окружностей: (v_1') и (v_2'). Центр сферы (Ω_w), ортогональной сфере (W) и пересекающей ее по окружности (C_w), лежит на плоскости (π). Эта сфера (Ω_w), ортогональна трем сферам сети (r): $S(P_1)$, $S(P_2)$ и плоскости (π) (в которую вырождается одна из сфер этой сети), поэтому сфера (Ω_w) входит в пучок (F) сфер (см. выше). Плоскость, проходящая через Ft_1t_2 перпендикулярно (π), — радикальная плоскость сфер (Ω_w) и (W); значит, прямая (D), по которой эта плоскость пересекается с радикальной плоскостью (R) сфер (Ω), есть радикальная ось как сфер (Ω) [ибо она лежит в радикальной плоскости этих сфер], так и сфер (W). Рассмотрим случай, когда центр V сферы (V) лежит на плоскости (R). Обозначим через T_1 и T_2 точки пересечения со сферой (V) прямой (Δ), проходящей через точку V перпендикулярно (D), а через F — точку пересечения прямых (Δ) и (D). Рассмотрим на прямой (Δ) точки P_1 и P_2 такие, что $\frac{\overline{P_1T_1}}{\overline{P_1F}} = -\frac{\overline{P_2T_2}}{\overline{P_2F}} = k$; так как (D) не пересекает (V), то F лежит вне отрезка T_1T_2 и внутри отрезка P_1P_2. Сфера $S(P_1)$ с центром P_1 будет касаться (V) в точке T_1, а сфера $S(P_2)$ с центром P_2 будет касаться сферы (V) в точке T_2. Всякий луч, выходящий из F и лежащий в плоскости (π), проходящей через (Δ) перпендикулярно плоскости (R), будет пересекать эти две сферы соответственно в точках t_1 и t_2; прямая P_1t_1 пересечет отрезок P_2t_2 в точке W, и так же, как было показано выше (в вопросе в), устанавливается, что сферы $S(P)$, центры которых лежат в плоскости (R) и которые касаются (V), образуют семейство Ф сфер, которые будут также касаться сфер (W) с центром W и радиусом $Wt_1 = Wt_2$ в точках окружности (C_w) с диаметром t_1t_2, плоскость которой проходит через прямую (D). Отсюда то же геометрическое место центров P этих сфер $S(P)$ (гипербола с вершинами P_1, P_2 и эксцентриситетом k). Второе семейство Ф′ мы получим, исходя из точек P_1' и P_2' прямой (Δ) таких, что $-\frac{\overline{P_1'T_1}}{\overline{P_1'F}} = \frac{\overline{P_2'T_2}}{\overline{P_2'F}} = k$. Отсюда следует, что сфера (Ω), проходящая через окружность (C_w) и ортогональная (W), будет ортогональна всем сферам Ф и, значит, существует в рассматриваемом частном случае бесконечное множество сфер (Ω), ортогональных всем сферам Ф; центры Ω этих сфер лежат в плоскости (π), проходящей через v перпендикулярно (R); эта плоскость (π) пересекает плоскость (R)



Черт. 293.

по прямой (Δ), которая, в свою очередь, пересекает прямую (D) в точке F. Переходим к следующему вопросу: существование сфер S радиуса $k\cdot PH$ [с центром P, лежащим в плоскости (R)], ортогональных данной сфере (Ω). Пусть R — радиус сферы (Ω). Пусть P — центр сферы $S(P)$ и пусть прямая (d), параллельная (D), пересекает в точке f прямую (Δ), проходящую через A перпендикулярно (D). Тогда $T\Omega^2 - R^2 = k^2\cdot PH^2$. Но $P\Omega^2 = PA^2 + A\Omega^2$ и $\overline{PH} = \overline{fF}$ [F — точка пересечения (D) и (Δ)]; значит, P есть точка пересечения прямой (d) с окружностью, центр которой находится в точке A, а радиус R' определяется из соотношения $R'^2 = k^2\overline{fF}^2 - A\Omega^2 + R^2$. Необходимое и достаточное условие того, что на прямой (d) имеются действительные точки P (различные или нет), удовлетворяющие условию задачи, имеет вид $R' \geqslant Af$ или $\varphi(\overline{Af}) = (k^2-1)\,Af^2 - 2k^2\overline{AF}\cdot\overline{Af} + k^2AF^2 - A\Omega^2 + R^2 \geqslant 0$. Дискриминант этого трехчлена (относительно Af) равен $\Delta' = k^2AF^2 + (k^2-1)(A\Omega^2 - R^2)$. Если (Γ) — мнимая окружность [т. е. плоскость (R) не пересекает сферу (Ω)], то $A\Omega^2 - R^2 > 0$, откуда $\Delta' > 0$; трехчлен $\varphi(\overline{Af})$ имеет два действительных корня: $\overline{AP_1}$ и $\overline{AP_2}$; точки P_1 и P_2 — две действительные различные точки, лежащие на прямой (Δ), и всякая прямая, параллельная (D) и пересекающая (Δ) в точке, внешней по отношению к отрезку P_1P_2, содержит два центра: P и P', сфер $S(P)$ и $S(P')$, ортогональных сфере (Ω). Если (Γ) — действительная окружность, то $R^2 - A\Omega^2 = r^2$ и $\Delta' \geqslant 0$, если $AF \geqslant \dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}\,r$. Если это условие выполнено, то на прямой (Δ) имеются две точки: P_1 и P_2, действительные (различные в случае $AF > \dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}\,r$, совпадающие в случае $AF = \dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}\,r$) такие, что $\overline{AP_1}$ и $\overline{AP_2}$ служат корнями трехчлена $\varphi(\overline{Af})$ и всякая прямая, параллельная (D) и пересекающая (Δ) в точке, внешней по отношению к отрезку P_1P_2, содержит две точки: P и P', служащие центрами сфер $S(P)$ и $S(P')$, ортогональных сфере (Ω). Сами точки P_1 и P_2 также служат центрами сфер $S(P_1)$ и $S(P_2)$, ортогональных (Ω). Если $AF < \dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}\,r$, то трехчлен $\varphi(\overline{Af}) > 0$ для любой точки f; значит, на любой прямой, параллельной (D) и пересекающей (Δ), имеется две точки: P и P', служащие центрами сфер $S(P)$ и $S(P')$, ортогональных сфере (Ω).

Середина O отрезка P_1P_2 определится из соотношения $\overline{AO} = \dfrac{\overline{AP_1} + \overline{AP_2}}{2} = \dfrac{k^2}{k^2-1}\,\overline{AF}$, откуда $\dfrac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{k^2}$; это соотношение позволяет построить точку O. Далее, точки P_1 и P_2 лежат всегда вне сферы (Ω); это ясно, если (R) не пересекает (Ω); если же (Γ) — действительная окружность [(Γ) окружность, по которой (R) пересекает (Ω)], то $\varphi(\pm r) = k^2(r \pm \overline{AF})^2 > 0$, а потому точки пересечения (Δ) с (Γ) лежат вне отрезка P_1P_2, т. е. точки P_1 и P_2 лежат вне сферы (Ω). Далее,

$$\overline{FP_1}\cdot\overline{FP_2} = (\overline{FA} + \overline{AP_1})(\overline{FA} + \overline{AP_2}) = \overline{AF}^2 - (\overline{AP_1} + \overline{AP_2})\,AF + \overline{AP_1}\cdot\overline{AP_2}.$$

Но $\overline{AP_1} + \overline{AP_2} = \dfrac{2k^2\cdot\overline{AF}}{k^2-1}$ и $\overline{AP_1}\cdot\overline{AP_2} = \dfrac{k^2AF^2 - A\Omega^2 + R^2}{k^2-1}$; следовательно, $\overline{FP_1}\cdot\overline{FP_2} = \dfrac{R^2 - A\Omega^2 - AF^2}{k^2-1}$. Если (Γ) — действительная окружность, то $\overline{FP_1}\cdot\overline{FP_2} = \dfrac{r^2 - AF^2}{k^2-1}$. Покажем теперь, как построить точки P_1 и P_2 на прямой (Δ). Если окружность (Γ) мнимая, то пучок (F) сфер, определяемых сферой (Ω) и радикальной плоскостью (R), имеет две точки Понселе. Пусть ω — одна из них. Если P_1 (или P_2) есть центр сферы $S(P_1)$, лежащей на прямой (Δ) и пересекающей ортогонально (Ω), то $P_1\omega = kP_1F$ и $P_2\omega = kP_2F$, поэтому точки P_1 и P_2 суть точки пересечения (Δ) с окружностью Аполлония, лежащей в плоскости (π), которые делят в отношениях k и $-k$ отрезок ωF. Точки P_1 и P_2 лежат по разные стороны от F (ибо $k > 1$) и в этом случае всегда действительны (это уже установлено выше аналитически). Пусть (Γ) — действительная окружность. Обозначим тогда через (Γ') окружность, полученную из (Γ) гомотетией $\left(F,\ \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}\right)$. Рассмотрим несколько случаев:

а) Если (D) не пересекает (Γ), то окружность с центром F, ортогональная (Γ'), пересекает (D) в точках M и M'; окружность с центром O, проходящая через M и M', пересекает (Δ) в искомых точках P_1 и P_2, так как

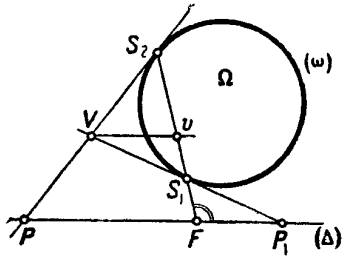
$$\overline{FP_1}\cdot\overline{FP_2} = \overline{FM}\cdot\overline{FM'} = \frac{r^2 - AF^2}{k^2-1}.$$

Точка F расположена в этом случае между P_1 и P_2.

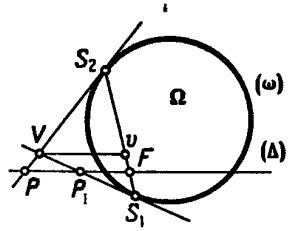
β) Если (D) касается (Γ) (в точке F), то P_1 совпадает с F, а P_2 — точка, симметричная F относительно O.

γ) Если (D) пересекает (Γ) в точках φ_1 и φ_2, то (D) пересекает (Γ') в точках φ_1' и φ_2'; перпендикуляр к (D) в точке φ_1' пересекает в точке O' перпендикуляр к (Δ) в точке O, и окружность с центром O', касающаяся (D) в точке φ_1', пересекает (Δ) в точках P_1 и P_2, так как $\overline{FP}_1 \cdot \overline{FP}_2 = F\varphi_1'^2 = \frac{r^2 - AF^2}{k^2 - 1}$. Точки P_1 и P_2 действительны, если $O'\varphi_1' \geqslant O'O$; используя это и соотношение $\overline{OF} = \frac{\overline{OA}}{k^2}$, приходим к выводу, полученному ранее аналитически: если $AF > \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r$, то точки P_1 и P_2 действительны и различны; если $AF = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r$, то они совпадают (с O); если $AF < \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r$, то точки P_1 и P_2 мнимые. В случае $AF > \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r$ точка F лежит вне отрезка P_1P_2.

Переходим к исследованию вопроса существования сфер (V), касающихся всех сфер (S) [ортогональных (Ω)]. Сферы (S) попарно симметричны относительно плоскости (π), поэтому если существует сфера (V), касающаяся всех сфер (S), то ее центр должен лежать в плоскости (π). Пусть такая сфера существует и пусть какая-нибудь из сфер (S) касается сферы (V) в точке S. Эта сфера (S) ортогональна всем сферам пучка (F), определяемого радикальной плоскостью (R) и сферой (Ω); значит, в частности, она ортогональна и сфере (Ω_1) этого пучка, проходящей через точку S. Отсюда следует, что сфера (Ω_1) ортогональна сфере (V), пересекая ее по окружности (C), проходящей через S. Если другая из сфер (S), скажем $(S)'$, касается сферы (V) в точке S', не лежащей на (C), то (V) ортогональна сфере (Ω_1') [пучка (F)], отличной от (Ω) и проходящей через S'; отсюда следует, что центр сферы (V) лежит на плоскости (R). Если существует сфера (V), центр которой V не лежит в плоскости (R), то необходимо, чтобы сферы (S) касались (V) в точках окружности (C). Центр V сферы (V) и ось окружности (C) лежат в плоскости (π), и конус вращения с вершиной V и основанием (C) пересекает (R) по линии второго порядка, являющейся геометрическим местом центров сфер (S); эта линия второго порядка имеет вершины в точках P_1 и P_2, лежащих на прямой (Δ). Таким образом, для того чтобы существовала сфера (V), центр которой V не лежит в плоскости (R), необходимо, чтобы точки P_1 и P_2 (определенные выше) были действительны и различны, т. е. или чтобы окружность (Γ) была мнимой, или чтобы окружность (Γ) была действительной и $AF > \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r$. Это условие и достаточно. В самом деле, если оно выполнено, точки P_1 и P_2 действительны, различны и лежат вне (Ω). Значит, из точки P_1 можно провести касательную P_1s_1 к окружности (ω), по которой плоскость (π) пересекает сферу (Ω); Fs_1 вторично пересекает (ω) в точке s_2, а касательная к (ω) в точке s_2 пересекает P_1s_1 в точке V,



Черт. 294.



Черт. 295.

а (Δ) — в точке P. Имеем $P_1s_1 = kP_1F > P_1F$; следовательно, $\angle s_1FP_1 > \angle P_1s_1F = \angle s_1s_2P$ (черт. 294 и 295), а потому прямая, проходящая через точку V параллельно (Δ), пересекает отрезок s_1s_2 в точке v. Треугольник s_1Vv гомотетичен треугольнику s_1P_1F, а треугольник s_2Vv гомотетичен треугольнику s_2PF; следовательно, $\frac{Vv}{Vs_1} = \frac{Vv}{Vs_2} = \frac{P_1F}{P_1s_1} = \frac{PF}{Ps_2}$. Но $P_1s_1 = kP_1F$; следовательно, $Ps_2 = kPF$ и потому точка P совпадает с центром P_2 сферы S (P_2). Кроме того, $Vs_1 = Vs_2 = kVv$. Отсюда следует, что конус вращения с вершиной V, описанный вокруг (Ω) вдоль

окружности (C) с диаметром s_1s_2, плоскость которой проходит через (D), пересекает (R) по гиперболе (L) с вершинами P_1, P_2 и эксцентриситетом k. Пусть P — произвольная точка (L); тогда PV пересекает (C) в точке s, а sv пересекает (D) в точке H; треугольники sVv и sPH гомотетичны, PH перпендикулярно (D) и $Ps = k \cdot PH$. Значит, сфера с центром P и радиусом PH касается (V) в точке s и потому будет ортогональна (Ω); указанная сфера, следовательно, входит в рассматриваемое семейство сфер (S). Других сфер (S), кроме сфер с центрами на (L) и касательных к (V) в точках окружности (C), нет, ибо в противном случае на прямой, параллельной (D) в плоскости (R), содержалось бы более двух центров таких сфер. Итак, каждой сфере (Ω) пучка (F) соответствует сфера (V), касающаяся всех сфер (S), ортогональных (Ω). Геометрическое место центров V этих сфер есть эллипс, фокусами которого служат вершины P_1 и P_2 гиперболы (L), которая является геометрическим местом центров P сфер (S), ортогональных (Ω). Так же как и в разделе **В**, устанавливается, что огибающая больших окружностей сфер (S), полученных сечением этого семейства плоскостью (R), является совокупностью двух окружностей: (v_1') и (v_2'), полученных сечением плоскости (R) сфер (V_1) и (V_2), имеющих центры в плоскости (R).

Частный случай. Если $AF = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r$, то (D) пересекает (Γ) в двух точках: φ_1 и φ_2. Точка O является точкой пересечения касательных к (Γ), проведенных в точках φ_1 и φ_2 $\left(\text{это устанавливается из соотношений } AK = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r \text{ и } \overline{AO} = \frac{k^2}{k^2-1}\overline{AF}\right)$. Гипербола (L) вырождается в две прямые: $O\varphi_1$ и $O\varphi_2$, и имеется только одна сфера (V) — это сфера с центром O, проходящая через φ_1 и φ_2; сферы (S) в этом частном случае состоят из двух пучков сфер, касающихся сферы (V) в точках φ_1 и φ_2. Переходим к изучению расположения центра линии (L) относительно точки A и точки I, в которой прямая, сопряженная с (D) относительно (Ω), пересекает плоскость (R); мы дадим также новое построение точки O: плоскость (π) есть плоскость симметрии (D) и (Ω); значит, точка I лежит на прямой (Δ). Так как F и I сопряжены относительно (Ω), то сфера с диаметром FI ортогональна (Ω). Если G есть середина отрезка FI, то $-\overline{GF}\cdot\overline{GI} = G\Omega^2 - R^2$, но $G\Omega^2 = GA^2 + \Omega A^2$, поэтому

$$R^2 - GA^2 - \Omega A^2 = \overline{GF}\cdot\overline{GI} = (\overline{GA} + \overline{AF})(\overline{GA} + \overline{AI}) = \overline{GA}^2 + \overline{GA}(\overline{AF} + \overline{AI}) + \overline{AF}\cdot\overline{AI};$$

отсюда $R^2 - A\Omega^2 = \overline{AF}\cdot\overline{AI} + \overline{GA}(2\overline{GA} + \overline{AF} + \overline{AI})$; сумма в скобках равна нулю, ибо G — середина $\overline{FI}$, значит, $\overline{AF}\cdot\overline{AI} = R^2 - A\Omega^2$; но $\overline{AO} = \frac{k^2}{k^2-1}\overline{AF}$, поэтому $\overline{AO}\cdot\overline{AI} = \frac{k^2}{k^2-1}(R^2 - A\Omega^2)$. Если окружность (Γ) мнимая, то пучок (F) имеет две точки Понселе: ω_1 и ω_2, и $R^2 - A\Omega^2 = \overline{A\omega_1}\cdot\overline{A\omega_2}$, так что $\overline{AO}\cdot\overline{AI} = \frac{k^2}{k^2-1}\overline{A\omega_1}\cdot\overline{A\omega_2}$. Пусть гомотетия $\left(A, \frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right)$ преобразует ω_1 и ω_2 в точки ω_1' и ω_2', тогда $\overline{AO}\cdot\overline{AI} = \overline{A\omega_1'}\cdot\overline{A\omega_2'}$ и, значит, O — вторая точка пересечения (Δ) с окружностью $(I\omega_1'\omega_2')$. Если окружность (Γ) действительна, то $R^2 - A\Omega^2 = r^2$ и та же самая гомотетия преобразует (Γ) в (Γ'); точка O есть точка прямой (Δ), сопряженная I относительно (Γ'). В заключение этого раздела остается найти геометрическое место центров P сфер $S(P)$, ортогональных заданной сфере (Ω) [P лежит в данной плоскости (R)] в случае, если сфер (V), указанных выше, не существует. В этом предположении $AF < \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} r < r$ и, значит, (D) пересекает (Γ) в двух действительных точках: M и M'. Далее, $\overline{AG}\cdot\overline{AI} = r^2$, откуда $AI = \frac{r^2}{AF} > \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} r > r$. Значит, окружность с центром A и радиусом $\frac{k}{\sqrt{k^2-1}} r$ пересекает окружность с диаметром AI в двух действительных точках: φ и φ', симметричных относительно (Δ). Положим $e = \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} > 1$. Радиус (Γ) равен $A\varphi\frac{\sqrt{k^2-1}}{k} = \frac{A\varphi}{e}$, а степень точки P [являющейся центром сферы $S(P)$, пересекающей (Ω) ортогонально] относительно окружности (Γ) равна квадрату радиуса сферы $S(P)$, т. е. $k^2PH^2 = \frac{e^2}{e^2-1}PH^2$.

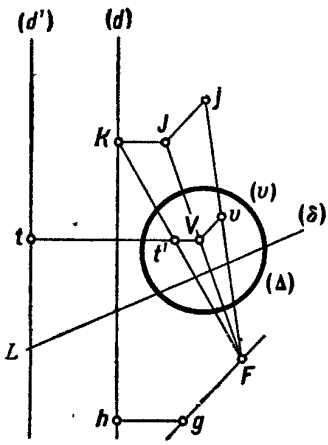
На основании результатов первой части (планиметрия), геометрическое место точек P есть гипербола (E) с фокусами φ и φ' и эксцентриситетом e. Окружности (σ'), по которым сферы (S) пересекаются плоскостью (R), не имеют огибающей.

Замечание. Можно доказать, что сферы (S) в случае существования сфер (V) имеют огибающую, общую с огибающей сфер (V). Эта огибающая (Γ) может быть рассматриваема как геометрическое место окружностей, в точках которых каждая из сфер (S) касается со всеми сферами (V). В случае, если (Ω) не пересекает (R), или в случае, когда (D) пересекает (Γ), производят инверсию, имеющую полюсом соответственно или предельную точку ω пучка (F), или точку φ пересечения (D) и (Γ); в этой инверсии (∇) переходит в конус вращения с вершиной ω (соответственно φ) и, таким образом, сама огибающая (∇) может быть рассматриваема как образ конуса вращения в указанной инверсии. Если (Ω) касается (R) в точке A или если (D) касается (Γ) в точке F, производят инверсию с полюсом A (соответственно F); (∇) есть образ цилиндра вращения в этой инверсии. Наконец, если (D) не пересекает действительную окружность (Γ), производят инверсию, полюсом которой является одна из точек пересечения (Γ) и (Δ); (∇) есть тогда образ тора в этой инверсии. Поверхность (∇) называется циклидой Дюпена, и вопрос **В**, 2° может быть сформулирован так: необходимое и достаточное условие того, что сферы $S(P)$ с центрами, лежащими на плоскости (R) и ортогональными сфере (Ω), имели в качестве огибающей циклиду Дюпена, заключается в том, что или (Ω) не пересекает (R), или, если (Ω) пересекает (R) по действительной окружности (Γ) с центром A и радиусом r, то в том, что прямая (D) лежит вне сферы с центром A и радиусом $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}r$; если же (D) касается этой сферы, то циклида Дюпена вырождается в две точки: φ_1 и φ_2 пересечения прямой (D) со сферой (Ω).

С. 1°. Плоскость (π), перпендикулярная (D) и проходящая через V, пересекает (D) в точке F, а (V) — по ее большому кругу (v). Плоскость (R) определяется прямой (D) и прямой (Δ) плоскости (π), проходящей через F. Прямая, проходящая через V параллельно (Δ), пересекает сферу с центром V и радиусом $\frac{\rho}{k}$ в точках v и v'. Плоскости (D, v) и (D, v') пересекают (V) по окружностям (C) и (C'), и соответствующие геометрические места центров P и P' семейств Φ и Φ' сфер с центрами на (R) и касающихся (V) в точках (C) и (C') суть — две гиперболы: (L) и (L'), лежащие в плоскости (R). Всякая сфера Φ ортогональна сфере (Ω), которая в свою очередь ортогональна сфере (V), пересекая ее по окружности (C), и аналогично — всякая сфера семейства Φ' ортогональна сфере (Ω'), которая в свою очередь ортогональна сфере (V), пересекая ее по окружности (C'). Центры Ω и Ω' сфер (Ω) и (Ω') суть точки пересечения прямой (δ), сопряженной с (D) относительно (V) с диаметрами сферы (V), перпендикулярными соответственно плоскостям (D, v) и (D, v'). Если центр сферы (T) не лежит в плоскости (π), то радикальная плоскость сфер (V) и (T) пересекает (D) в конечной точке σ. Радикальная плоскость (V) и (Ω) есть плоскость (D, v), а так как эта плоскость проходит через прямую (D), то она проходит и через точку σ; точка σ фиксирована и, следовательно, является радикальным центром сфер (V), (T) и переменных сфер (Ω) [в зависимости от (R)]; поэтому точка σ лежит и на радикальной плоскости сфер (P) и (Ω), которая пересекает (R) по прямой (G), проходящей через σ; прямая (G) пересекает гиперболу (L) в двух точках: P_1 и P_2 (действительных или мнимых, совпадающих или нет), являющихся центрами сфер $S(P)$, касающихся (V) и ортогональных (T). Аналогично радикальная плоскость (T) и (Ω') пересекают (R) по прямой (G'), проходящей через σ, а прямая (G') пересекает гиперболу (L') в точках P_1' и P_2', служащих центрами сфер $S(P)$, касающихся (V) и ортогональных (T). Если точка T лежит в плоскости (π) и если радикальная плоскость сфер (V) и (T) не проходит через (D), то прямые (G) и (G') будут параллельны (D); наконец, если точка T лежит в плоскости (π), а радикальная плоскость сфер (V) и (T) проходит через прямую (D), то прямые (G) и (G') сливаются с прямой (D).

2°. Докажем теперь, что если плоскость (R) вращается вокруг (D), то прямая (G) [в случае, если радикальная плоскость сфер (V) и (T) не проходит через (D)] описывает конус с вершиной σ или цилиндр с образующими, параллельными прямой (D), основанием которого служит линия второго порядка, лежащая в плоскости (π), а фокусом является точка F. В самом деле, пусть t (черт. 296) — проекция T на плоскость (π). Радикальная плоскость (V) и (T), перпендикулярная VT, пересекает плоскость (π) по прямой d, перпендикулярной VT и Tt, следовательно, перпендикулярной и Vt. Сферы (Ω) с центрами на прямой (δ) — поляре (D) относительно (V) — ортогональны этой сфере и образуют пучок (f), для которого FV — радикальная ось. Радикальная плоскость сфер (T) и (Ω) пересекает FV в радикальном центре J сферы (T) и пучка (f) [J — в плоскости (π)]. Точка g

пересечения прямой (G) с плоскостью (π) принадлежит радикальной плоскости сфер (T) и (Ω_1), ортогональной (V) вдоль окружности (C_1), по которой сфера (V) пересекается плоскостью (D, v) [v — одна из точек пересечения сферы с центром V и радиусом $\frac{\rho}{k}$ с прямой, проходящей через V параллельно (Δ)]. Отсюда следует, что Jg есть радикальная ось сфер (T) и (Ω_1) и пересекает (на конечном или бесконечном расстоянии) радикальную ось Fv сфер (V) и (Ω_1), причем пересечение происходит в точке, расположенной на прямой (d) и являющейся радикальным центром сфер (T), (V) и (Ω_1). Пусть h и K — проекции на (d) точек g и J, а j — точка пересечения прямой Fv с прямой, проходящей через J параллельно (Δ). Тогда $\frac{gF}{gh} = \frac{Jj}{JK}$. Но $\frac{Jj}{Vv} = \frac{FJ}{FV}$, следовательно, $Jj = \frac{\rho}{k}\frac{FJ}{FV} = \text{const}$, так как точки F, V и J фиксированы. Так как точка K также фиксирована, то $\frac{gF}{gh} = \frac{\rho}{k}\frac{FJ}{JK \cdot FV} = \text{const}$ и геометрическое место точек g есть линия второго порядка с фокусом F и соответствующий ему директрисой (d). Предыдущим соотношением определяется и эксцентриситет этой линии. Дадим ему еще другое выражение: J есть также радикальный центр сферы (T) и сферы (Ω_L) с центром L, в котором прямая (δ) пересекает прямую (d'), проходящую через t параллельно (d). Радикальная плоскость сфер (T) и (Ω_L) перпендикулярна TL и пересекает плоскость (π) по прямой, проходящей через точку J и перпендикулярной LT и Tt, следовательно, перпендикулярной и Lt, т. е. по прямой JK. Отсюда следует, что точка K есть радикальный центр (T), (V) и (Ω_L) и, значит, лежит на радикальной плоскости (V) и (Ω_L), которая, проходя через (D), пересекает плоскость (π) по прямой FK; так как сфера (Ω_L) ортогональна сфере (V), то FK есть поляра точки L относительно окружности (v) [большого круга (V), лежащего в плоскости (π)] и полюс прямой (d') относительно этой окружности [прямая (d') проходит через точку L] есть точка t', в которой FK пересекается с перпендикуляром Vt, опущенным из точки V на прямую (d'). Следовательно, $\overline{Vt} \cdot \overline{Vt'} = \rho^2$ и $\overline{Vt'} = \frac{\rho^2}{\overline{Vt}}$.

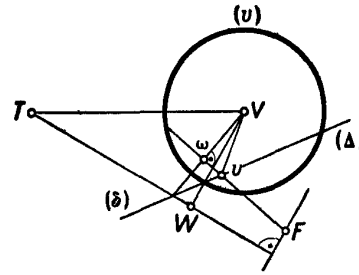


Черт. 296.

Но $\frac{Jj}{JK} = \frac{Vv}{Vt'} = \frac{Vt}{k\rho}$. Следовательно, $\frac{gF}{gh} = \frac{Vt}{k\rho}$ и эксцентриситет указанной выше линии второго порядка равен $\frac{Vt}{k\rho}$; он зависит только от радиуса ρ сферы (V) и от расстояния Vt от центра V сферы (V) до диаметра сферы (T), параллельного (D).

3°. Если радикальная плоскость сфер (V) и (T) не содержит (D), то в ней лежит не более двух пар действительных центров P. Значит, для того чтобы геометрическое место центров P состояло из двух линий второго порядка, расположенных в плоскостях (R_1) и (R_2), проходящих через (D), необходимо, чтобы радикальная плоскость сфер (V) и (T) содержала прямую (D). В этом случае точка T лежит в плоскости (π), и если v — одна из точек пересечения сферы с центром V и радиусом $\frac{\rho}{k}$ и прямой, проходящей через V параллельно (Δ), то сфера (V) ортогональна [вдоль линии (C) пересечения ее с плоскостью (D, v)] сфере (Ω_1) с центром Ω_1 на прямой (δ); (D) — радикальная ось сфер (V), (Ω_1) и (T). Для того чтобы точка P, не лежащая на (D), но лежащая в плоскости (R), определенной прямой (D) и прямой (Δ) плоскости (π), проходящей через F, служила центром сферы $S(P)$, ортогональной (Ω_1) [в точке (C)] и ортогональной (T), необходимо, чтобы (R) была радикальной плоскостью сфер (T) и (Ω_1); следовательно, прямая (Δ) и прямая Vv, ей параллельная, должны быть перпендикулярны $T\Omega_1$; пусть Vv пересекает $T\Omega_1$ в точке W, а $V\Omega_1$ пересекает Fv в точке ω, тогда выполняется условие $\overline{V\omega} \cdot \overline{V\Omega_1} = \overline{Vv} \cdot \overline{VW}$; следовательно, $VW = \frac{k}{\rho} \cdot \rho^2 = k\rho$. Необходимо, таким образом, чтобы прямая (Δ) была перпендикулярна касательной, проведенной из T в плоскости (π) к окружности с центром V и радиусом $k\rho$. Итак, необходимое условие того, что геометрическое место точек P состоит из двух линий второго порядка, лежащих в плоскостях (R_1) и (R_2), проходящих через прямую (D), состоит в том,

что радикальная плоскость сфер (D) и (T) проходит через прямую (D) и что точка T лежит вне сферы с центром V и радиусом $k\rho$ (черт. 297). Это условие и достаточно. В самом деле, если оно выполнено, то из точки T можно провести две касательные: TW_1 и TW_2, к большому кругу сферы $(V, k\rho)$ плоскости (π). Пусть (Δ_1) — перпендикуляр, опущенный из F на TW, а v_1 — точка отрезка VW, такая, что $Vv_1 = \frac{\rho}{k}$. Перпендикуляр, опущенный из V на Fv_1, пересекает эту прямую в точке ω, а TW_1 — в точке Ω_1. Так как $Vv_1 = \frac{\rho}{k}$ и $VW_1 = k\rho$, то $\overline{V\omega}\cdot\overline{V\Omega_1} = \rho^2$ и Ω_1 является центром сферы (Ω_1), ортогональной (V) вдоль окружности (C_1), по которой сфера (V) пересекается плоскостью (D, v_1); точка Ω_1 лежит, следовательно, на прямой (δ). Прямая (D) — радикальная ось сфер (T), (V) и (Ω_1) — ортогональна $T\Omega_1$, и так как (Δ_1) перпендикулярна (D), то плоскость (R_1), проходящая через прямые (Δ_1) и (D), есть радикальная плоскость сфер (T) и (Ω_1). Сферы $S(P)$, касающиеся (V) в точках окружности (C_1), с центрами, лежащими в плоскости (R_1), будут ортогональны (T), и геометрическое место их центров есть гипербола (L_1), лежащая в плоскости (R_1). Аналогично: геометрическое место точек P, лежащих в плоскости (R_2) и служащих центрами сфер $S(P)$, касательных к (V) и ортогональных (T) [(R) — плоскость, проходящая через прямую (D) и прямую (Δ_2), проходящую через F перпендикулярно TW_2], есть гипербола (L_2), лежащая в плоскости (R_2).



Черт. 297.

Замечание. Если точка F совпадает с одной из точек v_1 или v_2, то соответствующая гипербола вырождается в две пересекающиеся прямые.

Глава XXVII. Тождественные преобразования

§ 1. Тождественные преобразования

П. 1. Тождества

66. 0.

П. 2. Условные тождества

64. $1 - n = m^2$. **65.** $(2m^2 - a^2 - b^2 - 2abn)^2 = (b^2 - a^2)^2(1 - n^2)$. **66.** $(1 - b)(1 + 2b)^2 = 2a^2$. **67.** $b(a^2 - 1)^3 + 6(a^2 - 1)^2 - 8 = 0$. **68.** $a^4 = 2a^2 - b^2$. **69.** $(n - m)^2(q^2 - r^2) = (n + m)^2(p^2 + q^2)\sin^2 2a - 2pr(n^2 - m^2)\sin 2a$. **70.** $a^2 + b^2 = 2(1 + c)$. **71.** $(a^2 + b^2)\cos a = 2b$. **72.** $\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 a(1 + \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}^2 c)$. **73.** $ab = (b - a)\operatorname{tg} c$.

§ 2. Суммирование

1. $\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)\sin\frac{2x+nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$, если $h \neq 2k\pi$, где k — целое число.

2. $\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)\cos\frac{2x+nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$, если $h \neq 2k\pi$, где k — целое число.

3. $\dfrac{\sin\left[x + \frac{n(h+\pi)}{2}\right]\sin\frac{(h+\pi)(n+1)}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, если $h \neq (2k+1)\pi$, где k — целое число.

4. $\dfrac{\cos\left[x + \frac{n(h+\pi)}{2}\right]\sin\frac{(h+\pi)(n+1)}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, если $h \neq (2k+1)\pi$, где k — целое число.

5. $\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)(\pi-2h)}{4}\cos\left[x+\dfrac{n(\pi-2h)}{4}\right]}{\sin\dfrac{\pi-2h}{4}}$, если $\sin\dfrac{\pi-2h}{4}\neq 0$. 6. а) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; б) $\dfrac{\sin(2nx)}{2\sin x}$, если $\sin x\neq 0$. 7. $-\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)(x+\pi)}{2}\sin\dfrac{n(x+\pi)}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$, если $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$. 8. $\dfrac{\sin\dfrac{h(2x+\pi)}{2}\sin\left[x+\dfrac{(n-1)(2x+\pi)}{2}\right]}{\cos x}$, если $\cos x\neq 0$. 9. $\sin nx$.

10. $\dfrac{\sin^2 2nx}{\cos x}$ если $\cos x\neq 0$. 11. $\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2k}\cos\dfrac{(n+1)\pi}{2k}}{\sin\dfrac{\pi}{2k}}$. 12. 0. 13. $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$. 14. $\dfrac{1}{2}$.

15. $-\dfrac{1}{2}$. 16. 0. 17. $\dfrac{n\cos x}{2}-\dfrac{\sin nx\cos(n+2)x}{2\sin x}$, если $\sin x\neq 0$.

18. $\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\cos 2^{n+1}x)$. 19. $\dfrac{n}{2}-\dfrac{\sin nh\cos[2x+(n-1)h]}{2\sin h}$, если $\sin h\neq 0$.

20. $\dfrac{n}{2}+\dfrac{\sin nh\cos[2x+(n-1)h]}{2\sin h}$, если $\sin h\neq 0$. 21. $\dfrac{n}{2}-\dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$, если $\sin x\neq 0$. 22. $\dfrac{n}{2}+\dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$, если $\sin x\neq 0$. 23. $\dfrac{n}{2}$. 24. $\dfrac{n}{2}+\dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$, если $\sin 2x\neq 0$. 25. $\dfrac{3}{4}\dfrac{\sin\left[x+\dfrac{n-1}{2}h\right]\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin\left[3x+\dfrac{n-1}{2}3h\right]\sin\dfrac{3nh}{2}}{\sin\dfrac{3h}{2}}$, если $h\neq\dfrac{2k\pi}{3}$, где k — целое число. 26. $\dfrac{3}{4}\dfrac{\cos\left[x+\dfrac{(n-1)h}{2}\right]\sin\dfrac{nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}-$

$-\dfrac{1}{4}\dfrac{\cos\left[3x+\dfrac{3h(n-1)}{2}\right]\sin\dfrac{3nh}{2}}{\sin\dfrac{3h}{2}}$, если $h\neq\dfrac{2k\pi}{3}$, где k — целое число.

27. $\dfrac{3}{4}\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin\dfrac{3x(n+1)}{2}\sin\dfrac{3nx}{2}}{\sin\dfrac{3x}{2}}$, если $x\neq\dfrac{2k\pi}{3}$, где k — целое число. 28. $\dfrac{3}{4}\dfrac{\sin nx\cos nx}{\sin x}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin 3nx\cdot\cos 3nx}{\sin 3x}$, если $x\neq\dfrac{k\pi}{3}$, где k — целое число. 29. 0. 30. 0. 31. $\dfrac{3n}{8}+\dfrac{\cos[4x+2h(n-1)]\sin 2nh}{8\sin 2h}-$

$-\dfrac{\cos[2x+(n-1)h]\sin nh}{2\sin h}$, если $h\neq\dfrac{k\pi}{2}$, где k — целое число. 32. $\dfrac{n\sin x-\sin nx}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$, если $\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$. 33. $\dfrac{(n+1)\sin(x+nh)-n\sin[x+(n+1)h]-\sin x}{4\sin^2\dfrac{h}{2}}$, если $\sin\dfrac{h}{2}\neq 0$. 34. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}2^{n-1}x$. 35. $2[\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}(2^n x)]$. 36. $\dfrac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}x}{2\sin x}$, если $x\neq k\pi$, где k — целое число. 37. $\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{n+1}$. 38. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{n}{n+2}$.

39. $\dfrac{\operatorname{tg}2^n x}{\operatorname{tg}x}$ $(x\neq k\pi)$. 40. $\dfrac{2\cos(2^n x)+1}{2\cos x+1}$, если $\cos x\neq -\dfrac{1}{2}$.

41. $\dfrac{1}{2^n}\dfrac{\cos a-\cos b}{\cos\dfrac{a}{2^n}-\cos\dfrac{b}{2^n}}$, если выражение, стоящее в знаменателе, не равно нулю.

44. $\dfrac{\sin\frac{na}{2}}{n\sin\frac{a}{2}}$. 45. $\dfrac{na^2}{2}$. 46. nk^{n-1}. 47. $\dfrac{4a\pi}{n}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$. При неограниченном увеличении n длина линии стремится к $8a$. 48. $2a\pi(n+1)\sin\dfrac{\pi}{n}$. 49. $\dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$, если $\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$. 50. $\operatorname{ctg}\alpha - 2^n\operatorname{ctg}(2^n\alpha)$. 51. $2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}$. 52. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+n\alpha)$. 53. $\dfrac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\sin x}$.

Глава XXVIII. Обратные тригонометрические функции

4. Следует прежде всего обратить внимание на структуру этих соотношений: если берется сумма двух обратных тригонометрических функций, то она выражается через ту обратную тригонометрическую функцию, значения которой заключены в промежутке от 0 до π, а если берется разность двух обратных тригонометрических функций, то она выражается через ту обратную тригонометрическую функцию, значения которой заключены в промежутке от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. Это простое соображение позволяет дать единообразный вывод всех формул этой группы. Например, пусть а) $0<x<1$, $0<y<1$. Положим $\arcsin x=\alpha$, $\arcsin y=\beta$; тогда $x=\sin\alpha$, $y=\sin\beta$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$; значит, $0<\alpha+\beta<\pi$; далее, $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta=\sqrt{1-y^2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$, и так как $0<\alpha+\beta<\pi$, то $\alpha+\beta=\arcsin x+\arcsin y=\arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)$. Или еще: б) Пусть $\arcsin x=\alpha$, $\arcsin y=\beta$, тогда при $0<x<1$, $0<y<1$ будем иметь $x=\sin\alpha$, $y=\sin\beta$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$, и так как $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$, то $\alpha-\beta=\arcsin x-\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$. Или еще: д) Пусть $\operatorname{arctg}x=\alpha$, $\operatorname{arctg}y=\beta$; $x>0$, $y>0$, тогда $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$; значит, $0<\alpha+\beta<\pi$; далее, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{1-xy}{x+y}$, и так как $0<\alpha+\beta<\pi$, то $\alpha+\beta=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1-xy}{x+y}$. Аналогично доказываются и все остальные формулы этой группы.

6. а) Положим $\arcsin x=\alpha$, считая $0<x<1$. Тогда $x=\sin\alpha$, причем $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Теперь имеем: $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=x$, $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$; отсюда (складывая и вычитая) находим: $\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=1+x$, $\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=1-x$. Так как $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, то $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$; значит, $\cos\dfrac{\alpha}{2}>\sin\dfrac{\alpha}{2}$, поэтому $\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{1+x}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{1-x}$, откуда $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$; следовательно, $\dfrac{\alpha}{2}=\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$, или $\dfrac{1}{2}\arcsin x=\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$.

б) Положим $\arccos x=\alpha$, считая $0<x<1$; тогда $\cos\alpha=x$, причем $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, и так как $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\alpha}{2}=\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, или $\dfrac{1}{2}\arccos x=\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

в) Положим $\operatorname{arc tg} x = \alpha$, считая $x > 0$; тогда $\operatorname{tg}\alpha = x$, причем $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, то $x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, или $x\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - x = 0$, откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}$. Так как $x > 0$, то корни разных знаков, а так как $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому следует взять лишь положительный корень этого уравнения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. Отсюда $\left(\text{в силу неравенств } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$ будем иметь $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, или $\frac{1}{2}\operatorname{arc tg} x = \operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

8. а) 0, б) $\frac{\pi}{6}$, в) $\frac{\pi}{4}$, г) $\frac{\pi}{3}$, д) $\frac{\pi}{2}$, е) $-\frac{\pi}{6}$, ж) $-\frac{\pi}{4}$, з) $-\frac{\pi}{3}$, и) $-\frac{\pi}{2}$. **9.** а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{\pi}{3}$, в) $\frac{\pi}{4}$, г) $\frac{\pi}{6}$, д) 0, е) $\frac{2\pi}{3}$, ж) $\frac{3\pi}{4}$, з) $\frac{5\pi}{6}$, и) π. **10.** а) 0, б) $\frac{\pi}{6}$, в) $\frac{\pi}{4}$, г) $\frac{\pi}{3}$, д) $-\frac{\pi}{6}$, е) $-\frac{\pi}{4}$, ж) $-\frac{\pi}{3}$. **11.** а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{\pi}{3}$, в) $\frac{\pi}{4}$, г) $\frac{\pi}{6}$, д) $\frac{2\pi}{3}$, е) $\frac{3\pi}{4}$, ж) $\frac{5\pi}{6}$. **12.** а) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, в) $\frac{\sqrt{15}}{4}$, г) $\frac{4}{5}$, д) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, е) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, ж) $-\frac{3\sqrt{10}}{20}$, з) $-\frac{4}{3}$. **13.** а) $\frac{4}{9}\sqrt{2}$, б) $-\frac{44}{125}$, в) $2x^2-1$, г) $x(4x^2-3)$, д) $\frac{8}{17}$, е) $\frac{37}{55}$. **14.** а) $\frac{\pi}{3}$, б) $\frac{\pi}{5}$, в) $-\frac{\pi}{2}$, г) $\frac{\pi}{4}$. **15.** а) $5-2\pi$, б) $4\pi-10$, в) $3\pi-8$, г) $4\pi-12$. **16.** а) $\pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, б) $\arcsin\frac{3\sqrt{5}}{7}$, в) $\arcsin\frac{5}{13}$, г) $-\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$, д) $\pi - \arcsin\frac{5}{13}$, е) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$. **17.** а) $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$, б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, в) $\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$, г) $-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, д) $-\arccos\frac{4}{5}$, е) $\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. **18.** а) $\operatorname{arc tg}\frac{3}{4}$, б) $\operatorname{arc tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$, в) $\operatorname{arc tg}\frac{2\sqrt{30}}{7}$, г) $\pi + \operatorname{arc tg}\left(-\frac{\sqrt{11}}{5}\right)$, д) $\operatorname{arc tg}\frac{1}{4}$, е) $\pi + \operatorname{arc tg}\left(-\frac{3}{2}\right)$. **19.** а) $\operatorname{arc ctg}\sqrt{99}$, б) $\operatorname{arc ctg}(-2\sqrt{2}) - \pi$, в) $\operatorname{arc ctg}\frac{2}{5}$, г) $\operatorname{arc ctg}(-2) - \pi$, д) $\operatorname{arc ctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$, е) $\operatorname{arc ctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$. **20.** а) $\arccos\frac{2(\sqrt{42}-1)}{15}$, б) $\arcsin\frac{4\sqrt{6}-\sqrt{5}}{15}$, в) $\arccos\frac{1-8\sqrt{3}}{15}$, г) $\arcsin\frac{3-4\sqrt{15}}{20}$, д) $\frac{\pi}{4}$, е) $\operatorname{arc tg}\frac{1}{7}$, ж) $\operatorname{arc ctg}\frac{1}{17}$, з) $\operatorname{arc tg}\frac{3}{11}$. **21.** а) $\arccos\frac{-\sqrt{7}-6\sqrt{2}}{12}$, б) $\arcsin\frac{1-4\sqrt{2}-2\sqrt{3-\sqrt{2}}}{15\sqrt{2}}$, в) $\arccos\frac{2(\sqrt{21}-\sqrt{5})}{15}$, г) $\arcsin\frac{\sqrt{7}-3}{4\sqrt{2}}$. **22.** а) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, б) $\arccos\frac{1}{3}$, в) $\operatorname{arc ctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$, в) $\operatorname{arc ctg}\left(-\frac{15}{8}\right)$. **23.** а) $\pi + \arccos\frac{7}{25}$, б) $\operatorname{arc ctg}\frac{12}{5} - \pi$, в) $\operatorname{arc ctg}\frac{95}{168} + \pi$. **24.** а) $-\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$, б) $\frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{\frac{5}{8}}$, в) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{13}-3}{2}$. **25.** а) $\arccos\frac{1+\sqrt{7}}{4}$, б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$, в) $\operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{10}-1}{3}$. **28.** $\frac{\pi}{2}$. **30.** $\frac{1}{50}$. **41.** $\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

42. $\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$. 43. $2\sqrt{x(1-x)}$. 44. x^2-x+1. 45. $\frac{x(1+2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$.
46. $(2x-1)\sqrt{\frac{1+x}{2}}$. 47. $4x^3-3x$. 48. $8x^4-8x^2+1$. 49. $\frac{x^5-3x^4-7x^3+5x}{5x^4-4x^2-6x+1}$.
50. $\frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. 51. $3x-4x^3$. 52. π, если $x>0$; $4\arcsin x$, если $x<0$.
53. $2\arccos x+\frac{\pi}{3}$, если $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant 1$, и $\frac{2\pi}{3}$, если $-1\leqslant x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.
54. $\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$. 55. $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$. 56. $\frac{\sqrt{2+x^2-2\sqrt{1+x^2}}}{x}$.
57. $\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$. 58. 0. 59. $\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$. 60. $x\sqrt{2x-x^2}+(1-x)\sqrt{1-x^2}$.
61. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 62. $\frac{x^2-1}{x}$. 63. $\frac{2x}{1-x^2}$. 64. $\frac{2b}{a}$. 98. Пусть k — наибольшее целое число, меньшее чем x, т. е. $k<x<k+1$. Тогда $x=k+\alpha$, где $0<\alpha<1$. Имеем $\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)=\frac{2(k+\alpha)-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2(k+\alpha)-1}{2}\pi\right)=$ $=k+\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\alpha\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Так как $0<\alpha<1$, то $0<\alpha\pi<\pi$; значит, $-\frac{\pi}{2}<\alpha\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$, поэтому $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\alpha\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\alpha\pi-\frac{\pi}{2}$, и мы находим $\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)=k+\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\alpha\pi-\frac{\pi}{2}\right)=k+\alpha-\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{2}=$ $=k=[x]$.

Глава XXIX. Тригонометрические и трансцендентные уравнения и неравенства

§ 1. Тригонометрические уравнения с одним неизвестным

1. $\frac{k\pi}{2}$, $\frac{k\pi}{5}$. 2. $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. 3. $180^\circ k-17^\circ 30'-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}$, $90^\circ(2k+1)-17^\circ 30'+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}$. 4. $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $(2k+1)\frac{\pi}{8}$. 5. $\frac{k\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{8}$.
6. $k\pi-\frac{\pi}{4}$, $k\pi+\operatorname{arctg}5$. 7. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{4}$, $(2k+1)\frac{\pi}{10}$.
8. $k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}$. 9. Эта очень трудная задача была предложена поступающим на механико-математический факультет МГУ и решалась многими следующим образом. Перепишем данное уравнение так: $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\pi\operatorname{ctg}x\right)$. Для того чтобы тангенсы двух аргументов были бы равны, необходимо (но не достаточно, см. ниже), чтобы выполнялось равенство $\pi\operatorname{tg}x=\frac{\pi}{2}-\pi\operatorname{ctg}x+k\pi$, где k — любое целое число. Последнее уравнение после упрощений принимает вид $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}+k$, откуда $\sin 2x=\frac{4}{1+2k}$. Так как $|\sin 2x|\leqslant 1$, то $\left|\frac{4}{1+2k}\right|\leqslant 1$, и так как k — целое число, то оно может быть любым целым числом, кроме 0, 1, -1, -2. Из соотношения $\sin 2x=\frac{4}{1+2k}$ находим $2x=2\pi n+$ $+\arcsin\frac{4}{1+2k}$, $2x=2\pi n+\pi-\arcsin\frac{4}{1+2k}$ и окончательно имеем: $x=n\pi+$ $+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}$, $x=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}$, где k — любое число, кроме 0, 1, -1 и -2, а n — любое целое число. Это решение ошибочно. Однако вскрыть

в таком решении погрешность не легко! Дефект решения заключается в следующем: соотношение

$$\pi \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x + k\pi \tag{1}$$

есть **следствие** соотношения

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right); \tag{2}$$

иначе говоря, каждый корень уравнения (2) есть вместе с тем и корень уравнения (1); обратное же утверждение с логической точки зрения недопустимо, а именно: мы не можем утверждать, что если выполнено соотношение (1), то будет выполнено и соотношение (2); иначе говоря, если аргументы равны, то нельзя утверждать, что будут равны их тангенсы. Например, равенство $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ верное, но равенство $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет смысла $\left(\text{как говорят: } \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \text{ не определен, или не существует, или выражение } \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \text{ лишено смысла}\right)$. Таким образом, если уравнению (1) удовлетворяет значение $\operatorname{tg} x = \frac{2k+1}{2}$, где k — целое число, то уравнения (1) и (2) не эквивалентны, ибо при $\operatorname{tg} x = \frac{2k+1}{2}$ функция $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$ теряет смысл. Точно так же, если уравнению (1) удовлетворяет значение $\operatorname{ctg} x$, найденное из уравнения $\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ или $\operatorname{ctg} x = k$, где k — целое число, то опять это значение $\operatorname{ctg} x$ не удовлетворяет уравнению (2), так как $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ не определен. Итак, мы должны исследовать вопрос о наличии у уравнения (1) корней вида $\operatorname{tg} x = \frac{2k+1}{2}$, где k — целое число. Прежде всего заметим, что если $\operatorname{tg} x = 0$, то $\operatorname{ctg} x$ не определен, а если $\operatorname{ctg} x = 0$, то $\operatorname{tg} x$ не определен; потому уравнение (1), или $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x + k$, эквивалентно следующему: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + k$ или $\operatorname{tg}^2 x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x + 1 = 0$ (этому уравнению $\operatorname{tg} x = 0$ не удовлетворяет), откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{4}\left(2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}\right).$$

Прежде всего мы видим, что должно быть $(2k+1)^2 - 16 \geqslant 0$; значит, для k исключаются значения $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$, $k = -2$. Далее, мы видим, что $\operatorname{tg} x$ будет рациональным числом, если $(2k+1)^2 - 16$ будет точным квадратом. Полагая $2k+1 = a$, $(2k+1)^2 - 16 = b^2$ (b — целое число), будем иметь $a^2 - b^2 = 16$. Это уравнение (одно уравнение с двумя неизвестными) надо решить в целых числах, причем a должно быть нечетным. Для решения положим $a - b = u$, $a + b = v$; тогда получим $uv = 16$. Если a и b — целые числа, то u и v — тоже целые. Таким образом, задача будет решена, если мы решим последнее уравнение в целых числах и выберем те решения, которые дают для a и b целые значения и притом с нечетным a. Уравнение $uv = 16$ имеет в целых числах следующие десять решений: $u_1 = 1$, $v_1 = 16$; $u_2 = 2$, $v_2 = 8$; $u_3 = 4$, $v_3 = 4$; $u_4 = 8$, $v_4 = 2$; $u_5 = 16$, $v_5 = 1$; $u_6 = -1$, $v_6 = -16$; $u_7 = -2$, $v_7 = -8$; $u_8 = -4$, $v_8 = -4$; $u_9 = -8$, $v_9 = -2$; $u_{10} = -16$, $v_{10} = -1$. Так как $a = \frac{u+v}{2}$, $b = \frac{v-u}{2}$ и a нечетное, то из этих решений нам годятся только следующие: u_2v_2; u_4v_4; u_7v_7; u_9v_9, откуда $a = 5$ или $a = -5$. Но если $a = 5$, то $k = 2$, а если $a = -5$, то $k = -3$. Подставляя $k = 2$ в соотношение $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}\left(2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}\right)$, получим $\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm 3}{4}$ или $\operatorname{tg} x = 2$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. Последнее значение $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет начальному уравнению, но $\operatorname{tg} x = 2$ ему удовлетворяет. Отсюда $x = k\pi + \operatorname{arc tg} 2$. При $k = -3$ получим $\operatorname{tg} x = \frac{-5 \pm 3}{2}$, откуда $\operatorname{tg} x = -2$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$. Опять $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$

данному уравнению не удовлетворяет, а $\operatorname{tg} x = -2$ удовлетворяет, откуда $x = k\pi - \operatorname{arc\,tg} 2$. Итак, решения данного уравнения следующие:

$$x = \pi n + \operatorname{arc\,tg} \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4},$$

где n — любое целое число, а k — любое целое число, кроме $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$, $k = 2$, $k = -2$ и $k = -3$. Корнями данного уравнения являются еще следующие значения x: $x = k\pi \pm \operatorname{arc\,tg} 2$, где k — любое целое число. **10.** $k\pi$, $k\pi - \frac{\pi}{4}$. **11.** $2k\pi \pm \alpha \pm \beta$. **12.** $(3k \pm 1)\frac{\pi}{2}$. **13.** $2k\pi + \frac{\pi}{4}$. **14.** $k\pi + \frac{\pi}{4}$. **15.** $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$. **16.** $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin(4 - 2\sqrt{3})$. **17.** $2k\pi + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$, $2k\pi + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$. **18.** $k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{3}$. **19.** $(2k+1)\frac{\pi}{4}$. **20.** $2k \pm \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}$, $2k \pm \frac{1}{3}$, $2k + 1 \pm \frac{1}{\pi}\arccos\frac{7}{10}$. **21.** Корней нет **22.** $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **23.** $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{48}$, $\frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{48}$. **24.** $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$, $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{8}$. **25.** $k\pi + \frac{\pi}{6}$. **26.** $\frac{k\pi}{4}$. **27.** $\frac{k\pi}{9}$, $\frac{k\pi}{7}$. **28.** $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$. **29.** $(2k+1)\frac{\pi}{4}$. **30.** $(4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$. **31.** $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi - \frac{\pi}{4}$. **32.** $k\pi$, $\frac{2k+1}{8}\pi$. **33.** $\frac{2}{3}(2k+1)\pi$, $\frac{2}{5}(2k+1)\pi$. **34.** $k\pi$, $\frac{10k+1}{10}\pi$, $\frac{10k+2}{10}\pi$, $\frac{10k+3}{10}\pi$, $\frac{10k+4}{10}\pi$, $\frac{10k+6}{10}\pi$, $\frac{10k+7}{10}\pi$, $\frac{10k+8}{10}\pi$, $\frac{10k+9}{10}\pi$. **35.** $(2k+1)\frac{\pi}{4}$. **36.** $k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{7}$. **37.** $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$, $k\pi + \frac{\pi}{4}$. **38.** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **39.** $\frac{k\pi}{2}$. **40.** $\frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{10}$, $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$. **41.** $(2k+1)\pi$, $2k\pi - \frac{\pi}{2}$. **42.** $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. **43.** $(2k+1)\pi$, $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$. **44.** $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$, $k\pi + \frac{\pi}{4}$. **45.** $k\pi$, $(4k+1)\frac{\pi}{2}$. **46.** $\frac{k\pi}{3}$. **47.** $\frac{k\pi}{4}$, $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. **48.** $2k\pi$, $k\pi + \frac{\pi}{4}$. **49.** $(2k+1)\pi$, $2k\pi + \frac{\pi}{2}$. **50.** $\frac{k\pi}{2}$. **51.** $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. **52.** $k\pi$, $k\pi - \frac{\pi}{4}$. **53.** $\frac{k\pi}{11} - \frac{\pi}{66}$, $\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{9}$. **54.** $2k\pi$, $2k\pi + \frac{\pi}{2}$. **55.** $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$. **56.** $2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k\pi + \frac{\pi}{4}$. **57.** $\frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{24}$, $k\pi + \frac{\pi}{2}$. **58.** $k\pi + \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}$. **59.** $k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left[\operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right]$. **60.** Если $\operatorname{tg} a = 0$, то предложенное соотношение — тождество. Если $\operatorname{tg} a \neq 0$, то $x = \frac{a}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{4}$. **61.** $4k\pi$, $4k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $4k\pi \pm \frac{5\pi}{3}$. **62.** $2k\pi$, $2k\pi + \frac{\pi}{2}$. **63.** Если $a = 2k\pi$, где k — любое целое число, то данное уравнение является тождеством. В остальных случаях корни $x = 2k\pi$ и $x = 2k\pi + a$. **64.** $k\pi \pm \arcsin\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$, $k\pi \pm \arcsin\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$. **65.** $\frac{k}{6}$, $\frac{k}{9}$. **66.** $\log_2 \frac{k\pi + (-1)^k 3\varphi}{\varphi}$, где k — любое целое число такое, что выражение под знаком логарифма положительно. **67.** $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k\pi$. **68.** $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. **69.** $(3+4k)\pi$, $2k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$. **70.** $2k\pi$, $2k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{2}$. **71.** $k\pi + \frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)$, $\frac{2k+1}{2}\pi - \frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)$. **72.** $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **212.** $(-1)^n \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi n}{3}$. **213.** $\frac{2\pi n}{5} \pm \frac{1}{5}\arccos\frac{1}{3}$. **214.** $4\operatorname{arc\,tg} 8 + 4k\pi$. **215.** $\frac{3}{2}(k+1)\pi - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,ctg}\frac{7}{13}$. **216.** $\pi n \pm \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$. **217.** $\pi n \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{7}}$.

218. $k\pi \pm \operatorname{arctg}\sqrt{10}$. **219.** $k\pi \pm \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{7}{13}}$. **220.** $(4k+1)\frac{\pi}{2}-1$, $(4k+1)\frac{\pi}{18}-\frac{5}{9}$. **221.** $\frac{2k+1}{4}-\frac{4}{15}$. **222.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. **223.** $k+\frac{1}{4}$, $k+\frac{7}{12}$. **224.** $\frac{2k+1}{4}$, $k\pm\frac{1}{6}$. **225.** k, $\frac{2k+1}{4}$. **226.** k. **227.** $\frac{\pi}{9}\left(k+\frac{1}{12}\right)$, $(2k+1)\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{24}$. **228.** x — произвольное число, не равное $k+\frac{1}{2}$. **229.** $(4k+1)\frac{\pi}{8}$. **230.** $k\pi$. **231.** $\frac{k}{2}+(-1)^k\frac{1}{2\pi}\arcsin(\sqrt{3}-1)$. **232.** $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$. **233.** $(2k+1)\frac{\pi}{8}$. **234.** $\frac{2k\pi}{15}$, где k — произвольное четное число, некратное 15. **235.** $(2k+1)\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$, $2k\pi+\frac{\pi}{6}$. **236.** Полагая $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=u$, $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=v$, получим $u+v=1$, $u^5+v^5=a$. Находим: $(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)=a$, $u^4+2u^2v^2+u^4-2u^2v^2+u^2v^2-uv(u^2+2uv+v^2-2uv)=a$, $(u^2+v^2)^2-u^2v^2-uv(1-2uv)=a$, $(1-2uv)^2-u^2v^2-uv+2u^2v^2=a$, $5(uv)^2-5uv+1=0$, $uv=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{1+4a}{5}}\right)$. Имеем две системы:

$$u+v=1,\quad uv=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1+4a}{5}}\right);$$

$$u+v=1,\quad uv=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1+4a}{5}}\right).$$

Решения первой системы мнимые. Решения второй $\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{2\sqrt{\frac{1+4a}{5}}-1}\right.$. **Исследование.** а) $1+4a>0$, $a>-\frac{1}{4}$; б) $\sqrt{\frac{1+4a}{5}}-1>0$, откуда $a>\frac{1}{16}$; в) $1+\sqrt{2\sqrt{\frac{1+4a}{5}}-1}<2$, откуда $a<1$. Итак, $\frac{1}{16}<a<1$. При этих условиях $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{2\sqrt{\frac{1+4a}{5}}-1}\right]$, значит, $x=k\pi+\frac{\pi}{6}\pm$ $\pm\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{2\sqrt{\frac{1+4a}{5}}-1}\right)}$. **237.** $2k\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **238.** Корней нет. **239.** 11 корней. **240.** Если $a\leqslant -4-2\sqrt{6}$, то $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\times$ $\times\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a-8}}{2(a-1)}$; если $a\geqslant\frac{3}{2}$, то $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{-a+\sqrt{a^2+8a-8}}{2(a-1)}$; при всех остальных значениях a решений нет. **241.** $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{4}{4n+1}$, где k — любое целое число, а n — любое целое число, кроме $n=0$ и $n=-1$, и еще $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{4n+1}$, где k и n — любые целые числа. **242.** $m=\frac{\pi}{3}$, $x=k\pm\frac{1}{6}$. **243.** $x=\frac{2}{1\pm 4k}$, где k — любое целое число. На данном сегменте уравнение имеет 250 корней. **244.** Данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе: $m^2(\cos x-\sin x)^2=1+\sin x\cos x$, $m(\cos x-\sin x)\geqslant 0$ или $\sin 2x=\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, $m(\cos x-\sin x)\geqslant 0$. Условие существования решения $-1\leqslant\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}\leqslant 1$, откуда $|m|\geqslant\frac{1}{2}$. Предполагая $|m|\geqslant\frac{1}{2}$, обозначим через α

угол, расположенный на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, такой, что $\sin\alpha = \frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$; тогда $\sin 2x = \sin\alpha$; значит, $x = \frac{\alpha}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}$. Окончание дуги $\frac{\alpha}{2}$, следовательно, расположено на дуге $\overset{\frown}{PQ}$ тригонометрического круга, а окончание дуги $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ — на дуге $\overset{\frown}{PQ'}$. Пусть M — окончание дуги $\frac{\alpha}{2}$ и N — окончание дуги $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Дуги x, являющиеся решением уравнения $m^2(\cos x - \sin x)^2 = 1 + \sin x \cos x$, оканчиваются тогда в точках M и M' и в точках N и N'. Таковы решения только что указанного уравнения. Если $m > 0$ $\left(\text{в этом случае } m \geqslant \frac{1}{2}\right)$, решение данного уравнения дают дуги, оканчивающиеся в M и N'. Если же $m < 0$ $\left(\text{в этом случае } m \leqslant -\frac{1}{2}\right)$, решение данного уравнения дают дуги, оканчивающиеся в M' и N. Иначе, если $m \geqslant \frac{1}{2}$, то $x = 2k\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, $x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, а если $m \leqslant -\frac{1}{2}$, то $x = 2k\pi + \pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$.

Замечание. Если $m = \pm\frac{1}{2}$, то $\sin\alpha = -1$, откуда $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Точки M и N совпадают тогда с P, а точки M' и N' — с P'. Из предыдущего следует, что если $|m| > \frac{1}{2}$, то данное уравнение имеет в интервале $(-\pi, \pi)$ два корня: при $m > \frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, а при $m < -\frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$, $x_2 = -\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{m^2-1}{m^2+\frac{1}{2}}$.

245. Если $m \neq \frac{1}{2}$, то или $x = 2k\pi$, или $x = \frac{2k\pi}{2m-1}$, где k — любое целое число. Уравнение обращается в тождество при $m = \frac{1}{2}$. Если m — целое положительное и > 1, то окончание дуг, дающих решение данного уравнения, суть вершины правильных многоугольников с $2m-1$ сторонами. 1°. В случае $m = 2$ будем иметь правильный треугольник, в случае $m = 3$ — правильный пятиугольник.

2°. а) В случае $m = 2$, $\cos x = 1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$. б) В случае $m = 3$ $\cos x = 1$, $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

3°. Предположим радиус окружности равным 1. Если известен косинус дуги x, то длина стягивающей хорды будет $2\sin\frac{x}{2}$, т. е. $2\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. Для $m = 2$ получим $\sqrt{3}$. Для $m = 3$ (для выпуклого пятиугольника) $2\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = 2\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, для звездчатого $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$.

4°. Ответ: $8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$. Это уравнение определяет косинусы дуг, начало которых лежит в начале отсчета дуг, а концы — вершины правильного вписанного в окружность семиугольника.

§ 2. Системы тригонометрических уравнений

1. $\left(k\pi,\ \frac{\pi}{4}-k\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\pi\right)$. **2.** Если $m+n\neq 0$, то

$$x=\frac{\alpha}{2}+k\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-n}{m+n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y=\frac{\alpha}{2}-k\pi-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-n}{m+n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Если $m+n=0\left(m\neq 0,\ n\neq 0,\ \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\right)$,

то $x=\frac{\alpha}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\alpha}{2}-(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

3.

$$x-y=2k\pi\pm\arccos\left(\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{2}{9}}\right),$$

$$x+y=2n\pi\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{2}{9}}\right)$$

с любым набором знаков (k и n — любые целые числа).

4.

$$x=(k+s)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8},$$

$$y=(k-s)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8};$$

$$x=(k+s)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8},$$

$$y=(k-s)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8};$$

$$x=(k+s)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8},$$

$$y=(k-s)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8};$$

$$x=(k+s)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8},$$

$$y=(k-s)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}.$$

5. $x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}(-1)^s+\left(k+\frac{s}{2}\right)\pi,\ y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}(-1)^s+\left(k-\frac{s}{2}\right)\pi$, где k и s — любые целые числа. **6.** $x=k\pi+\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi),\ y=-k\pi+\frac{\varphi}{2}\mp\arccos(2a-\cos\varphi)$, где k и s — любые целые числа. **7.** $\left[(2k+2s+1)\frac{\pi}{4},\ (2k-6s-3)\frac{\pi}{4}\right]$, где k и s — любые целые числа. **8.** $x=75^\circ\pm 180^\circ k,\ y=60^\circ\mp 180k$. **9.** $x=30^\circ\pm 180^\circ k,\ y=60^\circ\pm 180^\circ k$. **10.** $x=k\pi\pm\frac{\pi}{12}+\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ y=\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-k\pi\mp\frac{\pi}{12}$. **11.** $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},\ y=2s\pi\pm\frac{\pi}{3}$. **12.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ y=\pi n+\operatorname{arc\,tg}3,\ z=\frac{3\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}3-(k+n)\pi$, где k и n — любые целые числа. **13.** $x=2k\pi+2\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{a}{2b}(b-1)\mp\sqrt{1-b^2}\right],\ y=2s\pi+2\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{a}{2b}(b+1)\pm\sqrt{1-b^2}\right]$. **14.** $x=2k+\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{6}-2k$. **15.** $x=k+\frac{1}{3}(-1)^k,\ y=\frac{2}{3}-(-1)^k\frac{1}{3}-k$.

16. $x=\frac{1}{3}+k,\ y=\frac{1}{3}-k$. 17. $\left(k, \frac{1}{4}-k\right), \left(\frac{1}{4}+k, -k\right)$. 18. $x=\frac{1}{3}+2n+k$, $y=k$; $x=\frac{1}{2}+2n+k,\ y=k+\frac{1}{6}$; $x=2n+k,\ y=\frac{1}{3}+k$; $x=\frac{1}{6}+2n+k$, $y=\frac{1}{2}+k$. 19. $x=\frac{1}{3}+k,\ y=\frac{1}{3}+n$; $x=-\frac{1}{3}+k,\ y=-\frac{1}{3}+n$. 20. $x=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc tg}\frac{a}{b}\sqrt{-\frac{1-b^2}{1-a^2}}+m,\ y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc tg}\sqrt{-\frac{1-b^2}{1-a^2}}+k$. Решение существует, если один из параметров больше, а другой меньше единицы по модулю. 21. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{a}{2b}(b-1\mp\sqrt{b^2-1}),\ \operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}=\frac{a}{2b}(b+1\pm\sqrt{1-b^2})$. 22. $x=k\pm\frac{1}{\pi}\operatorname{arc tg}\frac{1}{\sqrt{7}},\ y=s\pm\frac{1}{\pi}\operatorname{arc tg}\frac{9}{\sqrt{7}},\ z=-k-s\mp\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc tg}\frac{1}{\sqrt{7}}+\operatorname{arc tg}\frac{9}{\sqrt{7}}\right)$. 23. $x=\frac{2+\sqrt{2}}{4k},\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{4k}$; $x=\frac{2-\sqrt{2}}{4k},\ y=\frac{2+\sqrt{2}}{4k},\ k=\pm 1$, 24. $x=k+n+\sqrt{k^2-n^2},\ y=k+n-\sqrt{k^2-n^2}$; $x=k+n-\sqrt{k^2-n^2}$, $y=k+n+\sqrt{k^2-n^2}$, k — произвольное целое число, удовлетворяющее условию $|k|>|n|$. 25. $\left(\frac{7+\sqrt{23}}{12}, \frac{7-\sqrt{23}}{12}\right), \left(\frac{7-\sqrt{23}}{12}, \frac{7+\sqrt{23}}{12}\right)$. 26. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{2-\sqrt{14}}{6}, \frac{2+\sqrt{14}}{6}\right), \left(\frac{-2-\sqrt{14}}{6}, \frac{-2+\sqrt{14}}{6}\right), \left(\frac{4\pm\sqrt{2}}{6}, \frac{4\mp\sqrt{2}}{6}\right)$. 27. $\left(\frac{3}{2}\left[k+\frac{1}{4}\pm\sqrt{32-\left(k+\frac{1}{4}\right)^2}\right], \frac{1}{2}\left[k+\frac{1}{4}\pm\sqrt{32-\left(k+\frac{1}{4}\right)^2}\right]\right)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ — всего 22 решения. 28. $x=k\pi+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+$ $+\varepsilon_1\arccos\frac{\varepsilon_2\sqrt{a^2+b^2}}{2},\ y=n\pi+\operatorname{arc tg}\frac{a}{b}-\varepsilon_1\arccos\frac{\varepsilon_2\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, где $\varepsilon_1=\pm 1$, $\varepsilon_2=\pm 1$; решения существуют, если $a^2+b^2\leqslant 4$. 29. $x=k\pi+\operatorname{arc tg}\frac{2}{3}$, $y=(2n-k)\pi+\operatorname{arc ctg}\frac{2}{3}$; $x=k\pi-\operatorname{arc tg}\frac{2}{3},\ y=(2n+1-k)\pi+\operatorname{arc tg}\frac{2}{3}$, где k и n — любые целые числа. 30. $x=2k\pi+2\operatorname{arctg}(1\pm\sqrt{6}),\ y=2s\pi+2\operatorname{arc tg}(1\mp\sqrt{6})$, где k и s — любые целые числа. 31. $x=\frac{a}{2}+2k\pi\pm\arccos\frac{b}{2a},\ y=\frac{a}{2}-2k\pi\mp$ $\mp\arccos\frac{b}{2a}$; решения существуют при условии $|b|\leqslant|2a|$. 32. $x=\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}+$ $+k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{b}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)},\ y=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}-k\pi-(-1)^k\arcsin\frac{b}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}$, k — любое целое число. Решения существуют лишь при $\left|\frac{b}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}\right|\leqslant 1$.

33.
$$x=\frac{a}{2}+\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin(2b-\sin a),$$
$$y=\frac{a}{2}-\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin(2b-\sin a),$$

решения существуют лишь при $|2b-\sin a|\leqslant 1$. 34. $x=\frac{a}{2}+k\pi\pm\arccos(2b-\cos a)$, $y=\frac{a}{2}-k\pi\mp\arccos(2b-\cos a)$. 35. $x=\frac{a}{2}+k\pi\pm\arccos\frac{(1+b)\cos a}{1-b}$, $y=\frac{a}{2}-k\pi\mp\arccos\frac{(1+b)\cos a}{1-b}$. $\left|\frac{(1+b)\cos a}{1-b}\right|\leqslant 1$. 36. $x=\frac{a}{2}+k\pi\pm$ $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin a}{b}-\cos a\right),\ y=\frac{a}{2}-k\pi\mp\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin a}{b}-\cos a\right)$, $\left|\frac{2\sin a}{b}-\cos a\right|\leqslant 1$. 37. $x=k\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{2}-\operatorname{ctg} a\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{1}{\sin^2 a}}\right)$,

$y=a-x$. **38.** $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{20}$, $y=\frac{3\pi}{20}-\frac{k\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{20}$. Указание. $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$. **39.** Или $\sin 2x=\cos y=1$, или $\sin 2x=\cos y=-\frac{1}{2}$; отсюда x и y. **40.** Угол x определяется условиями

$$\sin x=\frac{d(b-c\cos a)\pm c\sin a\sqrt{b^2+c^2-d^2-2bc\cos a}}{b^2+c^2-2bc\cos a},$$

$$\cos x=\frac{dc\sin a\mp(b-c\cos a)\sqrt{b^2+c^2-d^2-2bc\cos a}}{b^2+c^2-2bc\cos a},$$

$$b^2+c^2-d^2-2bc\cos a\geqslant 0$$

(каждый раз с точностью до $2k\pi$); $y=a-x$. **41.** Угол x определяется условиями

$$\sin x=\frac{-cd\sin a\pm(b-c\cos a)\sqrt{b^2+c^2-d^2-2bc\cos a}}{b^2+c^2-2bc\cos a},$$

$$\cos x=\frac{(b-c\cos a)d\mp(-c\sin a)\sqrt{b^2+c^2-d^2-2bc\cos a}}{b^2+c^2-2bc\cos a},$$

$$b^2+c^2-d^2-2bc\cos a\geqslant 0$$

(угол x определяется с точностью до $2k\pi$); $y=a-x$. **42.** $x=-2k\pi+\frac{\pi}{2}\mp$ $\mp\arccos\frac{k-m}{m+2\sin a}$, $y=2k\pi\pm\arccos\frac{k-m}{m+2\sin a}$, $\left|\frac{k-m}{m+2\sin a}\right|\leqslant 1$. **43.** x — любое число, $y=2k\pi\pm x$. **44.** $x=n\pi\pm\arccos\frac{\varepsilon(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{4}\pm\frac{\pi}{6}$, $y=-n\pi\mp$ $\mp\arccos\frac{\varepsilon(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{4}\mp\frac{\pi}{6}$, где n — любое целое число. **45.** $x=k\pi\pm\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y=s\pi+\frac{\pi}{2}\mp\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где k и s — любые целые числа. **46.** $x=k\pi+$ $+(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$, $y=s\pi+(-1)^s\arcsin\frac{3\sqrt{15}}{16}$, $z=-k\pi-s\pi-(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}-$ $-(-1)^s\arcsin\frac{3\sqrt{15}}{16}+\pi$. **51.** Условие равенства тангенсов: $x=y-z+k\pi$, $y=z-x+s\pi$, где k и s — любые целые числа. Из написанных уравнений находим $x=\frac{k+s}{2}\pi$, а тогда $z=y+\frac{k-s}{2}\pi$. При любом y указанные значения x и z удовлетворяют системе; однако если $k+s$ число нечетное, то $x=\frac{k+s}{2}\pi$ не входит в область определения $\operatorname{tg}x$ и потому следует взять только $k+s=2n$, где n — любое целое число; тогда $x=n\pi$. Точно так же, если $k-s$ нечетное, то в этом случае $z-y=\frac{k-s}{2}\pi$ не входит в область определения $\operatorname{tg}(z-y)$, а потому следует взять только $k-s=2m$, где m — любое целое число. Итак, $x=n\pi$, y — произвольное число, входящее в область определения $\operatorname{tg}y$, $z=y+m\pi$, где m — любое целое число. Таково общее решение данной неопределенной системы. Подставляя это в третье уравнение $\operatorname{tg}z=a\operatorname{tg}(x-y)$, получим $\operatorname{tg}y=-a\operatorname{tg}y$. Если $a=-1$, то это тождество и, следовательно, уравнение $\operatorname{tg}z=a\operatorname{tg}(x-y)$ нового ограничения не дает. Если же $a\neq -1$, то из уравнения $\operatorname{tg}y=-a\operatorname{tg}y$ находим $\operatorname{tg}y=0$; значит, $y=k_2\pi$, где k_2 — любое целое число. Тогда $z=k_2\pi+m\pi=k_3\pi$, где k_3 — любое целое число; обозначая еще (для симметрии) $n=k_1$, получим $x=k_1\pi$, где k_1 — любое целое число. Итак, если $a\neq -1$, то $x=k_1\pi$, $y=k_2\pi$, $z=k_3\pi$, где k_1, k_2, k_3 — любые целые числа.

§ 3. Решение тригонометрических неравенств

1. $\left[2k\pi,\ 2k\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(2k\pi+\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 2k\pi+\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(2k\pi+2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 2k\pi+2\pi\right)$. **2.** $(k\pi+\pi-\operatorname{arctg}2,\ k\pi+\pi]$. **3.** $\left(2k\pi+\frac{\pi}{10},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{10}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{7\pi}{10},\ 2k\pi+\frac{9\pi}{10}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{11\pi}{10},\ 2k\pi+\frac{13\pi}{10}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{17\pi}{10},\ 2k\pi+\frac{19\pi}{10}\right)$. **4.** $\left[2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{5\pi}{6},\right.$

$2k\pi+\frac{7\pi}{6}\Big), \Big(2k\pi+\frac{5\pi}{4}, 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\Big), \Big(2k\pi+\frac{11\pi}{6}, 2k\pi+2\pi\Big]$. **5.** $\Big(k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{\pi}{4}\Big), \Big(k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\pi+\frac{5\pi}{6}\Big)$. **6.** $\Big(2k\pi+\frac{\pi}{10}, 2k\pi+\frac{3\pi}{10}\Big), \Big(2k\pi+\frac{7\pi}{10}, 2k\pi+\frac{9\pi}{10}\Big), \Big(2k\pi+\frac{11\pi}{10}, 2k\pi+\frac{13\pi}{10}\Big), \Big(2k\pi+\frac{17\pi}{10}, 2k\pi+\frac{19\pi}{10}\Big)$. **7.** $\Big(k\pi+\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{\pi}{4}\Big), \Big(k\pi+\frac{\pi}{2}-$ $-\arccos\frac{4\sqrt{3}-5}{23}, k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(k\pi+\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{4\sqrt{3}-5}{23}\Big), \Big(k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\pi+\frac{11\pi}{12}\Big)$. **8.** Неравенство выполняется при всех x, кроме $x=\frac{8k+1}{4}\pi$ (k — любое целое число); при $x=\frac{8k+1}{4}\pi$ имеем $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. **9.** Если $a>0$, то $\Big(2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\Big)$. Если $a<0$, то $\Big(2k\pi, 2k\pi+2\pi+$ $+2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}\Big)$. **10.** $\Big[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{8}\Big), \Big(2k\pi+\frac{\pi}{8}, 2k\pi+\frac{5\pi}{8}\Big), \Big(2k\pi+\frac{9\pi}{8}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{13\pi}{8}, 2k\pi+2\pi\Big]$. **11.** $\Big(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{3}\Big), (2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi), \Big(2k\pi+3\pi, 2k\pi+\frac{11\pi}{3}\Big)$. **12.** $\Big(k\pi+\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}, k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(k\pi+\pi-\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}, k\pi+\pi\Big)$. **13.** $\Big(2k\pi-2\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{3}\Big), \Big(2k\pi+\pi, 2k\pi+\frac{5\pi}{3}\Big), \Big(2k\pi+2\pi-$ $-2\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}, 2k\pi+2\pi\Big)$. **14.** $\Big(2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{5\pi}{4}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Big)$. **15.** Решений нет. **16.** $\Big(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{2\pi}{3}\Big), \Big(2k\pi+\pi, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{4\pi}{3}, 2k\pi+2\pi\Big)$. **17.** $\Big(k\pi+\frac{\pi}{4}, k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(k\pi+\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{3\pi}{4}\Big)$. **18.** $\Big(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{6}\Big), \Big(k\pi+\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}, k\pi+\frac{\pi}{4}\Big), \Big(k\pi+\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\pi+\frac{3\pi}{4}\Big), \Big(k\pi+2\pi-$ $-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}, k\pi+\frac{5\pi}{6}\Big)$. **19.** $\Big(2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{3\pi}{4}, 2k\pi+\pi\Big), \Big(2k\pi+\frac{5\pi}{4}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{7\pi}{4}, 2k\pi+2\pi\Big)$. **20.** $\Big(\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\Big), \Big(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}, \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Big), \Big(\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}, \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(\frac{2k\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}, \frac{2k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\Big)$. **21.** Неравенство выполнено при всех $x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{4}$. **22.** $\Big[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{3}\Big), \Big[2k\pi+\pi, 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\Big)$. **23.** $\Big(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{10}\Big), \Big(2k\pi+\frac{3\pi}{10}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{7\pi}{10}, 2k\pi+\frac{9\pi}{10}\Big)$. **24.** $\Big(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{3\pi}{29}, 2k\pi+\frac{5\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{7\pi}{29}, 2k\pi+\frac{9\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{11\pi}{29}, 2k\pi+\frac{13\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{15\pi}{29}, 2k\pi+\frac{17\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{19\pi}{29}, 2k\pi+\frac{21\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{23\pi}{29}, 2k\pi+\frac{25\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{27\pi}{29}, 2k\pi\Big), \Big(2k\pi+\frac{31\pi}{29}, 2k\pi+\frac{33\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{35\pi}{29}, 2k\pi+\frac{37\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{39\pi}{29}, 2k\pi+\frac{41\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{43\pi}{29}, 2k\pi+\frac{45\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{47\pi}{29}, 2k\pi+\frac{49\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{51\pi}{29}, 2k\pi+\frac{53\pi}{29}\Big), \Big(2k\pi+\frac{55\pi}{29}, 2k\pi+\frac{57\pi}{29}\Big)$. **25.** $\Big(2k\pi+\frac{\pi}{8}, 2k\pi+\frac{7\pi}{24}\Big), \Big(2k\pi+\frac{11\pi}{24}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Big), \Big(2k\pi+\frac{5\pi}{8}, 2k\pi+\frac{19\pi}{24}\Big), \Big(2k\pi+\frac{23\pi}{24}, 2k\pi+\frac{9\pi}{8}\Big), \Big(2k\pi+\frac{31\pi}{24}, 2k\pi+\frac{35\pi}{24}\Big), \Big(2k\pi+\frac{3\pi}{2}, 2k\pi+\frac{13\pi}{8}\Big), \Big(2k\pi+\frac{43\pi}{24}, 2k\pi+\frac{47\pi}{24}\Big)$. **26.** $\Big(2k\pi, 2k\pi+\frac{5\pi}{36}\Big),$

$\left(2k\pi+\frac{11\pi}{36},\ 2k\pi+\frac{17\pi}{36}\right)$, $\left(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{23\pi}{36}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{29\pi}{36},\ 2k\pi+\frac{35\pi}{36}\right)$.

27. $\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{5}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{5}\right)$, $\left(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{7\pi}{5},\ 2k\pi+\frac{9\pi}{5}\right)$. **28.** $\left(2k\pi+\frac{\pi}{8},\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{3\pi}{8},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{5\pi}{8},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{7\pi}{8},\ 2k\pi+\pi\right)$, $\left(2k\pi+\frac{9\pi}{8},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{11\pi}{8},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{13\pi}{8},\ 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{15\pi}{8},\ 2k\pi+2\pi\right)$. **29.** $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi\right)$, $\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2k\pi+2\pi\right)$. **30.** $\left(\frac{\sqrt{8k+3}-1}{2},\ \frac{\sqrt{8k+3}+1}{2}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

31. $\left(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{16}\right)$, $\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(k\pi+\frac{15\pi}{16},\ k\pi+\pi\right)$. **32.** $\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{10}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{9\pi}{10},\ 2k\pi+\frac{13\pi}{10}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{17\pi}{10},\ 2k\pi+\pi\right)$. **40.** Если $a<\frac{1}{2}$, неравенство выполняется при всех x. Если $\frac{1}{2}<a<1$, то x заключен в одном из следующих интервалов: $k\pi<x<k\pi+\frac{\alpha_0}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_0}{2}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha_0}{2}$, $(k+1)\pi-\frac{\alpha_0}{2}<x<(k+1)\pi$, где $\alpha_0=\arcsin\sqrt{2(1-a)}$, k — произвольное целое число; если $a>1$, неравенство не имеет решений. **41.** Если $|a|<1$, тогда $k-1+\frac{\alpha_0}{\pi}<x<k+\frac{\alpha_0}{\pi}$; если $\frac{1}{2}<|a|<1$, то $k+\frac{\alpha_0}{\pi}<x<k+1+\frac{\alpha_0}{\pi}$, где $\alpha_0=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^3\pi a)$, k — произвольное целое число. **42.** $\frac{11}{10}<x<\frac{21}{10}$. **43.** Либо $k+\frac{1}{4}<x<k+\frac{1}{3}$, либо $k+\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}+k$. **44.** $x>1$ и $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$, где k — произвольное целое число, не равное нулю. **45.** $-\frac{4k+1}{4k}<x<-\frac{4k+2}{4k+1}$. **46.** $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\pi\right)$, $\left(2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$.

§ 4. Доказательство тригонометрических неравенств

17. $\sin x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$; если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{x}{2}<\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}$, поэтому $\sin x>2\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=x-\frac{x^3}{4}$. **18.** Имеем: $\sin x=3\sin\frac{x}{3}-4\sin^3\frac{x}{3}$, $\sin\frac{x}{3}=3\sin\frac{x}{3^2}-4\sin^3\frac{x}{3^2}$, $\sin\frac{x}{3^2}=3\sin\frac{x}{3^3}-4\sin^3\frac{x}{3^3}$, ..., $\sin\frac{x}{3^{n-1}}=3\sin\frac{x}{3^n}-4\sin^3\frac{x}{3^n}$. Умножая второе из этих равенств на 3, третье — на 3^2 и т. д., последнее — на 3^{n-1} и складывая, будем иметь

$$\sin x=3^n\sin\frac{x}{3^n}-4\left(\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right).$$

На основании предыдущего (задача 17) $\sin\frac{x}{3^n}>\frac{x}{3^n}-\frac{x^3}{4\cdot 3^{3n}}$; кроме того, $\sin\frac{x}{3}<\frac{x}{3}$, $\sin\frac{x}{3^2}<\frac{x}{3^2}$, ..., $\sin\frac{x}{3^n}<\frac{x}{3^n}$, поэтому $\sin x>3^n\left(\frac{x}{3^n}-\frac{x^3}{4\cdot 3^{3n}}\right)-4\left(\frac{x^3}{3^3}+3\frac{x^3}{3^6}+3^2\frac{x^3}{3^9}+\ldots+3^{n-1}\frac{x^3}{3^{3n}}\right)=x-\frac{x^3}{4\cdot 3^{2n}}-\frac{4x^3}{27}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right.$

$\ldots + \frac{1}{3^{3n-2}}\Big) = x - \frac{x^3}{4\cdot 3^{2n}} - \frac{4x^3}{27}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{2n}}}{1-\frac{1}{3^2}} = x - \frac{x^3}{4\cdot 3^{2n}} - \frac{x^3}{6}\Big(1-\frac{1}{3^{2n}}\Big) = x - \frac{x^3}{6} +$

$+ \frac{x^3}{6\cdot 3^{2n}} - \frac{x^3}{4\cdot 3^{2n}} = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{12\cdot 3^{2n}}$. Итак, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > x - \frac{x^3}{6} -$

$- \frac{x^3}{12\cdot 3^{2n}}$, или $\sin x - x + \frac{x^3}{6} > -\frac{x^3}{12\cdot 3^{2n}}$; отсюда следует, что число, стоящее слева, не может быть отрицательным, так как справа стоит число $-\frac{x^3}{12\cdot 3^{2n}}$, которое при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ отрицательно и при достаточно большом n может быть сколь угодно малым по абсолютной величине; значит, $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geqslant 0$, откуда $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$. **19.** Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то по доказанному в задаче 18 имеем: $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6} > 0$, $\sin\frac{x}{2} \geqslant \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6\cdot 8} > 0$, $\sin\frac{x}{4} \geqslant \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6\cdot 64} > 0$, отсюда $\sin^2\frac{x}{4} \geqslant \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{2\cdot 6\cdot 64} + \frac{x^6}{6^2\cdot 64^2}$; значит, $\sin^2\frac{x}{2} > \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{3\cdot 2^8}$; далее, находим: $4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4} > 4\Big(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\Big)\Big(\frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{3\cdot 2^8}\Big)$, $4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4} > \frac{x^3}{8} - \frac{x^5}{2^7}$ или $2\sin\frac{x}{2} -$

$- \sin x > \frac{x^3}{8} - \frac{x^5}{27}$,

$$\sin x < 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{2^7}. \tag{1}$$

Аналогично имеем:

$$\sin\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{4} - \frac{x^3}{2^3\cdot 8} + \frac{x^5}{2^5\cdot 2^7}, \tag{2}$$

$$\sin\frac{x}{4} < 2\sin\frac{x}{8} - \frac{x^3}{4^3\cdot 8} + \frac{x^5}{4^5\cdot 2^7}, \tag{3}$$

. . . . . .

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} < 2\sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3(n-1)}\cdot 8} + \frac{x^5}{2^{5(n-1)}\cdot 2^7}. \tag{n}$$

Умножая обе части неравенства (2) на 2, обе части неравенства (3) на 2^2 и так далее, наконец, обе части последнего неравенства на 2^{n-1} и складывая, получим $\sin x < 2^n\sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{8}\Big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{2}{2^{2n-2}}\Big) + \frac{x^5}{2^7}\Big(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \ldots + \frac{1}{2^{4n-4}}\Big)$.

Так как при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $2^n\sin\frac{x}{2^n} < x$, то $\sin x < x - \frac{x^3}{8}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{x^5}{2^7}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{4n}}}{1-\frac{1}{16}} =$

$= x - \frac{x^3}{6}\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) + \frac{x^5}{120}\Big(1-\frac{1}{2^{4n}}\Big) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{6\cdot 2^n} - \frac{x^5}{120\cdot 2^{4n}}$, или

$\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < \frac{x^3}{6\cdot 2^n} - \frac{x^5}{120\cdot 2^{4n}}$, или $\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < \frac{x^3}{6\cdot 2^n}$.

Число $\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ не может быть положительным, так как оно меньше числа $\frac{x^3}{6\cdot 2^n}$, которое при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ положительно и при достаточно большом n может быть сколь угодно малым положительным числом; значит, $\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \leqslant 0$, откуда $\sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. **20.** Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{x}{6} < \frac{\pi}{12}$, но $\pi^2 < 24$; следовательно, $\frac{\pi}{12} < \frac{2}{\pi}$, поэтому $\frac{x}{6} < \frac{2}{\pi}$ и т. д.

21. $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}$. **23.** $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 4}$ (см. задачу 17), поэтому $\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 4}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{16 \cdot 32} < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$. **24.** Воспользоваться неравенством $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$ (см. задачу 18). **25.** $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} > \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$; так как $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{8} < x - \frac{x^3}{6}$, то $\frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} > x + \frac{x^3}{3}$. **27.** а) Приближение $\sin x \approx x$ с недостатком; ошибка не превосходит $\frac{x^3}{6}$; б) приближение $\cos x \approx 1$ с избытком; ошибка не превосходит $\frac{x^2}{2}$; в) приближение $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ с избытком; ошибка не превосходит $\frac{x^5}{120}$; г) приближение $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ с недостатком; ошибка не превосходит $\frac{x^4}{24}$. **32.** С точностью до 0,000001.

§ 5. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком аркфункций

1. 0. **2.** 0. **3.** 1. **4.** Нет корней. **5.** Нет корней. **6.** Нет корней. **7.** 0. **8.** Нет корней. **9.** $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **10.** 0. **11.** ± 1, 0. **12.** 0, ± 1. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** 0, $\pm\frac{1}{2}$. **15.** 1. **16.** $-1 \pm \sqrt{2}$. **17.** $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **20.** 0. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** 1. **23.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **24.** Если $0 < a < 2$, то $x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. **25.** 2. **26.** $x_1 = \sin\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4}$, $x_2 = \cos\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4}$, если $|a| \leqslant \frac{\pi}{4}$. **27.** 0, $\pm\frac{1}{2}$. **28.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **29.** $\sqrt{\frac{2}{17}(5 - 2\sqrt{2})}$. **30.** $\frac{75}{11}$. **31.** $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$, где k — принимает все целые значения, по абсолютной величине меньшие, чем $\frac{n}{2}$. **32.** а) Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, но, по крайней мере, одно из чисел a или b не равно нулю, то данное уравнение имеет только один корень $x = +\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; б) если $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$ но, по крайней мере, одно из чисел a или b не равно нулю, то данное уравнение имеет только один корень $x = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; в) если $a > 0$, $b < 0$ или $a < 0$, $b > 0$, то данное уравнение не имеет корней; г) если $a = b = 0$, то данное уравнение не имеет корней. **33.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$. **34.** 0. **35.** 3; 0. **36.** $\frac{2}{5}$. **37.** Нет корней. **38.** Нет корней. **39.** -1, 0, 1. **40.** $\sqrt{2}$. **41.** 1 и $-\frac{1}{6}$. **42.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **43.** ± 1. **44.** Решение. Строим последовательность уравнений, каждое из которых есть следствие предыдущего:

$$\arccos|x| = \arcsin 2x, \tag{1}$$

$$\cos(\arccos|x|) = \cos(\arcsin 2x), \tag{2}$$

$$|x| = \sqrt{1 - 4x^2}, \tag{3}$$

$$x^2 = 1 - 4x^2, \tag{4}$$

$$5x^2 = 1, \tag{5}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Так как в последовательности уравнений (1)—(6) каждое уравнение есть следствие предыдущего, то среди найденных значений одно значение x, а может быть и два могут и не быть корнями другого уравнения; поэтому нужна «проверка». Так как $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, но $\arccos\left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\right|=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\neq\arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, то $x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ — не корень; данное уравнение имеет только один корень $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$; отметим, что посторонний корень появился в результате перехода от уравнения (1) к уравнению (2), но при возведении в квадрат обеих частей уравнения (3) посторонних корней не появилось. **45.** $\sqrt{3}+1$. **46.** 1. **47.** $k\pi+\frac{\pi}{4}$. **48.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **49.** y — любое число из сегмента $[0, 1]$, т. е. $0\leqslant y\leqslant 1$, а $x=-\sqrt{1-y^2}$. **50.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}), \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}), \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})\right]$. **51.** $(1, 1)$. **52.** $\left(\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}, \frac{3\mp\sqrt{17}}{2}\right)$. **53.** $\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1$. **54.** $x>1$. **55.** $0<x\leqslant 1$. **56.** $0\leqslant x<\frac{1}{2}$. **57.** $\sin 80^\circ<x\leqslant 1$.

§ 6. Трансцендентные уравнения

1. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. **2.** $x=1$. **3.** $x=\sin 1$. **4.** $x=k\pi+\operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}}$. **5.** Если считать основание логарифма всегда положительным, то $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$. **6.** $x=k\pi\pm\arcsin\frac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$. **7.** $\sin x=2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_3 3}}$. **8.** $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$, $x_3=0$. **9.** $x=10^{2k+\frac{1}{4}}$, где k — любое целое число. **10.** Корнем является любое число, кроме $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$. **12.** $x=2^{\sqrt[2]{3+2\lg_3 2}}$. **13.** $x_1=0$, $x_2=-1$. **14.** $x_{1,2}=\operatorname{tg}\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^2-16\cdot 10^a}}{4}$ в случае, если $10^a\leqslant\frac{\pi^2}{16}$; если $10^a>\frac{\pi^2}{16}$, уравнение не имеет корней. **15.** 1. **16.** $x_1=1$, $x_2=2$. **17.** $x=10^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}}$. **18.** $x=(2k+1)\pi$, где k — любое целое число. **19.** $x=2k\pi$, $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$, где k — любое целое число. **20.** $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. **21.** $x=\frac{1}{2}$. **22.** $x=\frac{1}{2}\lg_5 3$. **23.** Решение. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{arctg} x)=1$, $\pi\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\operatorname{arctg} x=\frac{1}{4}+k$, k — целое число. Так как $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$, то k может принимать лишь следующие значения: $k=-1$, $k=0$, $k=1$; отсюда $x_1=-\operatorname{tg}\frac{3}{4}$, $x_2=\operatorname{tg}\frac{1}{4}$, $x_3=\operatorname{tg}\frac{5}{4}$. **24.** Данное уравнение имеет 10 корней: $x_1=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{1}{6}}$, $x_2=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{13}{6}}$, $x_3=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{25}{6}}$, $x_4=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{37}{6}}$, $x_5=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{49}{6}}$, $x_6=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{5}{6}}$, $x_7=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{17}{6}}$, $x_8=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{29}{6}}$, $x_9=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{41}{6}}$, $x_{10}=\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{53}{6}}$.

§ 7. Исследование элементарных функций

1. $(-\infty,-3]$, $[3,+\infty)$. 2. $(-\infty,+\infty)$. 3. $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$. 4. $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$. 5. $\left[-\frac{2+\sqrt{7}}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right]$. 6. $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$. 7. $\left[\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$, $\left[\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right]$. 8. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$. 9. $\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}, \frac{4}{(4k+1)\pi}\right)$. 10. $\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$. 11. $\left(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. 12. $x=k$, где k — любое целое число. 14. Функция, возрастающая в интервале $(-\infty, +\infty)$. 15. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ — возрастает, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ — убывает, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ — возрастает, $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$ — убывает. 16. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ — возрастает, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ — убывает, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ — возрастает, $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ — убывает, $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ — возрастает, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ — убывает. 17. $(-\infty, -1]$ — убывает, $[-1, 1]$ — возрастает, $[1, +\infty)$ — убывает. 18. $(-\infty, 0]$ — убывает, $[0, +\infty)$ — возрастает. 19 и 20. Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ и дело сведется к исследованию рациональной функции.

§ 8. Разные задачи

1. 3. 2. $-\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. 4. 5. 5. 6. $-\frac{1}{8}$. 7. $\frac{1}{8}$. 8. $\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$. 9. $\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. 15. $\frac{1}{2}$. 16. $-\frac{1}{2}$. 17. $\frac{1}{2}$. 24. $\sin x=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. При $\sin a=0$ предложенное соотношение есть тождество. 25. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\pm\frac{\pi}{4}\right)$. 26. $\pm\sqrt{3}$. 27. $\frac{8\cos 4x\sin^2(45°-4x)}{\sin^2 4x}$. 28. $x+y+z=k\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$, $z=\pi$. 29. 2 корня. 33. 11. 37. $n=\pm 1$; $n=\pm 2$. 41. а) $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$; е) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; ж) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; з) $2-\sqrt{3}$; и) $\frac{\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$; к) $\frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$; л) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$; м) $\sqrt{2}-1$; н) $\sqrt{2}+1$; о) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$; п) $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$. 42. 4. 46. 1°. $y=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. 2°. $y=\frac{1+t}{1+t^2}$,

$$yt^2-t+y-1=0. \qquad (1)$$

Уравнение имеет действительные корни, если $\frac{1-\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **Знак x.** Угол x имеет тот же знак, что и $t=\operatorname{tg} x$ $\left(\text{ибо } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$. Произведение корней уравнения (1) равно $\frac{y-1}{y}$, и их сумма $\frac{1}{y}$; значит, если $\frac{1-\sqrt{2}}{2}<y<0$, оба корня отрицательны и оба соответствующих значения x отрицательны; если $0<y<1$, знаки корней и, значит, знаки x противоположны; если $1<y<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, оба корня, а, значит, и оба значения x противоположны. 3°. **Соотношение между t' и t''.** $t't''+t'+t''=1$. 4°. **Выбор y при условии $\operatorname{tg} 2x'=\operatorname{tg} 2x'$.** Имеем

$\frac{2t'}{1-t'^2}=\frac{2t''}{1-t''^2}$, отсюда или $t'=t''$, или $1+t't''=0$. В первом случае мы имеем двойной корень: или $y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, что дает $\operatorname{tg}x'=\operatorname{tg}x''=-(1+\sqrt{2})$, или $y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, что дает $\operatorname{tg}x'=\operatorname{tg}x''=\sqrt{2}-1$; во втором случае $y=\frac{1}{2}$ и соответствующие значения $\operatorname{tg}x'$ и $\operatorname{tg}x''$ таковы: $\operatorname{tg}x'=1+\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}x''=1-\sqrt{2}$ или наоборот.

Глава XXX. Геометрические задачи с применением тригонометрии

§ 2. Решение треугольников

$\sin B=m$, $a=2R\sqrt{1-m^2}$. 2. $\cos\frac{B-A}{2}=\frac{1+m}{1-m}\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\cos\frac{B-A}{2}=m\sqrt{2}$. 4. $\sin A=\sqrt{2}-1$. 5. $\sin(B-A)=\frac{5}{3}\frac{1-m^2}{1+m^2}$. 6. $\sin 2B=\frac{2h_c}{c}$. 7. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\frac{2p-c}{c\sqrt{2}}$. 8. $c\cos\frac{B-A}{2}=\frac{2r+c}{\sqrt{2}}$. 9. $\sin 2B=\sin 2A=\frac{4s}{c^2}$. 10. $b^2+a^2=c^2$; b определяется из уравнения $2cb^2-l_a^2b-cl_a^2=0$. 11. $b^2=\frac{4}{3}(c^2-m_b^2)$. 12. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{k}{c\sqrt{2}}$. 13. Катеты—корни квадратного уравнения $l_cx^2-2sx\sqrt{2}+sl_c=0$. 14. $c=\frac{2s}{h_c}$; $ab=2s$; $a+b=\sqrt{\frac{4s^2}{h_c^2}+4s}$ и т. д. 15. $\sin 2B=m^2-2m$. 16. $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=m-1$. 17. $\sin 2B=4m$. 18. $\cos\frac{B-A}{2}=\frac{(1+m)\sqrt{2}}{2(1-m)}$. 19. $\sin 2A=4m(m+1)$. 20. $\sin 2B=\frac{2}{m}$. 21. $\sin 2B=\frac{1+2m}{m^2}$. 22. $\sin 2B=m^2-2m$. 23. $\sin 2B=\frac{4m}{(1-m)^2}$. 24. $a=2R\sin A$. 25. $b=\frac{h_a}{\sin C}$. 26. $a=\sqrt{\frac{2s\sin A}{\sin B\sin C}}$.

27. $c=\dfrac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$. 28. $c=\dfrac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$. 29. $a=\dfrac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$.

30. $a=\dfrac{(p-a)\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$. 31. $b=\dfrac{l_a\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}{\sin C}$. 32. $b=l_a^*\dfrac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin C}$.

33. $a=k\dfrac{\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A}{\sin B\sin C}$. 34. $a=\dfrac{2m_a\sin A}{\sqrt{2\sin^2B+2\sin^2C-\sin^2A}}$.

35. $c=\dfrac{h_a+h_b}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$. 36. $a=\dfrac{(h_a+h_b+h_c)\sin A}{\sin B\sin C+\sin C\sin A+\sin A\sin B}$.

37. $a=\dfrac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$. 38. $a=\dfrac{r_a\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$. 39. $a=\dfrac{(r_a+r_b+r_c)\sin A}{2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)}$.

40. $a=\dfrac{k\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$. 42. $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\dfrac{\frac{b}{c}-1}{\frac{b}{c}+1}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. 43. $\sin C=\frac{c}{a}\sin A$.

44. $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\dfrac{1+\frac{b-a}{c}}{1-\frac{b-a}{c}}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. 45. $\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}=\dfrac{\frac{h_b}{h_c}-1}{\frac{h_b}{h_c}+1}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. 46. $\sin\frac{B-C}{2}$

есть корень уравнения $mx^2+2x\sin\frac{A}{2}=m\cos^2\frac{A}{2}$. 47. $\sin B=2m$.

48. $\cos\frac{B-C}{2}=m\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. 49. $\cos\frac{B-C}{2}$ — корень уравнения

$$m\cos^2\frac{B-C}{2}-2\cos\frac{B-C}{2}\sin A\cos\frac{A}{2}=m\sin^2\frac{A}{2}.$$

50. $\operatorname{tg}B$ — корень уравнения $(2m-1)\operatorname{tg}^2B-\sin 2A\operatorname{tg}B=2\sin^2A$. 51. $2m\cos\frac{B-C}{2}=$ $=2m\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$. 52. $\cos A=\frac{m^2n^2+n^2-m^2}{2mn^2}$. 53. $\cos A=\frac{n^2q^2+m^2q^2-m^2n^2}{2mnq^2}$.

54. $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}k$. 55. $c=ak$. 56. $c^2=\frac{(b^2-a^2)(bm+a)}{bm-a}$. 57. $\sin C=\frac{h_a}{b}$.

58. $\sin B=\frac{h_c}{a}$. 59. $\sin C=\frac{2s}{ab}$. 60. $\sin A=\frac{a}{2R}$. 61. $\cos\frac{C}{2}=\frac{l_c(a+b)}{2ab}$.

62. $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(2m_c+a-b)(2m_c+b-a)}{4ab}}$. 63. $c=2a-b$. 64. $\sin C=\frac{2k^2}{ab}$.

65. $h_c=\frac{2}{m}$. 66. $c=\frac{h_a}{\sin B}$. 67. $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{k+a}{k-a}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. 68. $c^2-ac\cos B+\frac{a^2}{4}=m_a^2$.

69. $4m_b^2=a^2+c^2+2ac\cos B$. 70. $m_c^2=a^2+\frac{c^2}{4}-ac\cos B$. 71. $b=2R\sin B$.

72. $r_b\operatorname{tg}\frac{C}{2}=r_b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-a$. 73. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{k}{a}$. 74. $l_c\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)=a\sin B$.

75. $l_b\operatorname{ctg}C=a\cdot\operatorname{cosec}\frac{B}{2}-l_b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$. 76. $\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\left(45^\circ+\operatorname{arc\,tg}\frac{4k^2}{3a^2}\right)$.

77. $a\cos(B-C)=2h_a\sin A-a\cos A$. 78. $a\cos\frac{B-C}{2}=(2p-a)\sin\frac{A}{2}$.

79. $a^2\sin(B-C)=k^2\sin A$. 80. $a^2\cos A\cos(B-C)=k^2\sin^2A-a^2$. 81. $\frac{c}{b}=x$ определяется из уравнения $(1-x)a^2=k^2(1+x^2-2x\cos A)$. 82. $2a\cos\frac{B-C}{2}=$ $=\frac{k}{\cos\frac{A}{2}}$. 83. $\sin\frac{B-C}{2}=x$ — корень уравнения $2x\sin\frac{A}{2}=ak\left(\cos^2\frac{A}{2}-x^2\right)$.

84. $\cos(B-C)=\frac{2k^2\sin^2A-a^2\cos A}{a^2}$, где $k^2=\frac{4m_a-a^2}{4\cos A}$. 85. $\frac{c}{b}=x$, $\frac{a^2}{4m_b^2-2a^2}=$ $=\frac{1+x^2-2x\cos A}{2x^2-1}$. 86. $\cos\frac{B-C}{2}=x$, $xl_a\sin A=a\left(x^2-\sin^2\frac{A}{2}\right)$.

87. $a\cos\frac{B-C}{2}=a\sin\frac{A}{2}+2r\cos\frac{A}{2}$. 88. $a\cos\frac{B-C}{2}=2r_a\cos\frac{A}{2}-a\sin\frac{A}{2}$.

89. $a\sin\frac{B-C}{2}=2r_b\sin\frac{A}{2}-a\cos\frac{A}{2}$. 90. $2a\cos^2\frac{C}{2}=k\sin A$. 91. $a\sin^2\frac{B}{2}=$ $=\sin\frac{A}{2}\left(a\sin\frac{A}{2}-k\cos\frac{A}{2}\right)$. 92. $c=h_b\operatorname{cosec}A$, $\sin B=\frac{h_a\sin A}{h_b}$. 93. $\frac{h_b+h_a}{h_b-h_a}=$ $=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}k$. 94. $\cos A=\frac{h_c}{2h_b}+\frac{h_b}{2h_c}-\frac{h_bh_c}{2h_a^2}$. 95. $\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}$.

96. r_a и r_b определяются из уравнений $r_a-r_b=k$, $\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}=\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_a}$.

97. $\cos A=\frac{h_a^2-h_b^2+m^2h_b^2}{2h_ah_bm}$. 98. $2\sin A=m$. 99. $4m_c^2\cos C=\sqrt{(4m_c^2-h_a^2)(4m_c^2-h_b^2)}-$ $-h_ah_b$. 100. $2m_a^2\cos C=\sqrt{(m_a^2-h_a^2)(4m_a^2-h_b^2)}+h_ah_b$. 101. $9a^2=8m_b^2+$ $+8m_c^2-4m_a^2$. 102. $x=\frac{c}{b}$, $\frac{4x^2+1-4x\cos A}{2x^2+1}=\frac{3m_b^2}{2m_a^2+m_b^2}$. 103. Стороны a и b

определяются из системы $4\left(m_a^2-m_b^2\right)=3\left(b^2-a^2\right)$, $1-\frac{m_b^2}{m_a^2}=\frac{3\left(x^2-1\right)}{4+x^2-4x\cos C}$, где $x=\frac{a}{b}$. **104.** Отношение $x=\frac{a}{b}$ определяется из уравнения $\left(7m_a^2-10m_b^2\right)x^2+16\left(m_b^2-m_a^2\right)x=7m_b^2-10m_a^2$. **105.** $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{k^2-a^2}{2ah_a}$. **106.** $\cos A$ и $\sin A$ определяются из уравнения $a\cos k=2h_a\sin A-a\cos A$. **107.** $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{ak^2h_a-a}{2h_a}$. **108.** $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{a\left(h_a-2r\right)}{2r^2}$. **109.** $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{a\left(h_a+2r_a\right)}{2r_a^2}$. **110.** $(b-c)r_c=a\left(h_a-r_c\right)$. **111.** $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{k}{a}$. **112.** $b-c=x$, $k\left(a^2-x^2\right)=2ah_ax$. **113.** $(b+c)^2=4k^2+a^2$. **114.** $b=\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{4m_a^2+a^2-k^2}\right)$, где $k=b+c$. **115.** $b=p-\frac{a}{2}+\sqrt{m_a^2-p^2+ap}$. **116.** Указание: в треугольнике $AA'B$ (A' — середина BC) известны две стороны: $\frac{a}{2}$, m_a и угол $\widehat{AA'B}$, так как $s=\frac{1}{2}am_a\sin\left(\widehat{AA'B}\right)$ и т. д. **117.** $b=2k\pm\sqrt{4m_b^2+2k^2-2a^2}$. **118.** $s\operatorname{ctg}B=a^2-\sqrt{m_b^2a^2-s^2}$. **119.** b и c — корни уравнения $x^2-kx+\frac{l_a^2k^2}{k^2-a^2}=0$, где $k=b+c$. **120.** Произведение $x=bc$ определяется из уравнения $4x^2+\left(k^2-a^2-4l_a^2\right)x=l_a^2k^2$. **121.** b и c — корни уравнения: $x^2-\frac{ak}{\sqrt{k^2-l_a^2}}x+k^2=0$. **122.** Полагая $b+c=x$, $bc=y$, найдем: $l_a^2=y-\frac{a^2y}{x^2}$, $1=\frac{4s^2}{l_a^2x^2}+\frac{l_a^2x^2}{4y^2}$, отсюда x и y. **123.** Указание: $h_a=l_a\cos k$. **124.** Указание: $\sin A=\frac{a}{2R}$. **125.** $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{k}{a}$ и т. д. **126.** c — корень уравнения $l_b^2(a+c)^2=ac(a-k+2c)(a+k)$. **127.** Сторона c — корень уравнения: $l_b^2(a+c)^2=ac(a+k+2c)(a-k)$. **128.** В решении задачи № 126 заменить k на $2p-a$. **129.** В треугольнике ABD_2 угол $BD_2A=C+\frac{B}{2}$; следовательно, для решения треугольника CBD_2 имеем две стороны: a, l_b и угол BD_2C, противолежащий a (BD_2 — биссектриса внутреннего угла B; точка D_2 лежит на AC, так что $BD_2=l_b$). **130.** $a\left(\cos k-\sin\frac{A}{2}\right)=2r\cos\frac{A}{2}$. **131.** $h_a=\frac{2s}{a}$ и т. д. **132.** $a^2+4ah_a\operatorname{ctg}A-4m_a^2=0$. **133.** $a^2+2ah_a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-k^2=0$. **134.** $a^2-2h_aa\operatorname{tg}\frac{A}{2}-k^2=0$. **135.** $a\left(2p+h_a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)=2p^2$. **136.** Заменяя в уравнении $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ стороны на $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$, найдем $h_bh_c=-2h_a^2\cos^2\frac{A}{2}+h_a\sqrt{4h_a^2\cos^4\frac{A}{2}+k^2}$; зная h_b+h_c и h_bh_c, найдем h_b и h_c. **137.** $k^2\cos(B-C)=2h_a^2\sin^2A-k^2\cos A$. **138.** Указание: $r\cos\frac{B-C}{2}=(h_a-r)\sin\frac{A}{2}$. **139.** $r_a\cos\frac{B-C}{2}=(h_a+r_a)\sin\frac{A}{2}$. **140.** b и c — корни уравнения $x^2-kx+\frac{1}{4}\left(k^2-4m_a^2\right)\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}=0$. **141.** $bc=x$, $4x^2-\left(2x\cos A-4m_a^2\right)^2+k^4=0$. **142.** $(2p-a)^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}+\left(2m_a^2-\frac{a^2}{2}\right)\sec A$. **143.** $b+c=\frac{h_b+h_c}{\sin A}$. **144.** $2\left(a+2r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)^2+a^2-4m_a^2=8r\left(a+r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)\operatorname{cosec}A$. **145.** Указание: $r_b-r_c=(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $4m_b^2=2\left(a^2+c^2\right)-b^2$.

146. b и c — корни уравнения $x^2 - kx + \frac{1}{2} kl_a \sec\frac{A}{2} = 0$. **147.** $bc = x$, $4x^2 \cos^2\frac{A}{2} = l_a^2 (k^2 + 4x)$. **148.** $a = \dfrac{2p^2 - 2pl_a \cos\frac{A}{2}}{2p - l_a \cos\frac{A}{2}}$. **149.** Указание: $\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{r \sin\frac{A}{2}}{l_a \sin\frac{A}{2} - r}$.

150. $R^2 \cos(B-C) \sin A = s - \dfrac{R^2}{2} \sin 2A$. **151.** $a = \dfrac{p^2 - s \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{p}$. **152.** $ak = k^2 + \operatorname{stg}\frac{A}{2}$. **153.** $(1 - mr) \cos\dfrac{B-C}{2} = mr \sin\frac{A}{2}$. **154.** $a = \dfrac{r_a - r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$. **155.** $r \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = r_b \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$.

156. $2 \sin\dfrac{C-B}{2} = mr \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\left(\cos\dfrac{B-C}{2} + \sin\dfrac{A}{2}\right)$. **157.** $2r_a \sin\dfrac{B-C}{2} = k\left(\cos\dfrac{B-C}{2} + \sin\dfrac{A}{2}\right)$. **158.** $2r_a (c-k) \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = (c+k)\left(2r_a \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} - 2c\right)$, отсюда находим c. **159.** $2r_a \sin A \sin\dfrac{B-C}{2} = k\left(\cos\dfrac{B-C}{2} + \sin\dfrac{A}{2}\right)$, отсюда находим $B - C$. **160.** $b - c = mbc \sin A$, $4r_a^2 \operatorname{ctg}^2\dfrac{A}{2} - 4(b+c) r_a \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} + 4bc \cos^2\dfrac{A}{2} = 0$; отсюда найдем b и c. **161.** $2r_b \cos\dfrac{B-C}{2} = k\left(\sin\dfrac{B-C}{2} + \cos\dfrac{A}{2}\right)$. **162.** b — корень уравнения $2r_b (k-b) = (k+b)\left(b - r_b \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$, где $k = a + c$. **163.** $c = k - 2r_b \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$. **164.** c — корень уравнения $r_b (k+c) = (c-k)\left(c + r_b \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$.

165. $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{k \cos\frac{A}{2} - r_b \sin\frac{A}{2}}{k + r_b \operatorname{tg}\frac{A}{2}}$. **166.** a и $b - c$ определяются из системы уравнений $a + (b-c) = 2r_b \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ и $a - (b-c) = \dfrac{k^2 \sin A}{r_b}$. **167.** $x = \cos\dfrac{A}{2}$, $k\left(h_a^2 - l_a^2\right) - 2xh_a^2 l_a + kl_a^2 x^2 = 0$, где $k = b + c$. **168.** $l_a\left(p \sin\dfrac{A}{2} + h_a \cos\dfrac{A}{2}\right) = ph_a$. **169.** $l_a^2 \sqrt{m_a^2 - h_a^2} \sin^2\dfrac{A}{2} = h_a^2 \left(\sqrt{m_a^2 - h_a^2} - \sqrt{l_a^2 - h_a^2}\right)$. **170.** $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{rh_a}{(h_a - r) l_a}$. **171.** $r_a h_a = l_a\left(r_a \cos\dfrac{A}{2} + h_a \sin\dfrac{A}{2}\right)$. **172.** $(2h_a - k) \times l_a^2 \cos A = k\left(2h_a^2 - l_a^2\right) - 2h_a l_a^2$. **173.** $k = 2h_a \sin\dfrac{C-B}{2} \cos\dfrac{A}{2}$. **174.** $m \sin\dfrac{A}{2} \times \left(h_a + l_a \sin\dfrac{A}{2}\right) = 2l_a \cos^2\dfrac{A}{2}$. **175.** $k^2 \sin^2 A = \left(2k^2 - 8m_a^2\right)(1 + \cos A) + q^2$.

176. $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = x$, $q^2 x^4 - k^2 x^2 = k^2 - 4m_a^2$. **177.** $k^2 \cos^2 A + \left(8m_a^2 - 2k^2\right)\cos A = 8m_a^2 - k^2 - q^2$. **178.** $4m_a^2 = k^2 \operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2} + 2q^2 (1 + \cos A)$. **179.** $a^2 = \dfrac{4(m+1)^2\left(m_a^2 - k^2\right)}{(3m+1)(m-1)}$. **180.** $\dfrac{4m_a^2}{q^2 \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \dfrac{m^2 + 1 + 2m \cos A}{m^2 + 1 - 2m \cos A}$. **181.** $\dfrac{2(k^2 + a^2)}{4m_a^2 - a^2} = \dfrac{(1+m)^2}{1 + m^2}$. **182.** $r = 2R(m-1) \sin^2\dfrac{A}{2}$.

183. $16mR^2 \sin^4\dfrac{A}{2} + 4R\left[r(1+m)^2 - 4Rm\right] \sin^2\dfrac{A}{2} + r^2 (1+m)^2 = 0$. **184.** $16R^2 \sin^4\dfrac{C}{2} - 16R(R-r) \sin^2\dfrac{C}{2} + k^2 = 0$. **185.** $16R^2 \sin^4\dfrac{A}{2} - 4(R + r_a) R \sin^2\dfrac{A}{2} + k^2 + 4r_a^2 = 0$.

186. Угол B определяется уравнением $\left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)^2 \sin^2 B + \left(r_a - 2R \cos^2\dfrac{B}{2}\right)^2 = 4R^2 \cos^2\dfrac{B}{2}$. **187.** $(r_a + r) a = (r_a - r)k$, $(r_a + r)(b - c) = \sqrt{k^2 (r_a - r)^2 - 4rr_a (r_a + r)^2}$

и т. д. 188. $a=\sqrt{4rr_a+k^2}$, $(r_a-r)(b+c)=(r_a+r)\sqrt{4rr_a+k^2}$. 189. $(r_a+r)\sin\frac{A}{2}=$ $=(r_a-r)\cos k$ и т. д. 190. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{r_ar_b-r(r_a+r_b)}}{r_a}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{r_ar_b-r(r_a+r_b)}}{r_b}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{\sqrt{r_ar_b-r(r_a+r_b)}}$. 191. $2(r_a+r)\cos^2\frac{A}{2}=k$, $(r_a-r)\cos\frac{B-C}{2}=$ $=(r_a+r)\sin\frac{A}{2}$. 192. $a:b:c=\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right):\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right):\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$ и т. д. 193. $a:b:c=\frac{2}{h_a}:\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}+\frac{2}{h_a}\right):\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$. 194. $\left(r_a^2+r_b^2\right)ab=$ $=r_ar_b\left[(r_a-r_c)^2+k^2\right]$, $c^2=k^2+2ab-4r_ar_b$. 195. Указание: $(r_a-r_b)\cos\frac{C}{2}=$ $=(r_a+r_b)\sin k$. 196. $2\sin^2\frac{C}{2}=\frac{k}{r_a-r_b}$, $(r_a+r_b)\sin\frac{A-B}{2}=(r_a-r_b)\cos\frac{C}{2}$. 197. $p^2-Rh_a(1+\cos A)=2pR\sin A$. 198. $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{h_a(m+1)^2}{8Rm}$. 199. $4R^2\cos^2A-$ $-4Rh_a\cos A+k^2-4R^2=0$. 200. $p\left(\cos k-\sin\frac{A}{2}\right)=h_a\cos\frac{A}{2}$. 201. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=$ $=\frac{p}{k}-\frac{h_a}{2p}$, $\cos\frac{B-C}{2}=\left(\frac{p}{k}+\frac{h_a}{2p}\right)\cos\frac{A}{2}$. 202. $2R(p-c)\sin A+Rh_a\cos A=$ $=q^2+Rh_a$, $a=2R\sin A$. 203. $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{s\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+p^2}{p^2-s\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$; угол A определяется из уравнения $pk\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}-p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}+s=0$. 204. $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2(h_c-r)r}{k(h_c-2r)}$ и $h_c\operatorname{cosec}B=k-h_c\operatorname{cosec}C$ и т. д. 205. $(k^2+q^2-2h_cq)\cos^2\frac{C}{2}=q$, $h_c\operatorname{cosec}B=$ $=k-h_c\operatorname{cosec}C$. 206. $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{k(h_c-2r)}{2r(h_c-r)}$ и $\sin\frac{C}{2}=\frac{r\cos\frac{A-B}{2}}{h_c-r}$. 207. $(h_c+r_c)(4r_c-k)\cos^2\frac{C}{2}=kr_c$. 208. $2(r_c+h_c)\sqrt{m}\cos\frac{C}{2}=(m+1)\sqrt{2r_ch_c+h_c^2}$. 209. Угол C определяется из уравнения $\frac{k^2(2r_c+h_c)^2}{4r_c^4\cos^2\frac{C}{2}}\sin^4\frac{C}{2}+\frac{(h_c+r_c)^2}{r_c^2}\sin^2\frac{C}{2}=1$.

210. $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{k(2r_a-h_c)}{4r_a(r_a-h_c)}}$. 211. $C=45°$. 212. 90°. 213. $\arccos\frac{11}{14}$. 214. $\sin A=\sqrt{\frac{1}{5}}$. 215. 132° и 12°. 216. $\frac{2}{5}$. 217. $A=30°$, $B=\arcsin\frac{3}{8}$. 218. 72°. 219. 84°. 220. $C=90°$. 221. $A=70°$, $B=85°$. 222. $A=36°$. 223. $\sin(B-C)=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\operatorname{tg}A=\frac{3}{4}$ или $\operatorname{tg}A=\frac{21}{20}$. 224. $\frac{36}{77}$. 225. $A=40°$, $C=30°$. 226. 60°. 227. $\frac{3}{5}$. 228. $B=C=36°$. 229. $\frac{5}{12}$. 230. $A=B=C=60°$. 231. $\sqrt{3}-1$. 232. 18°. 233. 90°. 234. 45°. 235. 90° и 30°. 236. 60°, 73°. 237. 36°. 241. 60°. 242. 144°. 243. $C=90°$, $B=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. 244. $A=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $B-C=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 245. $\frac{3}{2}$. 246. 1. 247. 1. 248. $a=3$, $b=\frac{25}{13}$, $c=\frac{56}{13}$. 249. $a=3$, $c=6$. 250. 1. 251. 10. 252. $a=5$, $b=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$, $c=\frac{\sqrt{41}-3}{2}$. 253. $b=4$, $c=3$. 254. $2\sqrt{3}$. 255. Одно из решений: $c=1$, $b=2$. 256. $\sqrt{2}$. 257. $a=3$, две другие стороны $\frac{1}{2}\left(3\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$.

258. $b=2$, $c=3$. 259. 2. 260. $a=2$, $b=2\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. 261. $a=2$, $b=3\pm\sqrt{\frac{7}{8}}$. 262. $a=2$, $b=c=\sqrt{2}$, $A=90°$. 263. $a=8\sqrt{3}$, $b=16$, $c=8$. 264. $2\sqrt{2}$. 265. 4 и 3. 266. $a=4$, $b=\sqrt{10+6\sqrt{2}}+\sqrt{10-6\sqrt{2}}$. 267. $\sqrt{3,4}$; 2; 3. 268. $\sqrt{5,8}$; 3; 4. 269. 4. 270. $a=2$, $b=4$, $c=3$. 271. $a=6$, $b-c=\sqrt{23}$, $A=90°$. 272. 1. 273. 5. 274. $a=\sqrt{19}$, $b=2$, $c=3$. 275. $a=\sqrt{7}$, $b=3$, $c=2$. 276. $\frac{12}{5}$. 277. $a=5$, $b=6$, $c=7$. 278. $b=5$, $c=3$, $B=90°$. 279. $a=b=c=2\sqrt{6}$. 280. $2p=6$. 281. $a=b=c=2$. 282. $a=2$, $b=2\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $c=2\mp\sqrt{\frac{2}{3}}$. 283. 3. 284. $A=60°$, $C=30°$, $c=2$, $b=4$, $a=2\sqrt{3}$. 285. $A=60°$, $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $b=\frac{5\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{8}$, $c=\frac{5\sqrt{3}\mp\sqrt{11}}{8}$. 286. $A=60°$, $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 287. $a=1$, $b=3{,}25$; $c=3{,}75$. 288. $a=3$, $b=3{,}5\pm\sqrt{0{,}65}$; $c=3{,}5\mp\sqrt{0{,}65}$. 289. $a=5$, $b=4$, $c=3$. 290. $b=11$, $c=13$. 291. $b=3+\frac{1}{2}\sqrt{11}$. 292. $a=5$, $b=4$, $c=3$. 293. $a=9$, $b=8$, $c=7$. 294. 1. 295. 14. 296. 3. 297. $-\frac{4}{5}$. 298. $b=2\sqrt{4{,}57}+\frac{1}{2}$, $b-c=1$. 299. $a=b=c=1$. 300. 3; 4; 5. 301. $A=90°$; $b=4\pm\sqrt{2}$, $c=4\mp\sqrt{2}$, $a=6$. 302. $a=3$, $b=4$, $c=5$. 303. $a=b=15$, $c=24$. 304. $a=7$, $b=25$, $c=24$. 305. 3; 4; 5. 306. $a=5$, $b=12$, $c=13$. 307. $a=95$, $b=76$, $c=57$. 308. $a=\frac{60}{11}$, $b=\frac{50}{11}$, $c=2$. 309. $a=5$, $b=4$, $c=3$. 310. $a=55\frac{5}{13}$, $b=34\frac{8}{13}$, $c=54$. 311. $a=2$, $b=3$, $c=4$. 312. $a=b=c=2$. 313. $a=5$, $b=4$, $c=6$. 314. $a=25$, $b=20$, $c=15$. 315. $a=13$, $b=12$, $c=5$. 316. $a=64$, $b=40\pm\sqrt{1015}$, $c=40\mp\sqrt{1015}$. 317. $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{12}$, $c=\frac{5}{4}\mp\frac{\sqrt{3}}{12}$. 318. $a=16$, $b=14$, $c=6$. 319. $a=40$, $b=13$, $c=37$. 320. $a=\frac{9}{5}$, $b=\frac{21}{5}$, $c=4$. 321. $a=5$, $b=3$, $c=4$. 322. $a=6$, $b=7$, $c=8$. 323. $a=7$, $b=6$, $c=5$. 324. $a=8$, $b=c=5$. 325. $a=3$, $b=\frac{7}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{41}$. 326. $a=\frac{5\sqrt{3}}{6}$, $A=60°$. 327. $A=90°$, $a=\frac{18}{7}$, $b=\frac{12}{7}\pm\frac{3\sqrt{2}}{7}$. 328. $b=17$, $c=8$. 329. $b=5$, $c=3$. 330. $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $A=90°$, $B=30°$.

§ 3. Задачи по планиметрии с применением тригонометрии

П. 1. Треугольник

1. $\frac{2abcs}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. 2. $\frac{ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$.

99. 1°. Значения α, при которых $(D)\parallel(\Delta)$. Имеем $(x'x, D)=(x'x, y'y)+(y'y, D)=\frac{\pi}{2}+\alpha\ (\mathrm{mod}\ \pi)$, $(x'x, \Delta)=(x'x, AB)+(AB, \Delta)=\frac{3\pi}{4}-\alpha\ (\mathrm{mod}\ \pi)$. Для того чтобы $(D)\parallel(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы $(x'x, D)=(x'x, \Delta)+k\pi$, или $\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k\pi$, или $\alpha=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$. Среди всех этих углов есть лишь два: $\alpha_1=-\frac{3\pi}{8}$ и $\alpha_2=\frac{\pi}{8}$, заключенные между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; при этих значениях α прямые (D) и (Δ) будут параллельны. Для того чтобы прямые (D) и (Δ) были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $(x'x, D)=(x'x, \Delta)+\frac{\pi}{2}+k\pi$, или $\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{3\pi}{4}-\alpha+\frac{\pi}{2}+k\pi$, откуда $\alpha=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; среди этих углов есть только два: $\alpha_3=-\frac{\pi}{8}$ и $\alpha_4=\frac{3\pi}{8}$, заключенные между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; при этих значениях α прямые (D) и (Δ) будут перпендикулярны.

100. 1°. а) $a' = a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$;

б) $a' = -a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$;

а) $A' = 180° - 2A$, $B' = 180° - 2B$, $C' = 180° - 2C$;

б) $A' = 2A - 180°$, $B' = 2B$, $C' = 2C$.

2°. α) В этом случае $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ положительны, значит, все углы A, B, C острые. На основании 1° имеем $a' = l$, $b' = m$, $c' = n$. Зная стороны треугольника $A'B'C'$, найдем его углы, а углы A, B, C затем определим по формулам: $A = 90° - \frac{A'}{2}$, $B = 90° - \frac{B'}{2}$, $C = 90° - \frac{C'}{2}$.

β) Если $l < 0$, то $\cos A < 0$, A — тупой угол, B и C — острые. В этом случае $a' = -l = |l|$, $b' = m$, $c' = n$. Зная стороны a', b', c' треугольника $A'B'C'$, найдем его углы; однако теперь $A = 90° + \frac{A'}{2}$, $B = \frac{B'}{2}$, $C = \frac{C'}{2}$.

3°. Свойство полного четырехсторонника.

4°. α) $l > 0$, $m > 0$, $n > 0$. В этом случае все углы треугольника ABC острые, а его высоты — внутренние биссектрисы углов треугольника $A'B'C'$; значит, в этом случае строим треугольник $A'B'C'$ ($B'C' = l$, $C'A' = m$, $A'B' = n$), проводим биссектрисы внутренних его углов, затем через каждую из точек A', B', C' проводим прямую, перпендикулярную той биссектрисе, которая выходит из соответствующей вершины.

β) $l < 0$, $m > 0$, $n > 0$. В этом случае A — тупой угол и три его высоты суть соответственно — биссектриса внутреннего угла A' и биссектрисы внешних углов B' и C', значит, построение таково: строим треугольник $A'B'C'$ [$B'C' = |l|$, $C'A' = m$, $A'B' = n$], затем строим биссектрису внутреннего угла A' и биссектрисы внешних углов B' и C', а затем к каждой из них через соответствующую точку A', B' или C' проводим перпендикуляр. В пересечении этих перпендикуляров и получаем треугольник ABC.

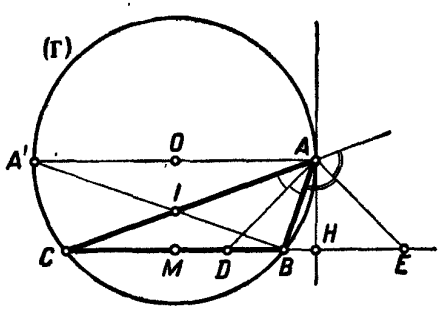
101. 1°. **Длина отрезков AD и AE:**

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}, \quad AE = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}.$$

2°. **Соотношение между B и C, если $AD = AE$.** В этом случае из 1° $\frac{b-c}{b+c} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}$; с другой стороны, в любом треугольнике $\frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$; значит, $B - C = \frac{\pi}{2}$.

3°. **Изучение свойств треугольника, у которого $B - C = \frac{\pi}{2}$.**

а) **Пусть $B - C = \frac{\pi}{2}$.** Угол ADB — внешний угол треугольника ADC; значит, он равен $C + \frac{A}{2}$. Но так как $B - C = \frac{\pi}{2}$ и $A + B + C = \pi$, то $C + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит, $\triangle EAD$ равнобедренный и прямоугольный, значит, $AD = AE$ (доказано положение, обратное 2°).



Черт. 298.

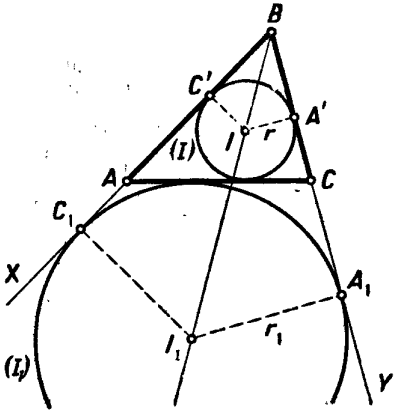
б) **Пусть (черт. 298) ABC — треугольник, в котором $B - C = \frac{\pi}{2}$.** Построим внутри угла B угол CBI, равный C, тогда $BI \perp BA$. Пусть (Γ) — окружность, описанная вокруг треугольника ABC. Опустим из точки A перпендикуляр AH на BC. Углы HAB и IBC равны как углы с перпендикулярными сторонами, значит, $\angle HAB = \angle BCA$; отсюда и следует, что AH касается окружности (Γ) в точке A.

в) На основании только что доказанного $OA \parallel BC$, где O — центр окружности (Γ); с другой стороны, $\angle ABI = 90°$, значит, точка A', в которой продолжение BI пересекает (Γ), диаметрально противоположна точке A. Для любого треугольника ABC имеем: $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2\overline{BC}\cdot\overline{HM} = 2\overline{BC}\cdot\overline{AO}$ (M — середина BC) или $b^2 - c^2 = 2aR$, но $4R^2 = b^2 + c^2$ ($A'B = AC$), значит, $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$.

102. 1°. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$; $a=\frac{2p\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)}$,

$c=\frac{2p\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{2}\right)}$, $b=\frac{p}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{2}\right)}$. Единственное условие существования треугольника $\varphi<\frac{\pi}{3}$.

2°. Вычисляя s по формуле $s=\frac{1}{2}ac\sin B$, найдем $\cos\varphi=\frac{p^2+s\sqrt{3}}{2(p^2-s\sqrt{3})}$; угол φ должен быть заключен между 0 и $\frac{\pi}{3}$; значит, его косинус заключен между $\frac{1}{2}$ и 1, $\frac{1}{2}<\frac{p^2+s\sqrt{3}}{2(p^2-s\sqrt{3})}\leqslant 1$; отсюда прежде всего $p^2>s\sqrt{3}$; если это выполнено, то должно быть $p^2-s\sqrt{3}<p^2+s\sqrt{3}\leqslant 2(p^2-s\sqrt{3})$. Первое неравенство всегда выполнено. Второе дает $s\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, что включает в себя условие $p^2>s\sqrt{3}$, указанное выше. Итак, единственное условие $s\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.



Черт. 299.

3°. Условие, при котором треугольник прямоугольный. Прямым углом должен быть, конечно, угол C. Это дает $\varphi=\frac{\pi}{6}$ и т. д. $s=p^2\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}}$.

4°. Построение треугольника ABC, если известны $2p$ и l. В искомом треугольнике $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ и $\hat{A}<\hat{C}$. Строим угол $\frac{\pi}{3}$; на его сторонах откладываем отрезки $BA_1=p$ и $BC_1=p$. Строим окружность, касающуюся сторон угла B в точках A_1 и C_1 — это будет окружность, вневписанная в угол B для искомого треугольника ABC (черт. 299). Пусть окружность (I), вписанная в искомый треугольник ABC, касается его сторон BC и BA в точках A' и C', тогда $BA'=p-b$, а если r_1 — радиус окружности, вневписанной в угол B, то $(p-b)r_1=l^2$. Это позволяет определить $p-b$, значит, и точки A' и C', значит, и построить окружность (I), вписанную в треугольник ABC. Остается провести внутреннюю общую касательную к окружностям (I_1) и (I) — ту, которая даст $\hat{A}\leqslant\hat{C}$.

Исследование. Возможность проведения внутренней касательной $r+r_1\leqslant II_1$, но $r=\frac{s}{p}=\frac{l^2}{p}$, $r_1=p\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{p}{\sqrt{3}}$, $II_1=\frac{A'A_1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2A'A_1}{\sqrt{3}}=\frac{2(p-BA')}{\sqrt{3}}$, но так как BA' равно $\frac{l^2}{r_1}=\frac{l^2\sqrt{3}}{p}$, то $II_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(p-\frac{l^2\sqrt{3}}{p}\right)=\frac{2(p^2-l^2\sqrt{3})}{p\sqrt{3}}$ и, значит, $\frac{l^2}{p}+\frac{p}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{2(p^2-l^2\sqrt{3})}{p\sqrt{3}}$, или $l^2\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ — то же, что и выше.

103. 1°. Окружность (O) получается из (ω) гомотетией $\left(A,\frac{4}{3}\right)$. В этой гомотетии точка I переходит в D, значит, касательная в точке D к (O) параллельна BC и т. д.

Далее, после того как будет получено соотношение $AD=2BD$, заметить, что тогда и $\frac{AB}{BI}=2$. Но $\frac{BI}{CI}=\frac{AB}{AC}$, значит, $\frac{AC}{CI}=\frac{AB}{BI}=2$ и, значит, $\frac{AC+AB}{BI+IC}=2$, т. е. $b+c=2a$.

2°. Считая $B \geqslant C$, находим:

$$B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + \arccos\left(2\sin\frac{A}{2}\right), \quad C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \arccos\left(2\sin\frac{A}{2}\right).$$

Условие возможности: $\alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$, $B \geqslant 0$ (это условие выполнено), $C \geqslant 0$ — приводится к виду $2\sin\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$, что верно. Итак, единственное условие: $\alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$.

3°. Проведем через точку ω и через середину A_1 отрезка PA прямые, параллельные основаниям трапеции; первая прямая есть ωI; пусть H_1 — точка, в которой вторая пересекает (Δ). Тогда $A_1H_1 = \frac{AH + OM}{2}$, $\omega I = \frac{A_1H_1 + OM}{2}$, откуда $AH = 4\omega I - 3OM = 3R(1 - \cos A)$ и, значит, $s = 3R^2 \sin A(1 - \cos A)$; s возрастает на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

4°. Окружность (γ) в инверсии (O, R^2) переходит в прямую (Δ), а так как эта последняя касается все время окружности (ω), то окружность (γ) касается окружности (ω'), полученной из (ω) инверсией (O, R^2); пусть (Δ) пересекает AO в точке G; окружность (ω') — это окружность с центром G, проходящая через A. Окружность (γ) проходит через фиксированную точку O и касается постоянно окружности (ω'); значит, центр K окружности (γ) расположен на эллипсе с фокусом O, для которого окружность (ω') есть направляющая окружность, относящаяся к другому фокусу; полупрямая OK перпендикулярна (Δ); она может, вращаясь вокруг O, принимать все возможные направления; значит, K описывает указанный эллипс целиком. Точка P (см. условие) расположена на перпендикуляре OM (M на BC), опущенном из O на (Δ), и такова, что $\overline{OP} \cdot \overline{OM} = R^2$; значит, точка P получается из M инверсией (O, R^2) и, значит, точка P — диаметрально противоположна точке O окружности (γ). Геометрическое место точек P есть, следовательно, эллипс, полученный из эллипса (K) гомотетией $(O, 2)$; фокусами этого эллипса служат точки O и E [E — диаметрально противоположна точке A на окружности (O)]; окружность (ω') для этого эллипса является главной. Наконец, точка I есть точка прикосновения (Δ) и (ω); ее образ I' в инверсии (O, R^2) есть точка касания (ω') и (γ). Так как $\overline{OI} \cdot \overline{OI'} = R^2$, то I' — основание поляры точки I относительно (O); эта поляра перпендикулярна OI и проходит через I'; значит, это прямая $I'P$. Точка I' является проекцией на эту прямую фокуса O эллипса (P), и она (точка I') расположена на главной окружности эллипса (P), поэтому PI' — касательная к эллипсу (P) в точке P.

104. Симметрия фигуры относительно Oz. 1°. Дуги $\overset{\smile}{AA'}$, $\overset{\smile}{BB'}$, $\overset{\smile}{CC'}$ равны между собой (каждая из них равна θ); значит, дуги $\overset{\smile}{A'B}$, $\overset{\smile}{B'C}$ и $\overset{\smile}{C'A}$ также равны между собой (каждая из них равна $120° - \theta$); отсюда и из того, что точки A и A' симметричны относительно диаметра Oz следует, что точки B и C' симметричны относительно Oz, точки B' и C симметричны относительно Oz. Прямые, на которых лежат стороны треугольника $A'EF$, на основании предыдущего, симметричны относительно Oz прямым, на которых лежат стороны треугольника AED; эти треугольники, значит, сами симметричны относительно Oz, а потому равны между собой.

2°. **Периметр треугольника $A'EF$.** Прямые AB и $A'C'$ симметричны относительно оси Oz; точка E, в которой они пересекаются, лежит на оси Oz, значит, $A'E = AE$. С другой стороны, $\angle A'BF = \angle BA'F$, значит, $A'F = FB$. Отсюда следует, что периметр треугольника $A'EF$ равен $AE + EF + FB = AB = a$.

Углы и стороны того же треугольника. Углы F, A' и E треугольника $FA'E$ равны θ, $60°$, $180° - (\theta + 60°)$. Далее, $\frac{A'E}{\sin\theta} = \frac{EF}{\sin 60°} = \frac{FA'}{\sin(\theta + 60°)} = \frac{A'E + EF + FA'}{\sin\theta + \sin 60° + \sin(\theta + 60°)}$, отсюда $A'E = \frac{2a\sin\theta}{3\sin\theta + \sqrt{3}(1 + \cos\theta)}$,

$EF = \frac{a\sqrt{3}}{3\sin\theta + \sqrt{3}(1 + \cos\theta)}$, $FA' = \frac{2a\sin(\theta + 60°)}{3\sin\theta + \sqrt{3}(1 + \cos\theta)}$.

3°. **Определение θ из условия $FE = \frac{a\sqrt{3}}{3m}$, где $m > 0$.** Для того чтобы это условие было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы $3\sin\theta + \sqrt{3}(1 + \cos\theta) = 3m$ или $\sin(\theta + 30°) = \frac{m\sqrt{3} - 1}{2}$. Так как θ изменяется от 0 до 120°, то $\theta + 30°$ изменяется от 30° до 150°, а $\sin(\theta + 30°)$ принимает все значения между $\frac{1}{2}$ и 1 по два

раза. Значит, мы получим для $\theta+30°$, следовательно, и для θ два значения, если $\frac{1}{2}\leqslant\frac{m\sqrt{3}-1}{2}\leqslant 1$ или $\frac{2}{\sqrt{3}}\leqslant m\leqslant\frac{3}{\sqrt{3}}$. Полученные при этом значения для $\theta+30°$ будут дополнительными, а соответствующие значения для θ дадут в сумме 120° (что ясно и геометрически).

Выражение $y=A'E$ в функции t:

$$y=\frac{2at}{3t+\sqrt{3}}. \tag{1}$$

4°. Выражение r в функции y. Воспользовавшись формулой $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ и соотношением (1), найдем $r=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{y(2y-a)}{3y-3a}$; максимум r будет при $y=\frac{a}{3}$, при этом $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\theta}{2}=30°$, $\theta=60°$.

105. 1°. Построение треугольника ABC, если задана точка D. Геометрическое место точек A есть эллипс с фокусами B и C; бо́льшая ось его равна 10. Биссектриса угла BAC есть нормаль в точке A к эллипсу. Зная ее основание D, можно построить точку E, в которой касательная к эллипсу в точке A пересекает BC: эта точка гармонически сопряжена с D относительно B и C. Построение точки A сводится, таким образом, к проведению касательной из точки E к эллипсу, что может быть выполнено, например, при помощи аффинитета. Условие же возможности решения состоит в том, чтобы расстояние от точки E до центра эллипса было не менее большей полуоси, т. е. $OE\geqslant 5$, $\frac{OB^2}{OD}\geqslant 5$, $\frac{9}{|x|}\geqslant 5$, $|x|\leqslant\frac{9}{5}$.

2°. Соотношение между углами предлагается вывести читателю самостоятельно.

3°. Значения AB и AC. $AB=\frac{5}{3}(3+x)$, $AC=\frac{5}{3}(3-x)$.

Значения $\cos A$ и $\cos\widehat{BAD}$: $\cos A=\frac{25x^2+63}{25(9-x^2)}$, $\cos\widehat{BAD}=\frac{12}{5\sqrt{9-x^2}}$.

Величины проекций AB и AC на AD: $AB'=4\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$, $AC'=4\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$.

Пусть T — точка прикосновения касательной, проведенной из точки A к окружности, построенной на $B'C'$ как на диаметре. Тогда $AT^2=AB'\cdot AC'=16$, $AT=4$.

Вычисление $\operatorname{tg} DAI$. Пусть I — центр окружности с диаметром $B'C'$, тогда

$$\operatorname{tg} DAT=\operatorname{tg} IAT=\frac{IT}{AT}=\frac{IT}{4}=\frac{B'C'}{8}=\frac{AB'-AC'}{8}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}-\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\right).$$

Минимум для угла DAT — число нуль в том случае, когда треугольник ABC равнобедренный ($BA=CA$).

106. 1°. Предоставляется доказать читателю.

2°. На основании 1° имеем $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2$, или $\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. Пусть угол A задан. Остается решить систему $\sin B\sin C=\frac{1}{2\sin A}$, $B+C=\pi-A$.

Из первого уравнения $\cos(B-C)-\cos(B+C)=\frac{1}{\sin A}$, следовательно, $\cos(B-C)=\frac{1}{\sin A}-\cos A$; треугольник ABC существует, если $0<|B-C|<B+C$ или $1>\cos(B-C)>\cos(B+C)$, т. е. $1>\frac{1}{\sin A}-\cos A>-\cos A$.

Второе неравенство, наверное, выполнено, так как $\sin A>0$. Полагая $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=t$, перепишем первое неравенство так: $1>\frac{1+t^2}{2t}-\frac{1-t^2}{1+t^2}$; так как $t>0$, то оно эквивалентно следующему: $t^4+2t^2-4t+1<0$ или $(t-1)(t^3+t^2+3t-1)<0$. Функция t^3+t^2+3t-1 всегда возрастает и, значит, имеет лишь один корень t' (между 0 и 1; более точно $0{,}29<t'<0{,}30$). Значит, предыдущее неравенство будет выполнено, если $t'<t<1$, т. е. $2\operatorname{arc tg} t'<A<\frac{\pi}{2}$, где t' — действительный корень уравнения $t^3+t^2+3t-1=0$; треугольники, удовлетворяющие условию задачи, существуют.

107. 1°. $A_bB_c \cdot B_cC_a \cdot C_aA_b = A_cB_a \cdot B_aC_b \cdot C_bA_c$. Заметим прежде всего, что точка I лежит внутри треугольника ABC и что лучи, соединяющие эту точку I с вершинами треугольников $A_bB_cC_a$, $A_cB_aC_b$ и ABC, образуют во всех случаях шесть острых углов, попарно равных дополнениям до $\frac{\pi}{2}$ углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, например $\angle IAA_b = \frac{C}{2}$ и т. д. Обозначим через r радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $IA \sin\frac{A}{2} = IB \sin\frac{B}{2} = IC \sin\frac{C}{2} = r$. Мы имеем: $IA_b = IA \sin\frac{C}{2} = r\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$, $IA_c = IA \sin\frac{B}{2} = r\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$, $IB_c = IB \sin\frac{A}{2} = r\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$, $IC_b = IC \sin\frac{A}{2} = r\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$, отсюда $\frac{IA_b}{IA_c} = \frac{IB_c}{IC_b} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$; следовательно, треугольники IA_bB_c и IA_cC_b подобны; отношение подобия равно $\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$; значит, $\frac{A_bB_c}{A_cC_b} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$. Круговой перестановкой букв получаем: $\frac{A_bB_c}{C_bA_c} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$, $\frac{B_cC_a}{A_cB_a} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$, $\frac{C_aA_b}{B_aC_b} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$. Перемножая, получим $\frac{A_bB_c}{C_bA_c} \cdot \frac{B_cC_a}{A_cB_a} \cdot \frac{C_aA_b}{B_aC_b} = 1$.

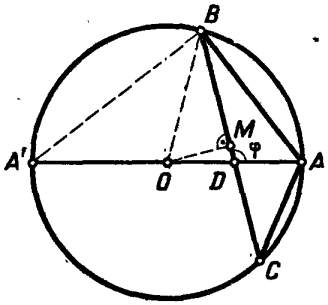
2°. пл. $\triangle A_bB_cC_a$ + пл. $\triangle A_cB_aC_b = \frac{1}{2}$ пл. $\triangle ABC$. На основании предыдущего пл. $\triangle IA_bB_c = \frac{1}{2} r \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \cdot r \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \cos\frac{A}{2}$ и пл. $\triangle IA_cC_b = \frac{1}{2} r \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}} r \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \times$ $\times \cos\frac{A}{2}$, или пл. $\triangle IA_bB_c = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$, пл. $\triangle IA_cC_b = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$; производя круговую перестановку, получим: пл. $\triangle IB_cC_a = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$, пл. $\triangle IB_aA_c = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$, пл. $\triangle IC_aA_b = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$, пл. $\triangle IC_bB_a = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$. Складывая, получим:

$$\text{пл. } \triangle A_bB_cC_a + \text{пл. } \triangle A_cB_aC_b = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \right) = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \text{ пл. } \triangle ABC.$$

108. 1°. Геометрическое место точек пересечения медиан треугольника *ABC*. Середина M стороны BC есть проекция точки O на эту сторону; значит, геометрическое место точек M есть окружность с диаметром OD. Точка G — пересечения медиан треугольника ABC получается из точки M преобразованием гомотетии $\left(A, \frac{2}{3}\right)$; значит, геометрическое место точек G есть образ окружности с диаметром OD в гомотетии $\left(A, \frac{2}{3}\right)$. Этот образ есть окружность с центром D (черт. 300).



Черт. 300.

3°. Соотношения (1), (2), (3). Остановимся только на доказательстве того, что если выполнено любое из соотношений (1), (2), (3), то треугольник обладает свойством, указанным в условии задачи. Пусть, например, выполнено условие (3); тогда $\sin 2A < 0$; значит, A — тупой угол, значит, сторона BC проходит между O и A. Из формул $\varphi = \frac{\pi}{2} + C - B$, $\angle ODB = \frac{\pi}{2} - (C - B)$, $\angle OBD = \frac{\pi}{2} - (C + B)$, из треугольника BOD имеем (теорема синусов):

$$\frac{OB}{\cos(C-B)} = \frac{OD}{\cos(C+B)},$$

$$OB \cdot \cos(C+B) = OD \cdot \cos(C-B);$$

но из (3) следует (1); значит, $OB = 2OD$.

4°. $B + C = \arccos\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\right)$, $B - C = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $B = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\right)$, $C = -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\right)$.

109. Из (1), применяя теорему синусов и соотношения $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, получим $a^4 = b^4 + c^4$. Обратно, если выполнено это соотношение, то $a^4 - (b^2 - c^2)^2 = 2b^2c^2$, $(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2) = 2b^2c^2$, $2ab\cos C \cdot 2ac\cos B = 2b^2c^2$ и т. д., приходим к (1). Далее, так как $a^4 = b^4 + c^4$, то $a^2 < b^2 + c^2$ и, значит, A — острый угол, $\cos A = \frac{d}{R}$ и т. д. Ответ:

$$AH = \frac{4d(R^2 - d^2)}{R^2 - 2d^2}.$$

110. Пусть $AC = b$, $AB = c$, тогда

$$c^2 + a^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}. \tag{1}$$

Применяя теорему о квадрате стороны треугольника в соответствии с определением абсолютной величины и знака k, будем иметь

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2k; \tag{2}$$

из (1) и (2) имеем: $b^2 = 4(m^2 + k - a^2)$, $c^2 = 4m^2 + 2k - 3a^2$. Следовательно, предполагая, что k больше наибольшего из чисел $a^2 - m^2$ и $\frac{3a^2}{2} - 2m^2$, будем иметь

$$b = 2\sqrt{m^2 + k - a^2}, \quad c = \sqrt{4m^2 + 2k - 3a^2}. \tag{3}$$

Таким образом, известны все стороны a, b, c треугольника. Положим теперь $m = \frac{3a}{2}$; формулы (3) примут вид $b = \sqrt{5a^2 + 4k}$, $c = \sqrt{6a^2 + 2k}$, причем k должно быть больше $-\frac{5a^2}{4}$:

$$k > -\frac{5a^2}{4}; \tag{4}$$

треугольник существует тогда и только тогда, когда $|b - c| < a < b + c$, или $b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$, или

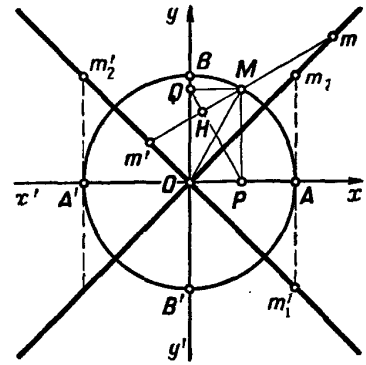
$$-\sqrt{(5a^2 + 4k)(6a^2 + 2k)} < -5a^2 - 3k < \sqrt{(5a^2 + 4k)(6a^2 + 2k)}. \tag{5}$$

Так как $k > -\frac{5a^2}{4}$, то $-5a^2 - 3k < -\frac{5a^2}{4}$; значит, $-5a^2 - 3k$ — число отрицательное, а потому второе из равенств (5) выполняется. Остается первое, которое можно переписать в виде $\sqrt{(5a^2+4k)(6a^2+2k)} > 5a^2 + 3k$; так как $5a^2 + 3k > 0$, то это неравенство эквивалентно тому, которое получится возведением в квадрат обеих частей. Производя выкладки, получим $-a^2 < k < 5a^2$, но в таком случае (4) выполнено. Итак, $-a^2 < k < 5a^2$.

111. 1°. **Координаты точек m и m'.** Угол от оси Ox до Mm равен $\frac{\pi}{2} - u$, поэтому, проектируя ломаную OMm на ось Ox, получим (черт. 301): $x_m = \cos u + \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u + \sin u$, а проектируя на ось Oy, $y_m = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos u = \sin u + \cos u$. Угол от Ox до Mm' равен $\pi + \frac{\pi}{2} - u = \frac{3\pi}{2} - u$. Значит,

$$x_{m'} = \cos u + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - u\right) = \cos u - \sin u,$$

$$y_{m'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + u\right) = \sin u - \cos u.$$



Черт. 301.

Мы видим, что $y_m = x_{m'}$, $y_{m'} = -x_{m'}$, т. е. точки m и m' лежат на биссектрисах углов, образованных координатными осями.

Геометрическое место точек m и m', когда точка M описывает дугу AB первого квадранта. Имеем

$$Om = |\cos u + \sin u|\sqrt{2} = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + u\right)\right|,$$

$$Om' = |\cos u - \sin u|\sqrt{2} = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right|.$$

Максимум Om равен 2, минимум $\sqrt{2}$; геометрическое место точек m есть отрезок m_1m_2, концы которого определяются условиями $Om_1 = 2$, $Om_2 = \sqrt{2}$. Максимум Om' равен $\sqrt{2}$, минимум равен 0, геометрическое место точек m' есть отрезок $m_1'm_2'$, заключенный между точками m_1' и m_2', определяемыми условиями $Om_1' = Om_2' = \sqrt{2}$.

Геометрическое место точек m при условии, что точка M описывает всю окружность. Это геометрическое место состоит из двух отрезков биссектрис координатных углов, длина каждого из которых равна 4, а середина каждого из которых совпадает с точкой O.

2°. **Положение точки M при условии, что площадь треугольника Omm' равна $\frac{1}{2}$.** $\triangle Omm'$ прямоугольный (O — прямой угол), потому его площадь равна $\frac{1}{2} Om \cdot Om' = |\cos 2u| = \frac{1}{2}$, $2u = \frac{\pi}{3}$, $u = \frac{\pi}{6}$; $2u = \frac{2\pi}{3}$, $u = \frac{\pi}{3}$.

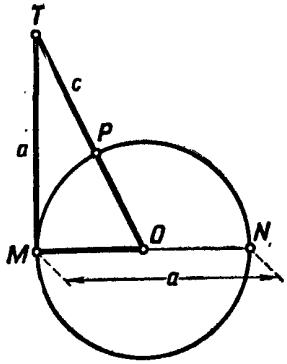
3°. **Площади поверхностей вращения, полученных при вращении отрезка Mm вокруг осей Ox и Oy.** $s = \pi(2\sin u + \cos u)$, $s' = \pi(\sin u + 2\cos u)$; $\frac{s}{s'} = \frac{2\operatorname{tg} u + 1}{\operatorname{tg} u + 2}$, $Y = \frac{2X+1}{X+2}$ — дуга равносторонней гиперболы ($0 < X < +\infty$). Если $y = 3\sqrt{3} - 4$, то $X = \sqrt{3}$, $u = \frac{\pi}{3}$.

4°. **Определение TM.** TH — высота $\triangle TPQ$, поэтому пл. $\triangle mPQ$ = пл. $\triangle TPQ$, если $TH = mH$; но $TH^2 = TM^2 + MH^2$, а так как $TH = Hm = HM + 1$, то $TM^2 = 2HM + 1$, но $HM = \cos u \sin u$; значит, $TM^2 = (\sin u + \cos u)^2$, $TM = \sin u + \cos u$, а так как $Om = (\sin u + \cos u)\sqrt{2}$, то TM — сторона квадрата, диагональ которого равна Om.

112. 1,01 радиан.

113. 1°. Если $A = 2C$, то $B = \pi - 3C$; значит, $\frac{a}{\sin 2C} = \frac{b}{\sin 3C} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin 3C + \sin C} = \frac{b+c}{2\sin 2C\cos C}$; отсюда $\frac{a^2}{\sin^2 2C} = \frac{(b+c)c}{2\sin 2C \sin C \cos C} = \frac{c(b+c)}{\sin^2 2C}$,

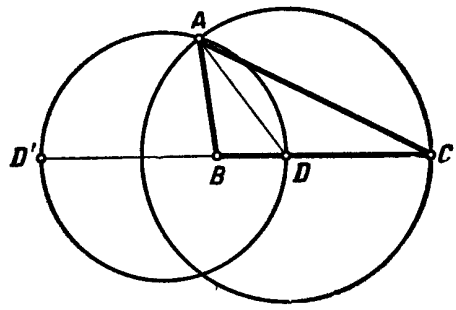
значит, $a^2 = c(b + c)$. Далее, $\sin B = \sin 3C = \sin C(3 - 4\sin^2 C)$, отсюда $b = c(3 - 4\sin^2 C) = c(1 + 2\cos A) = 4c\cos\left(30° + \frac{A}{2}\right)\cos\left(30° - \frac{A}{2}\right)$. Далее, если $a^2 = (b + C)c$, то $\sin^2 A = (\sin B + \sin C)\sin C = \sin(A + C)\sin C + \sin^2 C$, откуда $2(\sin^2 A - \sin^2 C) = \cos 2C - \cos 2A = 2\sin(A + C)\sin(A - C) = 2\sin(A + C)\sin C$. И так как $\sin(A + C) \neq 0$, то $\sin(A - C) = \sin C$; отсюда $A - C = C$, значит, $A = 2C$. Далее, из данного равенства $a^2 = (b + c)c$ находим $b^2 + c^2 - 2bc\cos A = bc + c^2$; значит, $b = c(1 + 2\cos A)$. Пусть, наконец, $b = 4c\cos\left(30° + \frac{A}{2}\right)\cos\left(30° - \frac{A}{2}\right)$, или $b = c(1 + 2\cos A)$; тогда $\sin B = \sin C(1 + 2\cos A)$, $\sin(A + C) = \sin C + 2\sin C\cos A$, $\sin(A - C) = \sin C$, $A = 2C$. Из соотношения $b = c(1 + 2\cos A)$ находим $b^2 = bc + 2bc\cos A$; но $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; значит, $a^2 = bc + c^2 = (b + c)c$.



Черт. 302.

Прямоугольный или равнобедренный треугольник, для которого $A = 2C$. Если треугольник ABC прямоугольный, то C — не прямой угол (ибо $A = 2C$). Если $A = \frac{\pi}{2}$, то $B = C = \frac{\pi}{4}$; построение треугольника не вызывает затруднений. Если же $B = \frac{\pi}{2}$, то $C = \frac{\pi}{6}$, $A = \frac{\pi}{3}$; построение такого треугольника с помощью циркуля и линейки также просто. Если треугольник ABC равнобедренный, то $A \neq C$ (ибо $A = 2C$). Положим $B = C$, тогда $C = \frac{\pi}{4}$, $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$, и мы приходим к предыдущему случаю. Если же $A = B$, то $C = \frac{\pi}{5}$, $A = B = \frac{2\pi}{5}$. В этом случае ($a = b$) основание c треугольника есть положительный корень уравнения $c^2 + ac - a^2 = 0$. Этот корень строится так: строим окружность на отрезке $MN = a$ как на диаметре. В точке M проводим касательную к этой окружности и на ней откладываем отрезок $MT = a$; точку T соединим с центром O окружности (черт. 302). Пусть отрезок OT пересечет окружность в точке P. Тогда $c = PT$. Зная c и a, можно построить соответствующий равнобедренный треугольник (основание c, две других стороны равны a).

2°. а) **Длина биссектрисы внутреннего угла A.** пл. $\triangle ABD$ + пл. $\triangle ACD$ = пл. $\triangle ABC$, $\frac{1}{2}lc\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}lb\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A$, где l — длина биссектрисы AD. Отсюда находим l, а заменяя b и c соответственно на $a\frac{\sin B}{\sin A}$ и $a\frac{\sin C}{\sin A}$, получим $l = \frac{a\sin B\sin C}{\sin\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)}$.



Черт. 303.

б) В частности, если $A = 2C$, то $l = a\frac{3 - \operatorname{tg}^2 C}{4}$, следовательно, $\operatorname{tg}^2 C = \frac{3a - 4l}{a}$; отсюда найдем C (C — острый угол, ибо $A = 2C$); зная C, найдем $A = 2C$ и $B = \pi - 3C$. Заметим, что угол C должен быть заключен между 0 и $\frac{\pi}{3}$, ибо $B = \pi - 3C$. Это будет так, если $\operatorname{tg} C < \sqrt{3}$, а это, в свою очередь, будет так, если $0 < \frac{3a - 4l}{a} < 3$. По условию $\frac{3a - 4l}{a} < 3$ имеет место при любых $a > 0$ и $l > 0$; значит, остается единственное условие $\frac{3a - 4l}{a} > 0$, т. е. $l < \frac{3}{4}a$.

в) **Геометрическое построение.** Если $A = 2C$, то $\angle CAD = C$; треугольник ACD, следовательно, равнобедренный с вершиной D и, следовательно, $DC = l$. Отложим на прямой отрезок $BC = a$ и возьмем на ней точку D такую, что $CD = l$; D — основание биссектрисы внутреннего угла A. Основание D' биссектрисы внешнего угла A легко построить (ибо $BD : DC = BD' : D'C$). Таким образом,

вершина A есть точка пересечения окружности с диаметром DD' с окружностью с центром D и радиусом $DC=l$. Если эти две окружности пересекутся, то получим два решения, симметрично расположенные относительно BC (черт. 303). Если $l<\frac{a}{2}$, то C лежит внутри отрезка DD' и две указанные окружности, очевидно, пересекаются. Предположим теперь, что $l>\frac{a}{2}$. Угол A существует, если $l<DD'$. Так как $BD=a-l$ и $DC=l$, то $\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}=\frac{a-l}{l}$, откуда $\frac{D'B}{a-l}=\frac{D'C}{l}=\frac{a}{2l-a}$; значит, $D'B=\frac{a(a-l)}{2l-a}$ и $DD'=a-l+\frac{a(a-l)}{2l-a}=\frac{2l(a-l)}{2l-a}$; итак, $l<\frac{2l(a-l)}{2l-a}$, или $\frac{l(3a-4l)}{2l-a}>0$, а так как $l>\frac{a}{2}$, то $l<\frac{3a}{4}$. Следовательно, единственное условие существования решения $l<\frac{3a}{4}$.

114. 1°. **Вычисление b и c.** Данное соотношение в силу $B+C=\pi-A$ приводится к виду $\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{2\sin A}{\sin B\sin C}$, или

$$\sin B\sin C\cos A=2\sin^2 A. \tag{1}$$

Отсюда

$$bc\cos A=2a^2; \tag{2}$$

но $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$; значит, $a^2=b^2+c^2-4a^2$, или

$$5a^2=b^2+c^2. \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) можно найти b и c:

$$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=5a^2+\frac{4a^2}{\cos A},\quad b+c=a\sqrt{5+\frac{4}{\cos A}};$$

$$(b-c)^2=b^2+c^2-2bc=5a^2-\frac{4a^2}{\cos A},\quad b-c=a\sqrt{5-\frac{4}{\cos A}}\qquad (b\geqslant c);$$

следовательно,

$$b=\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{5\cos A+4}{\cos A}}+\sqrt{\frac{5\cos A-4}{\cos A}}\right),\quad c=\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{5\cos A+4}{\cos A}}-\sqrt{\frac{5\cos A-4}{\cos A}}\right).$$

Исследование. Условие возможности решения задачи

$$\frac{5\cos A+4}{\cos A}\geqslant 0,\quad \frac{5\cos A-4}{\cos A}\geqslant 0,\quad \frac{5\cos A+4}{\cos A}>\frac{5\cos A-4}{\cos A}.$$

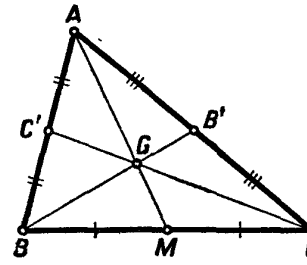
Все эти условия будут выполнены, если

$$\cos A\geqslant\frac{4}{5}. \tag{4}$$

2°. **Медианы, выходящие из B и C, взаимно перпендикулярны. Построение треугольника (T), если заданы вершины B, C и угол A.** Пусть M — середина стороны BC какого-нибудь треугольника (T) (ABC) и G — центр тяжести этого треугольника (черт. 304). Для того чтобы $\angle BGC=90°$, необходимо и достаточно, чтобы $GM=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$, или

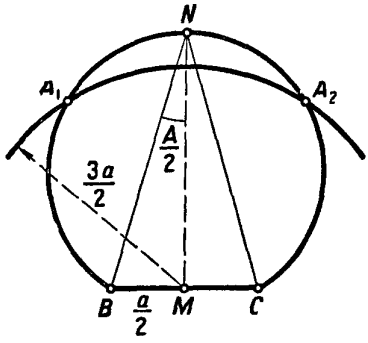
$$GM^2=\frac{a^2}{4}; \tag{5}$$

но $AM^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$, поэтому $GM^2=\left(\frac{AM}{3}\right)^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{36}$. Условие (5) принимает вид $\frac{2b^2+2c^2-a^2}{36}=\frac{a^2}{4}$, или $b^2+c^2=5a^2$. Обратно: если выполнено это последнее соотношение, то будет выполнено и соотношение (5). Построение треугольника (T), для которого заданы вершины B, C и угол A (черт. 305). На отрезке BC строим дугу, вмещающую угол A; $MG=\frac{a}{2}$, значит, $MA=\frac{3a}{2}$, а поэтому точка A должна быть расположена на окружности с центром M и

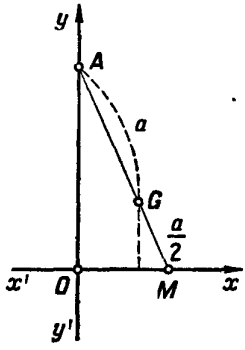


Черт. 304.

радиусом $\frac{3a}{2}$. Эта окружность пересекается с дугой, опирающейся на хорду BC и вмещающей угол A, тогда и только тогда, когда $MN \geqslant \frac{3a}{2}$ или $BM \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geqslant \frac{3a}{2}$, откуда $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{3}$ $\left(\text{это условие получается и из } \cos A \geqslant \frac{4}{5}\right)$.



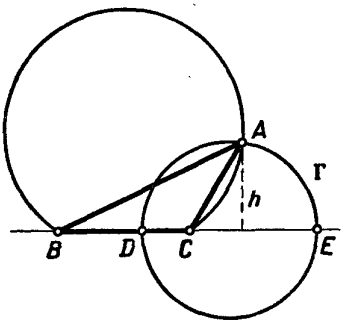
Черт. 305.



Черт. 306.

3°. Геометрическое место центров тяжести треугольников (T). Пусть a задано. Тогда $GM = \frac{a}{2}$, $GA = a$ и, значит, точка G описывает эллипс с полуосями a и $\frac{a}{2}$ (черт. 306).

115. Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABM и ACM; $R_1 = \frac{AM}{2 \sin B}$, $R_2 = \frac{AM}{2 \sin C}$, откуда $|R_1 - R_2| = \frac{AM}{2} \frac{|\sin C - \sin B|}{\sin B \sin C}$ или $|R_1 - R_2| = \frac{AM}{2} \frac{|c-b|}{b \sin C}$. Если H — основание высоты, опущенной из A на BC, T — точка прикосновения к стороне BC окружности, вписанной в треугольник ABC, а D — середина стороны BC, то $AH = b \sin C$, $BT = p - b = \frac{1}{2}(a + c - b)$, $BD = \frac{a}{2}$, $TD = \frac{1}{2}|c-b|$ и, значит, $|R_1 - R_2| = \frac{AM \cdot TD}{AH}$. Опустим из точки O перпендикуляр OK на IT. Треугольники AMH и OIK подобны, откуда $OI = \frac{AM \cdot TD}{AH}$; следовательно, $|R_1 - R_2| = OI$.



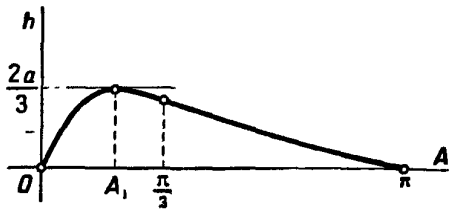
Черт. 307.

116. 1°. Вычисление b и c. Имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Так как $c = 2b$, то $a^2 = 5b^2 - 4b^2 \cos A$, откуда $b = \frac{a}{\sqrt{5 - 4 \cos A}}$, $c = \frac{2a}{\sqrt{5 - 4 \cos A}}$. Так как $1 < \sqrt{5 - 4 \cos A} < 3$, то $|b - c| < a < b + c$. Следовательно, при любом A $(0 < A < 180°)$ существует треугольник, удовлетворяющий условию.

2°. Построение треугольника. Для построения этого треугольника построим на прямой отрезок $BC = a$; построим дугу, вмещающую данный угол A, и окружность, для всех точек A которой $AB = 2AC$. Эта дуга с построенной окружностью пересекаются всегда в одной точке (черт. 307).

3°. Изменение h. $ah = bc \sin A$, откуда $h = \frac{bc \sin A}{a} = 2a \frac{\sin A}{5 - 4 \cos A}$. Угол A изменяется в интервале $(0, \pi)$. Так как $\sin A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}$, $\cos A = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}$, то

$h = 2a\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{5+5\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}-4+4\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = 4a\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+9\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{4}{3}a\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\left(3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2}$. Полагая $3\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\varphi$, получим $h = \frac{4}{3}a\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2}{3}a\sin 2\varphi$. Так как $0 < A < \pi$, то $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$; значит, при изменении A от 0 до π, $3\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, значит, и $\operatorname{tg}\varphi$ изменяется от 0 до $+\infty$. Поэтому можно считать, что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а тогда при $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\sin 2\varphi$ монотонно растет от 0 до 1, а при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ монотонно убывает от 1 до 0. Если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $3\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$, $\cos A = \frac{4}{5}$; значит, при $0 < A \leqslant \arccos\frac{4}{5}$ h возрастает от 0 до $\frac{2}{3}a$, а при $\arccos\frac{4}{5} \leqslant A < \frac{\pi}{2}$ h убывает от $\frac{2a}{3}$ до 0. Замечание. Из черт. 307 ясно, что если угол A изменяется от 0 до π, то h сначала возрастает от 0 до радиуса окружности (Γ) $\left(\text{он равен } \frac{2a}{3}\right)$, а затем убывает от $\frac{2a}{3}$ до 0.



Черт. 308.

4°. **Определение A, если задано h.** Если задано h, то угол A находится из условия $9h\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} - 4a\operatorname{tg}\frac{A}{2} + h = 0$; корни этого уравнения относительно $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ должны быть действительны и положительны, что будет тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен: $4a^2 - 9h^2 \geqslant 0$, $h \leqslant \frac{2a}{3}$.

5°. **Геометрическое место середины AB и середины биссектрисы угла A.** Выше мы видели, что если A возрастает от 0 до π, то точка A описывает полуокружность окружности (Γ), расположенную над прямой BC. Для заданного положения точки A середина AB получается из A при помощи гомотетии $\left(B, \frac{1}{2}\right)$. Значит, геометрическое место точки M есть полуокружность, получеиная в результате гомотетии полуокружности (Γ), расположенной над BC; эта полуокружность также расположена над BC с центром D и радиусом DC. Аналогично находится геометрическое место середин AD.

117. 1°. Число условий, определяющих равнобочную трапецию, площадь которой равна 1 $м^2$. Чтобы определить трапецию вообще, нужно задать четыре стороны. Так как трапеция равнобочная и так как задана ее площадь, то два условия уже заданы и остается задать еще два условия, иапример: 1) β и β' $\left(\text{тогда находим } x = \frac{\beta+\beta'}{2} \text{ и } h \text{ из равенства } xh = 1\right)$;

2) β и h;
3) β' и h;
4) p и x;
5) β и θ;
6) β' и θ

и т. д.

2°. **Вычисление p в функции θ и x:**

$$p = \frac{1}{x}\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta} + x = \frac{1}{x}\sqrt{3}\,\frac{1+\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)} + x;$$

полагая $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\varphi$, находим $p = \frac{1}{x}\sqrt{3}\,\frac{1}{\sin 2\varphi} + x$ и, значит, $p_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{x} + x$.

3°. **Определение трапеции, для которой p минимально.**

$$p_{\min}=\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt[4]{3},$$

значит, $(p_{\min})_{\min}=2\sqrt[4]{3}$ при $x=\sqrt[4]{3}$; при этом $AB=BC=\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$. Итак, в трапеции $ABCD$ имеем $AB=BC=CD$.

118. Указание: $a=\frac{2pr}{h}$. Далее, $b+c=2p-a=2p\frac{h-r}{h}$. Из формулы же $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ находим $bc=r^2\frac{h}{h-2r}+p^2\frac{h-2r}{h}$. Стороны b и c — корни соответствующего квадратного уравнения; эти корни $p\frac{h-r}{h}\pm r\sqrt{\frac{p^2}{h^2}-\frac{h}{h-2r}}$ — они и будут (если задача разрешима) значениями b и c. Углы находим из соотношений $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

2°. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$; отсюда $2pr=(p-r)h$.

3°. Необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий: а) $\frac{p^2}{h^2}-\frac{h}{h-2r}\geqslant 0$; б) найденные выше значения для b и c положительны; в) $b-c<a<b+c$ (где $b\geqslant c$).

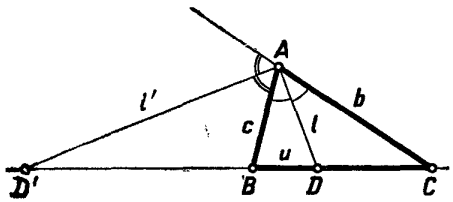
Условие а) при $p=6$ и $h=3$ дает или $r\leqslant\frac{9}{8}$, или $r\geqslant\frac{3}{2}$. Условие б) будет выполнено, если $b+c>0$, $bc>0$, отсюда $r<\frac{3}{2}$; но это условие будет выполнено, если $r\leqslant\frac{9}{8}$, т. е. уже при выполнении условия а). Условие $a<b+c$ дает $r<\frac{3}{2}$, что следует из $r\leqslant\frac{9}{8}$. Условие $a>|b-c|$ имеет вид $\frac{2pr}{h}>2r\sqrt{\frac{p^2}{h^2}-\frac{h}{h-2r}}$, или $\frac{p^2}{h^2}>\frac{p^2}{h^2}-\frac{h}{h-2r}$, т. е. $\frac{h}{h-2r}>0$, $h-2r>0$, $r<\frac{3}{2}$, что опять выполняется при $r\leqslant\frac{9}{8}$; итак, $r\leqslant\frac{9}{8}$.

4°. Если $p=6$, $h=3$, $r=1$, то $a=4$, $b=5$, $c=3$, $\hat{B}=90°$, $A=\operatorname{arc tg}\frac{4}{3}$, $C=\operatorname{arc tg}\frac{3}{4}$.

119. 1°. Будем считать, что $\hat{B}\geqslant\hat{C}$. При этом условии угол u — это угол ADB (черт. 309):

$$a=\frac{l\sin u\sin A}{\sin\left(u-\frac{A}{2}\right)\sin\left(u+\frac{A}{2}\right)},\quad b=\frac{l\sin u}{\sin\left(u-\frac{A}{2}\right)},\quad c=\frac{l\sin u}{\sin\left(u+\frac{A}{2}\right)}.$$

Для построения треугольника строим сначала прямоугольный треугольник DAD' с заданными катетами l и l'. Затем строим лучи AB и AC такие, что $\angle BAD=\angle DAC=\frac{A}{2}$. Условие возможности: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}<\operatorname{tg}u$ или $\operatorname{tg}\frac{A}{2}<\frac{l'}{l}$.



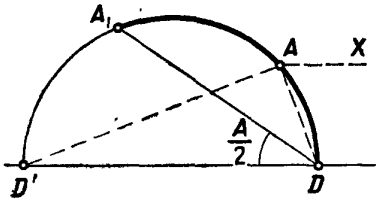
Черт. 309.

2°. Угол $DAD'=90°$ (черт. 310); значит, точка A расположена на полуокружности с диаметром DD' (мы предполагаем, что вершина A лежит над прямой DD'). Однако точка A не может занимать любое положение на этой полуокружности. В самом деле, точки B и C гармонически сопряжены относительно пары точек D и D' (черт. 311), и точка D (конец внутренней биссектрисы) должна быть между ними; значит, точка C должна быть расположена на продолжении отрезка $D'D$ за точку D. Пусть AX — луч, исходящий из A, параллельный $D'D$ и идущий

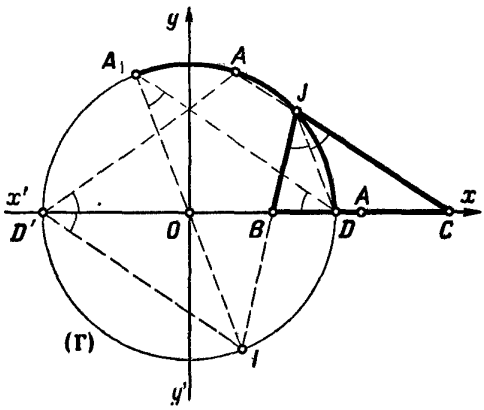
в направлении луча $D'D$, тогда $DAX > \frac{A}{2}$, т. е. $D'DA > \frac{A}{2}$; значит, точка A может занимать на указанной выше полуокружности лишь те положения, которые отделены на этой полуокружности лучом DA_1, таким, что $\angle D'DA_1 = \frac{A}{2}$

Точки, через которые проходят AB и AC. Пусть I и J — вторые точки пересечения прямых AB и AC с окружностью (Γ), построенной на DD' как на диаметре. Соединим их с точкой D'; имеем: $(D'D, D'I) = (AD, AI) = (AD, AB) = -\frac{A}{2}$, $(D'D, D'J) = (AD, AJ) = (AD, AC) = \frac{A}{2}$; значит, точки I и J расположены симметрично по отношению к $D'D$. Ясно также, что $D'I$ и $D'J$ симметричны DA_1 относительно точки O и по отношению к медиатрисе $y'y$ отрезка DD'. Иначе говоря, точка I симметрична с точкой A_1 относительно O, а точка J симметрична с точкой A_1 относительно $y'y$. В то время как точка A описывает свое геометрическое место от D к A_1, точка B идет из D влево до точки O, а точка C от D идет вправо — в бесконечность — она описывает полупрямую Dx.

Построение треугольника ABC. а) **Дана середина A' стороны BC.** В то время как точка A описывает дугу DA_1, середина A' отрезка BC описывает полупрямую Dx. Таким образом, задача имеет решение лишь в том случае



Черт. 310.



Черт. 311.

когда точка A' расположена на полупрямой Dx. Если это условие выполнено, то точки B и C суть точки, в которых прямая DD' пересекает окружность, ортогональную окружности (Γ) с центром A', радиус которой равен отрезку касательной, проведенной из точки A' к окружности (Γ). б) **Дана точка P, из которой отрезок BC виден под прямым углом.** Окружность с диаметром BC, который ортогонален окружности (Γ), должна пройти через точку P. В то время как точка A описывает дугу DA_1 окружности (Γ), окружность с диаметром BC (эта окружность принадлежит пучку окружностей, для которого точки D и D' — предельные) изменяется так, что она пройдет через все точки плоскости, расположенные справа от прямой $y'y$. Итак, точка P должна быть расположена справа от прямой $y'y$. Если это условие выполнено, существует только одна окружность, проходящая через точку P ортогонально (Γ), центр которой расположен на прямой $x'x$. Эта окружность проходит через точку P' — четвертую гармоническую к точке P относительно точек, в которых прямая OP пересекает окружность (Γ); ее центр — A' — точка, в которой медиатриса отрезка PP' пересекает прямую $x'x$. Радиус этой окружности $A'P$, а центр A'.

120. 1°. $l \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$, $m = \frac{\sin B}{\sin A \sin C}$, $a = \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$.

2°.

$$B = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\arccos\left(\frac{2}{l}\sin A - \cos A\right) - A\right],$$

$$C = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\arccos\left(\frac{2}{l}\sin A - \cos A\right) + A\right]$$

(считаем $B \geqslant C$). Условие возможности $l \geqslant 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

3°. Для построения треугольника ABC по данным a, l, A строим на отрезке $BC = a$ дугу, вмещающую угол A, и проводим прямую, параллельную BC и отстоящую от BC на расстоянии $h = \frac{a}{l}$. Если эта дуга и прямая пересекаются, то

берем, считая $B > C$, лишь ту точку встречи, которая лежит по одну сторону с точкой B относительно медиатрисы отрезка BC. Линии пересекаются, если $h \leqslant \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ или $l \geqslant 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

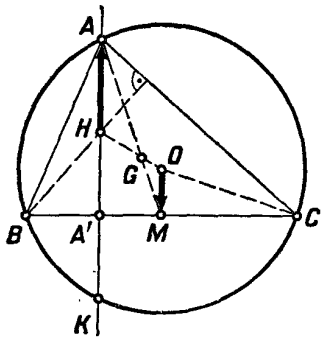
4°. Условие $AB = AC$ будет выполнено, если $h = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ или $l = 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}$. Так как угол C может изменяться от 0 до $90° - \frac{A}{2}$, а угол B — от $180° - A$ до $90° - \frac{A}{2}$, то равенство $BA = BC$ может быть выполнено лишь в случае $A \leqslant 90° - \frac{A}{2}$, откуда $A \leqslant 60°$. Наконец, равенство $AC = BC$ возможно, если $90° - \frac{A}{2} \leqslant A \leqslant 180° - A$, откуда $60° \leqslant A \leqslant 90°$. Далее, если $A > 90°$, то треугольник не может быть прямоугольным; если $A = 90°$, он прямоугольный при любом C, а если $A < 90°$, он будет прямоугольным и угол B будет прямой ($B \geqslant C$) при условии, что $l = \operatorname{tg} A$.

122. 1°. **Гомотетия, в которой вектор $\overrightarrow{HA}$ переходит в вектор $\overrightarrow{OM}$.** Точка O есть ортоцентр треугольника, вершинами которого служат середины M, N и P сторон треугольника ABC. Гомотетия, в которой вектор $\overrightarrow{HA}$ переходит в $\overrightarrow{OM}$, есть, следовательно, гомотетия, переводящая треугольник ABC в треугольник MNP; это, следовательно, гомотетия $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC (черт. 312).

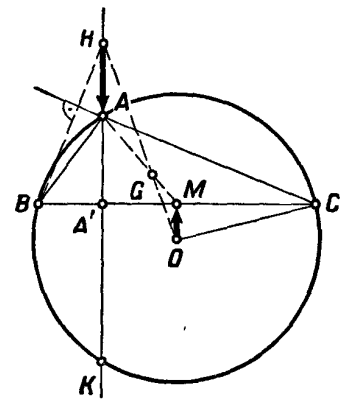
2°. **Вычисление h и d в функции R и углов треугольника ABC.** Обозначая через b и c длины сторон AC и AB треугольника ABC, имеем (классическое соотношение) $bc = 2R \cdot AA'$ или $2R \sin B \cdot 2R \sin C = 2RAA'$, откуда $AA' = 2R \sin B \sin C$ и, так как $\overline{AA'} = AA'$, то

$$h = 2R \sin B \sin C. \tag{1}$$

С другой стороны, в силу гомотетии, указанной в 1°, имеем $AH = 2OM = 2R \cos \widehat{MOC}$. Угол $\widehat{MOC}$ равен A или $\pi - A$ в зависимости от того, будет ли A острым углом или тупым. В обоих случаях $\cos \widehat{MOC} = |\cos A|$, значит, $AH = 2R|\cos A|$. Это равенство показывает, что $\overline{AH}$ и $2R \cos A$ имеют одну и ту же



Черт. 312.



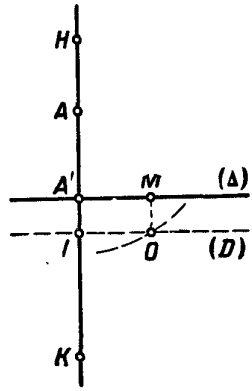
Черт. 313.

абсолютную величину. Из черт. 312 и 313 следует, что $\overline{AH}$ и $\cos A$ положительны, если A — острый угол, и $\overline{AH}$ и $\cos A$ отрицательны, если A — тупой угол; значит,

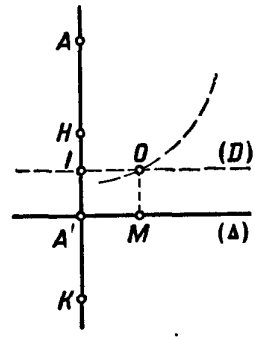
$$d = \overline{AH} = 2R \cos A. \tag{2}$$

3°. **Вычисление углов A, B, C, если даны h, d и R.** Из (1) и (2) имеем: $2 \sin B \sin C = \frac{h}{R}$, $\cos(B + C) = -\frac{d}{2R}$, отсюда $\cos(B - C) = \frac{2h - d}{2R}$. Если $-\frac{d}{2R}$ и $\frac{2h - d}{2R}$ заключены между -1 и $+1$, существуют два угла α и β, заключенные между 0 и π, такие, что $\cos \alpha = -\frac{d}{2R}$ и $\cos \beta = \frac{2h - d}{2R}$; предполагая $B \geqslant C$ (это

не нарушает общности решения), будем иметь $B=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $C=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Найденным значениям B и C соответствует треугольник, удовлетворяющий условию, ибо углы B и C будут положительны (и их сумма меньше π). Угол B, очевидно, положителен. Угол α положителен, ибо $\alpha>\beta$, так как $\cos\beta=\frac{2h-d}{2R}>\cos\alpha=-\frac{d}{2R}$. Итак, треугольник существует, если только $-1<-\frac{d}{2R}<1$ и $-1<\frac{2h-d}{2R}<1$; эти неравенства эквивалентны следующим: $-1<-\frac{d}{2R}$ и $\frac{2h-d}{2R}<1$, или $d<2R$ и $d>2h-2R$, или $2(h-R)<d<2R$.



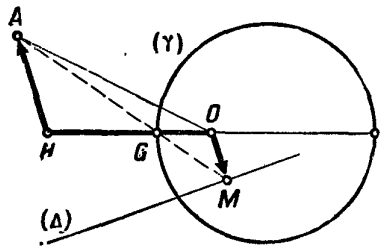
Черт. 314.



Черт. 315.

4°. **Построение треугольника, если даны h, d и R.** Зная h и d, можно построить точки A, A' и H и провести прямую (Δ), перпендикулярную в точке A' к прямой AA', на которой лежит сторона BC (черт. 314 и 315). Пусть K — точка, симметричная H относительно (Δ). Точки A и K лежат на окружности, описанной вокруг искомого треугольника; значит, центр O этой окружности лежит на медиатрисе (D) отрезка AK; с другой стороны, точка O лежит на окружности с центром A радиуса R. Таким образом, построена точка O. Построив окружность с центром O и радиусом R, найдем в пересечении ее с (Δ) точки B и C. Для того чтобы решение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы окружность с центром A радиуса R пересекала (D), и окружность с центром O радиуса R пересекала (Δ). Пусть I — середина AK. Сформулированные условия запишутся так: $AI<R$ и $IA'<R$. Но (черт. 314 и 315) $\overline{A'I}=\overline{MO}=-\frac{1}{2}\overline{AH}=-\frac{d}{2}$ и $\overline{AI}=\overline{AA'}+\overline{A'I}=h-\frac{d}{2}$; значит, $\left|h-\frac{d}{2}\right|<R$ и $\left|-\frac{d}{2}\right|<R$, или $-R<h-\frac{d}{2}<R$ и $-R<-\frac{d}{2}<R$ — то же, что и выше.

5°. **Построение треугольника ABC, если известны точки O, H и A.** Если известны точки O и H, то можно построить центр тяжести G искомого треугольника и вектор $\overrightarrow{OM}$, полученный из $\overrightarrow{HA}$ в результате гомотетии $\left(G,-\frac{1}{2}\right)$. Точка M — середина стороны BC известна; проведем через точку M прямую, перпендикулярную к прямой OM; на этой прямой должна лежать сторона BC. Окружность (Γ) с центром O и радиусом OA пересечет эту прямую в искомых вершинах B и C (черт. 316). Условие возможности решения задачи состоит в том, чтобы окружность (Γ) пересекала прямую (Δ), т. е. $OM<OA$ или $\frac{1}{2}AH<AO$ или $\frac{AH}{AO}<2$. Для того чтобы это условие было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы точка A лежала вне окружности (γ), являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых отношение расстояний от двух фиксированных точек H и O равно 2 (эта окружность, между прочим, проходит через точку G).



Черт. 316.

123. 1°. Поляра точки I. Расположение I_b и I_c относительно (DD'). Величина $i_b i_c$. Стороны и биссектрисы угла B образуют гармонический пучок; этот пучок биссектрисой внутреннего угла A пересекается в точках A, D, I, I_a; значит, эти четыре точки образуют также гармоническую четверку. Угол DAD' прямой; значит, окружность (Ω), построенная на DD' как на диаметре, пройдет через точку A. Точки I и I_a, по доказанному, сопряжены относительно этой окружности; значит, поляра любой из этих точек проходит через другую. Точки A, D', I_b, I_c являются точками пересечения четырех указанных прямых, образующих

гармоническую четверку с биссектрисой внешнего угла A. Значит, эти точки также образуют гармоническую четверку, и, значит, точки I_b и I_c также полярно сопряжены относительно окружности (Ω). Точки i_b и i_c суть точки прикосновения с прямой BC окружностей, вневписанных в углы B и C треугольника ABC. Значит, $Bi_b = p$ и $Bi_c = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC; отсюда $i_b i_c = b + c$; наконец, $\angle AD'D = \angle HAD$ (углы с перпендикулярными сторонами). Обозначим через A' точку, симметричную точке A относительно EE'; тогда $\angle HAD = \angle AEE' = \frac{1}{2}\angle AEA' = \frac{1}{2}\angle ABA' = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle A'BC) = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) = \frac{B-C}{2}$. Итак, $\angle AD'D = \frac{B-C}{2}$.

2°. **Построение треугольника ABC, если даны $B - C = 2\alpha$, $AH = h_a$ и $b + c = 2l$.** Если известен угол $AD'H (= \alpha)$ и длина $AH (= h_a)$, то можно построить прямоугольный треугольник AHD'. Построим затем середину N отрезка $D'H$. Расстояние между точками i_b и i_c известно:

$$i_b i_c = b + c = 2l, \tag{1}$$

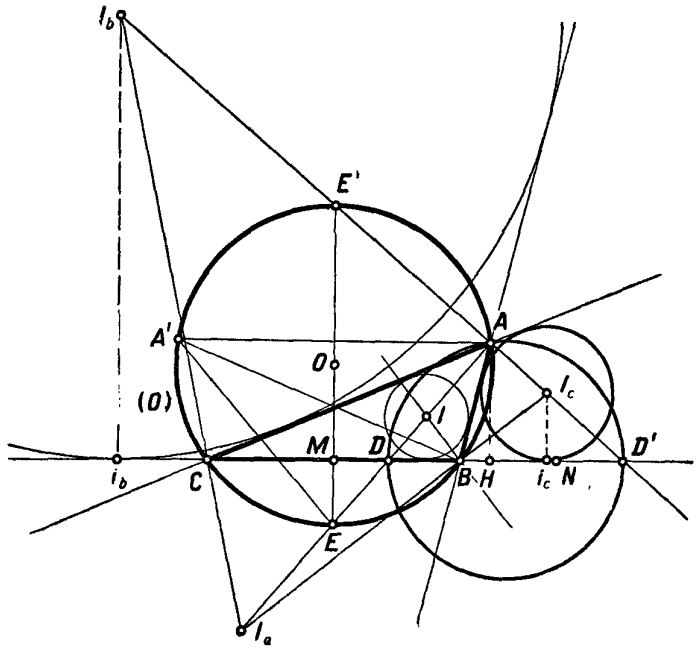
а так как четыре точки D', A, I_c, I_b образуют гармоническую четверку, то и четыре точки D', H, i_c, i_b образуют гармоническую четверку; следовательно,

$$\overline{Ni_c} \cdot \overline{Ni_b} = \overline{NH}^2; \tag{2}$$

кроме того,

$$Ni_b - Ni_c = 2l. \tag{3}$$

Из системы (2) и (3) можно найти или геометрически построить отрезки Ni_b и Ni_c (черт. 317). Зная Ni_b и Ni_c, можно построить на прямой $D'H$ точки i_b и i_c,



Черт. 317.

а затем построить и середину M отрезка BC, так как середина отрезка BC совпадает с серединой отрезка $i_b i_c$. Проведем, далее, через точку M прямую, перпендикулярную $D'H$, и пусть она пересекает $D'A$ в точке E', а прямую $AD \perp AD'$ в точке E. Строим окружность на отрезке EE' как на диаметре. Точки пересечения этой окружности с прямой $D'H$ и будут искомые вершины B и C треугольника ABC. Условие возможности решения состоит в том, что окружность, построенная на EE' как на диаметре, пересекает прямую $D'H$, а это будет тогда и только тогда, когда

точка E' лежит над прямой $D'H$, а точка E — под этой прямой; иначе, если точка D лежит правее M, т. е.

$$NM > ND. \tag{4}$$

Из черт. 317 находим $NM = N\omega$ *, $\overline{N\omega}^2 = \overline{NH}^2 + \overline{H\omega}^2 = \overline{NH}^2 + l^2$ и условие (4) можно записать так: $\overline{NM}^2 > \overline{ND}^2$, или $\overline{NH}^2 + l^2 > (\overline{NH} + \overline{HD})^2$, $\overline{NH}^2 + l^2 > \overline{NH}^2 + 2\overline{NH}\cdot\overline{HD} + \overline{HD}^2$, или, заменяя $2\overline{NH}$ на $\overline{D'H}$, $l^2 > \overline{D'H}\cdot\overline{HD} + \overline{HD}^2$, или $l^2 > h_a^2 + (h_a \operatorname{tg}\alpha)^2$, отсюда $l > \dfrac{h_a}{\cos\alpha}$.

3°. Выражения для $b + c$ и h_a в функции R и углов треугольника:

$$b + c = 2R(\sin B + \sin C), \tag{5}$$

$$h_a = 2R \sin B - \sin C. \tag{6}$$

Вычисление углов треугольника ABC по данным п. 2°. Перепишем соотношения (5) и (6) так:

$$b + c = 4R \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}, \quad h_a = R[\cos(B-C) - \cos(B+C)],$$

или

$$l = 2R\cos\frac{A}{2}\cos\alpha, \quad h_a = R(\cos 2\alpha + \cos A).$$

Полагая $\cos\dfrac{A}{2} = x$ и исключая R, получим

$$f(x) = lx^2 - h_a x\cos\alpha - l\sin^2\alpha = 0. \tag{7}$$

Это уравнение определяет $\cos\dfrac{A}{2}$, откуда $\dfrac{A}{2}$, следовательно и A. Углы B и C будут определены тогда из соотношений $\dfrac{B+C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$ и $\dfrac{B-C}{2} = \alpha$, откуда $B = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2} + \alpha$, $C = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2} - \alpha$.

Исследование. Для того чтобы корень уравнения (7) давал решение задачи, необходимо и достаточно: 1°, чтобы он был заключен между 0 и 1; 2°, чтобы полученные значения для B и C были положительны. Значение B положительно. Для того чтобы и значение C было положительным, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2} > \alpha$, или $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right) > \sin\alpha$, или $\cos\dfrac{A}{2} > \sin\alpha$, т. е. $x > \sin\alpha$. Итак, задача имеет решение, если уравнение (7) имеет корень, заключенный между $\sin\alpha$ и 1. Корни уравнения (7), очевидно, всегда действительны. Далее, $f(\sin\alpha) = -h_a\sin\alpha\cos\alpha < 0$, $f(1) = \cos\alpha(l\cos\alpha - h_a)$ — это выражение положительно, если $h_a < l\cos\alpha$. Наименьший из корней уравнения (7) всегда меньше $\sin\alpha$ и потому должен быть отброшен. Больший будет больше, чем $\sin\alpha$, и меньше 1, если только $h_a < l\cos\alpha$ или $l > \dfrac{h_a}{\cos\alpha}$. Мы приходим снова к результатам исследования, полученным выше геометрическим путем.

124. 1°. Пусть точки A, B и C — ортогональные проекции на OX, OY и OZ точки M. Полагая $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$, $(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OM}) = \beta$, $(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}) = \gamma$, будем иметь $x = OM\cos\alpha$, $y = OM\cos\beta$, $z = OM\cos\gamma$. Применяя теорему Шаля (к углам), находим $\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = \sin[(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OZ})] = \sin(\beta - \gamma) = \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta$; заменяя $\cos\gamma$ и $\cos\beta$ их выражениями из предыдущих соотношений, получим $\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = \dfrac{1}{OM}(z\sin\beta - y\sin\gamma)$, откуда $x\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = \dfrac{x}{OM}(z\sin\beta - y\sin\gamma)$. Аналогичным путем можно получить еще два соотношения, которые получаются из этих круговой перестановкой букв (X, Y, Z), (x, y, z) и (α, β, γ): $y\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX}) = \dfrac{y}{OM}(x\sin\gamma - z\sin\alpha)$, $z\sin(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = \dfrac{z}{OM}(y\sin\alpha - x\sin\beta)$. Складывая, получим

$$x\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) + y\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX}) + z\sin(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = 0. \tag{1}$$

* Надо построить окружность (ω) радиуса l с центром ω, лежащим на NA, касающуюся DH в точке H. Если тогда соединить N с ω и обозначить точки пересечения окружности (ω) с $N\omega$ через i'_c и i'_b, то $Ni'_c \cdot Ni'_b = NH^2$ и $Ni'_b - Ni'_c = 2l$; отсюда $NM = N\omega$.

Доказано, что соотношение (1) есть необходимое условие того, что точки A, B и C являются ортогональными проекциями на OX, OY и OZ некоторой точки M. Для того чтобы доказать, что условие, выраженное равенством (1), и достаточно, предположим, что точки A, B и C, расположенные соответственно на OX, OY и OZ, таковы, что соотношение (1) выполнено. Обозначим через C' точку (отличную от 0), в которой OZ пересекает окружность, описанную вокруг треугольника OAB. Перпендикуляры к OX в точке A и к OY в точке B проходят через точку O', диаметрально противоположную точке O на окружности (Γ); значит, точки A и B, а также и C' суть ортогональные проекции точки O' на OX, OY и OZ, а потому, полагая $\overline{OC'}=z'$, на основании необходимого признака будем иметь $x\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})+y\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})+z'\sin(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})=0$. Сравнивая с (1), которое выполнено по предположению, получим $z'=z$, а, значит, точки C и C' совпадают, а потому точки A, B и C являются ортогональными проекциями точки O' на осях OX, OY и OZ.

2°. Для того чтобы три точки A, B и C лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы точки A', B', C', полученные из них в результате инверсии (O, p), лежали на одной окружности, проходящей через точку O. Для этого необходимо и достаточно, чтобы точки A', B', C' были ортогональными проекциями на OX, OY и OZ одной и той же точки или чтобы $x'\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})+y'\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})+z'\sin(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OZ})=0$, где $x'=\overline{OA'}$, $y'=\overline{OB'}$, $z'=\overline{OC'}$; но $x'=\frac{p}{x}$, $y'=\frac{p}{y}$, $z'=\frac{p}{z}$, значит,

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})}{x}+\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{y}+\frac{\sin(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}{z}=0. \qquad (2)$$

Предположим, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке, и пусть OZ — прямая, которая соединяет точку O с общей точкой этих трех прямых. Точки A_1, B_1 и I расположены на одной прямой и соответственно на осях OX, OY, OZ; значит,

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})}{x_1}+\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{y_1}+\frac{\sin(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}{z_1}=0.$$

Аналогично, рассматривая точки A_2, B_2 и I, с одной стороны, и точки A_3, B_3, I — с другой, получим:

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})}{x_2}+\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{y_2}+\frac{\sin(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}{z_1}=0,$$

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})}{x_3}+\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{y_3}+\frac{\sin(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY})}{z_1}=0.$$

Вычитая из второго равенства третье, из третьего — первое, а из первого второе, получим:

$$\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})+\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})=0,$$

$$\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})+\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right)\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})=0,$$

$$\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\sin(\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ})+\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})=0.$$

Умножая обе части первого равенства на $\frac{1}{x_1}$, второго — на $\frac{1}{x_2}$ и третьего — на $\frac{1}{x_3}$ и складывая почленно полученные при этом равенства, будем иметь

$$\left[\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right)+\frac{1}{x_3}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\right]\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})=0.$$

Так как точки A_1, A_2, A_3, по предположению, различны, то точка I не может быть расположена на оси OX; значит, оси $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OZ}$ различны и $\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})\neq 0$, поэтому

$$\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right)+\frac{1}{x_3}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)=0. \qquad (3)$$

Это условие получено как необходимое условие того, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке. Докажем, что оно и достаточно; предположим, что

точки A_1, A_2, A_3 на оси OX и B_1, B_2, B_3 на оси OY выбраны так, что оно выполнено. Обозначим через I точку, в которой пересекаются прямые A_1B_1 и A_2B_2, а через A_3' — точку, в которой IB_3 пересекает OX. Полагая $\overline{OA_3'} = x_3'$, будем иметь

$$\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right)+\frac{1}{x_3'}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)=0;$$

сравнивая это с (3), найдем $x_3 = x_3'$, т. е. точки A_3 и A_3' совпадают. Значит, прямая A_3B_3 также проходит через точку I.

Замечание. Мы доказали, что если прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 проходят через одну точку, то соотношение (3) выполнено. Можно доказать, что соотношение (3) выполнено и в том случае, когда эти прямые параллельны между собой. В самом деле, в этом случае $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $x_3 = \lambda y_3$ и соотношение (3) легко проверить. С другой стороны, при доказательстве достаточности условия (3) мы предполагали, что A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются; предположим теперь, что соотношение (3) выполнено, а A_1B_1 и A_2B_2 параллельны. Обозначая тогда через A_3' точку, в которой прямая, проведенная через B_3 параллельно A_1B_1 и A_1B_2, пересекает ось OX, как и выше, докажем, что A_3 и A_3' совпадают. Окончательно можно сказать, что соотношение (3) есть необходимое и достаточное условие того, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 проходят через одну точку или параллельны между собой.

4°. а) Предположим, что точки A_1, A_2, лежащие на оси OX, и точки B_1 и B_2, лежащие на оси OY, меняются так, что

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{y_3}. \tag{4}$$

Пусть I — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2. Обозначим через OI прямую, ориентированную, например, от O к I. Точки A_1, B_1, I лежат на одной прямой, точки A_2, B_2, I также лежат на одной прямой; значит, полагая $\overline{OI} = z$, будем иметь:

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})}{x_1}+\frac{\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX})}{y_1}+\frac{\sin(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})}{z}=0,$$

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})}{x_2}+\frac{\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX})}{y_2}+\frac{\sin(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})}{z}=0,$$

откуда (вычитая)

$$\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})+\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX})=0. \tag{5}$$

Из (4) $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=-\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)$. Обе части этого равенства отличны от нуля, так как мы предполагаем, что точки A_1 и A_2 различны так же, как и точки B_1 и B_2. В таком случае из (5) следует $\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) - \sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX}) = 0$, $\sin(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = \sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX})$; значит, $(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX}) \pmod{2\pi}$, или $(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = \pi - (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX}) \pmod{2\pi}$. Второе равенство не может иметь места, так как в случае если оно выполнено, применяя теорему Шаля, мы получим $(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX}) = \pi \pmod{2\pi}$, т. е. оси OX и OY лежат на одной прямой, а мы предполагаем, что это не имеет места. Значит, остается $(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX})$, т. е. ось $O\overrightarrow{Z}$ есть биссектриса угла, образованного полупрямыми $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$. Таким образом, прямая OZ есть прямая, на которой лежит эта биссектриса; она фиксирована, и точка I постоянно лежит на этой прямой (Δ). Точка I есть точка пересечения переменной прямой A_1B_1 с прямой (Δ). Пусть точка A_1 фиксирована, а B_1 произвольно изменяется на оси OY (это возможно, ибо x_1 и y_1 связаны лишь одним соотношением (4), куда входят четыре количества x_1, y_1, x_2, y_2, из которых лишь x_1 мы считаем фиксированным, а y_1 — произвольным). Тогда прямая A_1B_1 будет занимать вокруг точки A_1 всевозможные направления и, значит, точка I опишет целиком всю прямую (Δ); прямая (Δ) и есть геометрическое место точек I. б) Предположим теперь, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{y_2}\right)=\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{y_1}\right).$$

Заметим, что это соотношение есть то же соотношение (3), в котором $x_3 = y_3 = 1$. Оно выражает необходимое и достаточное условие того, что прямые A_1B_1, A_2B_2,

A_3B_3, где $\overline{OA_3} = \overline{OB_3} = 1$, пересекаются в одной точке, лежащей на фиксированной прямой A_3B_3; точка I пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 описывает прямую A_3B_3 в целом.

5°. $MA \sin(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + MB \sin(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + MC \sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ или $-MA \sin A + MB \sin B + MC \sin C = 0$, откуда $2MA \sin \frac{A}{2} = MB + MC$. Если $\angle BAC = 90°$ (и $BA = AC$), то $MA\sqrt{2} = MB + MC$. Если $\triangle ABC$ равносторонний, то $MA = MB + MC$.

6°. $DA \sin(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) + DB \sin(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + DC \sin(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 0$. Но $\sin(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \frac{BC}{2R}$, $\sin(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = -\frac{AC}{2R}$, $\sin(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{AB}{2R}$; значит, $DA \cdot BC - DB \cdot CA + DC \cdot AB = 0$. Это равенство выражает теорему Птоломея.

7°. $AB \sin(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + AD' \sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + AC \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'}) = 0$ или $c \sin\frac{A}{2} - \lambda_a \sin A + b \sin\frac{A}{2}$, откуда $2\lambda_a \cos\frac{A}{2} = b + c$. Соотношение (1) дает $\frac{\sin(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})}{AB} + \frac{\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{AD} + \frac{\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}{AC} = 0$, $\frac{\sin\frac{A}{2}}{c} - \frac{\sin A}{l_a} + \frac{\sin\frac{A}{2}}{b} = 0$, или $\frac{2\cos\frac{A}{2}}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Делением находим $l_a\lambda_a = bc$.

Замечание. Поступая аналогично по отношению к биссектрисе внешнего угла A, обозначая точки пересечения этой биссектрисы с BC и окружностью, описанной вокруг треугольника ABC, через E и E' и полагая $AE = l'_a$ и $AE' = \lambda'_a$, получим: $2\lambda'_a \sin\frac{A}{2} = |b - c|$, $\frac{2\sin\frac{A}{2}}{l'_a} = \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$, $l'_a\lambda'_a = bc$.

125. 1°. А. Длины сторон треугольника *AMN*.

Рассмотрим следующие равенства (верные с точностью до $k\pi$, где k — целое число): $(MA, MN) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}) + (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{ON})] = \frac{\theta+\varphi}{2}$, $(NA, NM) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}) + (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})] = \frac{\theta-\varphi}{2}$, $(AM, AN) = \frac{1}{2}(OM, ON) = \varphi$.

Теперь из $\triangle AMN$ имеем $\frac{AM}{\left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right|} = \frac{AN}{\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|} = \frac{MN}{|\sin\varphi|} = 2R$, откуда $AM = 2R\left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right|$, $AN = 2R\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|$, $MN = 2R|\sin\varphi|$.

Соотношение между θ и φ, если сторона *MN* равна полусумме двух других сторон. Соотношение $2MN = AM + AN$ может быть записано теперь так: $2|\sin\varphi| = \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|$. Отсюда или

$$2|\sin\varphi| = \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2} + \sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|, \qquad (1')$$

или

$$2|\sin\varphi| = \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2} - \sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|. \qquad (1'')$$

Соотношение (1′) можно переписать так: $2|\sin\varphi| = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right|$, или $4\sin^2\varphi = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, или $4(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi) = (1-\cos\theta)(1+\cos\varphi)$. Предположим, что $1+\cos\varphi = 0$; в таком случае $MN = 0$ и соотношение (1) не может быть выполнено [это обстоятельство вызвано тем, что если бы мы с самого начала вместо соотношения (1) взяли бы соотношение $2MN = |AM - AN|$, то, повторяя те же выкладки, мы пришли бы снова к соотношениям (1′) и (1″)]. Таким образом, $1+\cos\varphi \neq 0$, и мы имеем $4(1-\cos\varphi) = 1 - \cos\theta$; отсюда

$$4\cos\varphi - \cos\theta = 3. \qquad (2')$$

Аналогично из (1″) получим

$$4\cos\varphi - \cos\theta = -3. \qquad (2'')$$

2°. Каждое из соотношений (2′) или (2″) влечет за собою соотношение (1). Пусть $|\sin u| = 2|\sin v|$. Тогда $\sin^2 u = 4\sin^2 v$, $1 - \cos 2u = 4(1 - \cos 2v)$, $\cos 2u = 4\cos 2v - 3$, $\cos 2u - \cos 2v = 3(\cos 2v - 1)$, откуда $\sin(u+v)\sin(u-v) \leqslant 0$. Аналогично из $|\cos u| = 2|\cos v|$ следует, что $\sin(u+v)\sin(u-v) \leqslant 0$. Предположим теперь, что выполнено соотношение (2′) $4\cos\varphi - \cos\theta = 3$. Тогда $4(1-\cos\varphi) = 1 - \cos\theta$, $4(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi) = (1-\cos\theta)(1+\cos\varphi)$, $4\sin^2\varphi = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \times 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $2|\sin\varphi| = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right|$, $2|\sin\varphi| = \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2} + \sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|$. (3)

Остается показать, что $\sin\frac{\theta+\varphi}{2}$ и $\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$ одного знака, ибо тогда $\left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2} + \sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right| = \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|$. Перепишем для этого соотношение (3) следующим образом: $2\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right| = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right|$; поделив обе части на $\left|2\cos\frac{\varphi}{2}\right|$ (это выражение отлично от нуля, если точки M и N различны), получим $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$, и, значит, $\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) \leqslant 0$. Аналогично доказывается, что из (2″) следует (1).

3°. Условие, которому должна удовлетворять длина отрезка *CH* для того, чтобы имело место соотношение (1). Обозначим через I точку пересечения MN с $X'X$. Проектируя равенство $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IH}$ на $X'X$ и замечая, что алгебраические проекции $\overrightarrow{OI}$ и $\overrightarrow{IH}$ на $X'X$ соответственно равны $R\cos\varphi$ и 0, получим $\overline{CH} = -\frac{R}{4}\cos\theta + R\cos\varphi = \frac{R}{4}(4\cos\varphi - \cos\theta)$. Мы видели (1° и 2°), что для выполнения соотношения (1) необходимо и достаточно, чтобы $4\cos\varphi - \cos\theta$ равнялось или $+3$, или -3; значит, $\overline{CH} = \pm\frac{3}{4}R$, а потому $CH = \frac{3}{4}R$. Отсюда следует, что MN касается окружности с центром C и радиусом $\frac{3}{4}R$. Эта окружность проходит через точку A.

B. 1°. Свойство прямой *AH*. Пусть K — точка, в которой продолжение AH пересекает окружность (O). Эта окружность (O) гомотетична окружности (C) относительно точки A, значит, касательная в точке K к окружности (O) параллельна касательной в точке H к окружности (C), т. е. прямой MN. Отсюда следует, что точка K есть середина дуги MN, а потому AK (или AH) — биссектриса внутреннего угла MAN.

Геометрическое место точек *I*. Точка I есть точка пересечения AH с биссектрисами внутренних углов M и N треугольника AMN. Применяя к треугольникам AMH и ANH свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, будем иметь $\frac{IA}{IH} = \frac{MA}{MH}$ и $\frac{IA}{IH} = \frac{NA}{NH}$, откуда $\frac{IA}{IH} = \frac{MA}{MH} = \frac{NA}{NH} = \frac{MA+NA}{MH+NH} = \frac{AM+AN}{MN}$; отсюда, в силу соотношения (1), $\frac{IA}{HI} = \frac{2MN}{MN} = 2$ и, значит, $\frac{\overline{IA}}{\overline{IH}} = -2$. Теперь находим $\frac{\overline{IA}}{-2} = \frac{\overline{IH}}{1} = \frac{\overline{IH}-\overline{IA}}{1+2} = \frac{\overline{AH}}{3}$; значит, $\frac{\overline{AI}}{\overline{AH}} = \frac{2}{3}$. Точка I получается, следовательно, из точки H гомотетией $\left(A, \frac{2}{3}\right)$; значит, геометрическим местом точек I является окружность, полученная из окружности (C) указанной гомотетией; радиус этой окружности равен $\frac{3R}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{R}{2}$; это окружность, построенная на OA как на диаметре.

Геометрическое место точек *I′*. Точка I' гармонически сопряжена с точкой I относительно точек A и H; значит, $\frac{I'A}{I'H} = 2$, отсюда $\frac{\overline{AI'}}{\overline{AH}} = 2$. Таким образом, геометрическое место точек I' есть окружность, полученная из (C) гомотетией $(A, 2)$. Эта окружность проходит через A и имеет центр в точке, диаметрально противоположной точке A относительно окружности (C).

2°. Гипербола, проходящая через *M* и *N*, имеющая фокус *A* и соответствующую ему директрису *CH*. Расстояния от точек M и N до прямой CH соответственно равны MH и NH. Выше было доказано, что $\frac{MA}{MH}$ и $\frac{NA}{NH}$ равны $\frac{IA}{IH} = 2$.

Значит точки M и N лежат на гиперболе, имеющей фокус A, соответствующую ему директрису CH и эксцентриситет 2. Пусть P — проекция A на CH. Вершины S и S' гиперболы суть точки, которые делят вектор $\overrightarrow{AP}$ в отношениях 2 и -2. Выше мы видели, что точки I и I' делят AH в тех же отношениях и получаются из H гомотетиями $\left(A, \frac{2}{3}\right)$ и $(A, 2)$. И здесь точки S и S' из точки P получаются теми же гомотетиями. Геометрическое место точек P есть окружность, построенная на AC как на диаметре, и, значит, геометрические места точек S и S' есть окружности, полученные из этой окружности указанными гомотетиями. Пусть ω — центр гиперболы. Точка ω — середина SS'. Взяв на прямой $A\omega$ положительное направление от A к ω, будем иметь $\overline{A\omega} = \frac{1}{2}(\overline{AS} + \overline{AS'}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overline{AP} + 2\overline{AP}\right) = \frac{4}{3}\overline{AP}$. Значит, геометрическое место точек ω получается из окружности, построенной на AC как на диаметре (являющейся геометрическим местом точек P), гомотетией $\left(A, \frac{4}{3}\right)$ — это окружность (ω), построенная на AO как на диаметре.

Свойство асимптот. Известно, что если α — острый угол асимптоты гиперболы с ее фокальной осью, то $\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$. В нашем случае $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и, значит, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, асимптоты образуют с осью ωO (не фокальной) острые углы $\frac{\pi}{6}$; они, следовательно, проходят через две фиксированные точки: J и J', которые мы получим, отложив на окружности (ω) от точки O по одну и другую сторону дуги $\frac{\pi}{3}$. Заметим, что точки J и J' являются точками пересечения с (ω) прямой, проходящей через C перпендикулярно OA.

126. $2\left|\sin\frac{(v_2 - v_1)t}{2R}\right|$. **127.** $\cos A = \frac{4bc - b^2 - c^2}{2bc}$. **128.** $\frac{a + b \pm 2\sqrt{ab}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}$. **129.** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\frac{|\sin(A - B)|}{\sin A \sin B}$. **130.** $3 - 4\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta$. **131.** $\pi R^2 - 2R^2 \arccos\frac{d}{2R} + \frac{d}{2}\sqrt{4R^2 - d^2}$. **132.** $\frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha}{2\cos 2\alpha}$. **133.** Периметр $8a\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$; площадь: $2a^2\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$. **134.** Знаменатель $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$. **136.** $\frac{h_b}{2}\left(\sqrt{4R^2\sin^2 A - h_b^2} + h_b\operatorname{ctg} A\right)$. **137.** 3. **138.** $\frac{s}{r} - r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. **139.** $\frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}Q$.

142. $\frac{\sin\alpha}{4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\alpha}$. **143.** $\frac{2m_c^2\sin(A + B)}{2(\sin^2 A + \sin^2 B) - \sin^2(A + B)}$. **144.** Угол при основании $\arccos\frac{m - n}{2n}$. **145.** 135°. Соответствующий многоугольник правильный.

146. $\frac{2}{5}a\left(\sqrt{4 + \sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **147.** $R = d\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$, $r = d\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$. **148.** $\frac{1}{2\sin\alpha}(r\cos\alpha - d)(r - d\cos\alpha + \sqrt{r^2 - d^2}\sin\alpha)$.

149. Если $m > n$, то искомое отношение равно $\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m + n}{m - n}\operatorname{ctg}\varphi\right)}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m + n}{m - n}\operatorname{ctg}\varphi\right)}$.

150. $\frac{R^2}{2}\left(\arccos\frac{a}{R} + \arccos\frac{b}{R}\right) - \frac{a}{2}\sqrt{R^2 - a^2} - \frac{b}{2}\sqrt{R^2 - b^2} - \frac{\pi R^2}{4} + ab$.

151. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 - 2s\operatorname{ctg}\alpha + \frac{2s}{\sin\alpha}} + \sqrt{r^2 - 2s\operatorname{ctg}\alpha - \frac{2s}{\sin\alpha}}\right)$ и $\frac{\sin\alpha}{2}\left(\sqrt{r^2 - 2s\operatorname{ctg}\alpha + \frac{2s}{\sin\alpha}} + \sqrt{r^2 - 2s\operatorname{ctg}\alpha - \frac{2s}{\sin\alpha}}\right)$. **152.** $\arcsin\frac{a}{R}$.

§ 4. Применение тригонометрии к стереометрии

П. 1. Плоскости, прямые, двугранные углы

1. $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha}$. 2. $\arcsin\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. 3. $\dfrac{a\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. 4. $a\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

6. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{1+2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

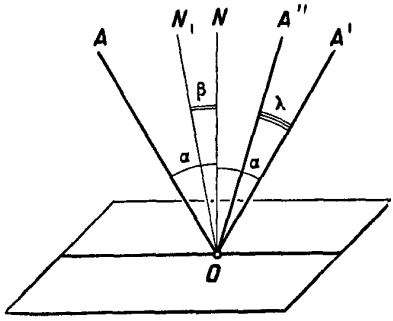
8. $\cos\lambda=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, $\cos\mu=\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$,

$\cos\nu=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. 9. $\operatorname{ctg}\varphi_1=\dfrac{\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$,

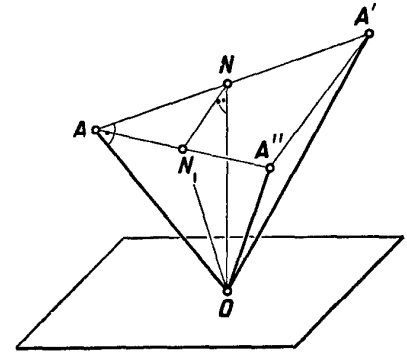
$\operatorname{ctg}\varphi_2=\dfrac{\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\sin\alpha}$. 10. $\sin^2\varphi=\operatorname{cosec}^2\alpha(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-$

$-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)$. 11. 60° или 90°. 14. Или $\sin\varphi=\dfrac{|m-n|}{a}$ или $\sin\varphi=\dfrac{m+n}{a}$.

18. Первый вариант (черт. 318). Если плоские углы трехгранного угла равны α, β, γ, то косинус двугранного угла, противолежащего плоскому углу γ, равен: $\cos x=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$ (эта формула легко выводится). Применяя эту формулу для двугранного угла, равного 90°, между плоскостями NON_1 (ON и



Черт. 318.



Черт. 319.

ON_1 — перпендикулярны к начальному и конечному положениям зеркала) и AON, получим $\cos\angle AON_1=\cos x=\cos\alpha\cos\beta$. Обозначая через ω двугранный угол трехгранного угла $OANN_1$, прилежащий к ребру OA, находим $\cos\omega=\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha\cos x}{\sin\alpha\sin x}$. Точно так же из трехгранного угла $OAA'A''$ (OA' и OA'' — отраженные лучи) находим косинус того же двугранного угла ω, прилежащего к тому же ребру OA: $\cos\omega=\dfrac{\cos\lambda-\cos2\alpha\cos2x}{\sin2\alpha\sin2x}$, где $\lambda=\angle A'OA''$. Из уравнений $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$, $\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha\cos x}{\sin\alpha\sin x}=\dfrac{\cos\lambda-\cos2\alpha\cos2x}{\sin2x\sin2x}$ находим $\cos\lambda=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cos2\beta$.

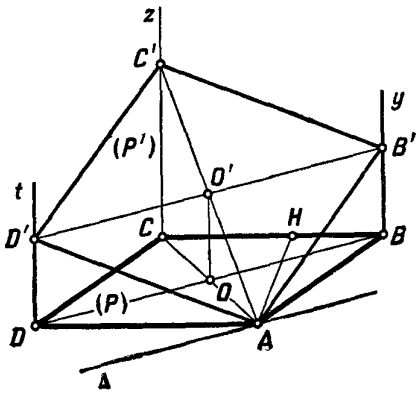
Второй вариант. Проводим $NA\perp AO$ и $NN_1\perp ON$ (черт. 319); треугольники NAO и N_1NO — прямоугольные; значит, $AO=NO\cos\alpha$, $N_1O=\dfrac{NO}{\cos\beta}$; следовательно, $\cos x=\dfrac{AO}{ON_1}=\cos\alpha\cos\beta$ ($\angle N_1AO=90°$, так как $NN_1\perp$ пл. AON_1; следовательно, $NN_1\perp OA$. А так как $OA\perp AN$, то $OA\perp$ пл. ANN_1, следовательно, $OA\perp AN_1$). Теперь изменим построение и будем считать: $AA'\perp ON$, $AA''\perp ON_1$ ($AN=A'N$, $AN_1=A''N_1$), $NN_1\perp AN$ (NN_1 лежит в плоскости, перпендикулярной $AA'O$), $\triangle ANN_1\sim\triangle AA'A''$; следовательно, $AA''\perp AA'$, $AO=a$, $A'O\parallel A''O=a$, $AA'=2a\sin\alpha$, $AA''=2a\sin x$, $A'A''=2a\sqrt{\sin^2x-\sin^2\alpha}$. Теперь из $\triangle OA'A''$ находим $\cos\angle A'OA''=\cos\lambda=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cos2\beta$. 21. $\operatorname{arctg}(\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha)$, $\operatorname{arctg}(\cos\varphi\operatorname{tg}\beta)$, $\pi-\operatorname{arctg}(\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha)-\operatorname{arctg}(\cos\varphi\operatorname{tg}\beta)$ (если α и β — острые углы). 22. $\cos\varphi=\dfrac{b^2}{a^2}\sin\alpha$.

23. 1°. Плоскость (P') проходит через прямую (Δ), которая проходит через точку A параллельно BD (черт. 320); $AB'C'D'$ — ромб; $CC'=2x$, $BB'=\sqrt{a^2+x^2}$, $AC'=\sqrt{a^2+4x^2}$, $B'D'=a\sqrt{3}$, пл. $AB'C'D'=\frac{a}{2}\sqrt{3(a^2+4x^2)}$.

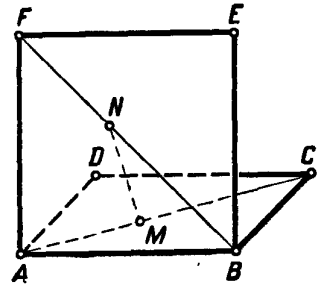
2°. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2x}{a}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+4x^2}}$, $\operatorname{tg}\frac{B'AD'}{2}=\sqrt{3}\cos\varphi$.

3°. а) $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. б) Ромбы подобны, если их диагонали пропорциональны. Так как соотношение $\frac{AC'}{B'D'}=\frac{AC}{BD}$ не может иметь места, то может быть только $\frac{AC'}{B'D'}=\frac{BD}{AC}$, откуда $x=a\sqrt{2}$. 4°. $v=\frac{x}{2}a^2\sqrt{3}$.

24. 1°. ***MN* остается параллельной фиксированной плоскости.** Так как $AM=FN$, мы имеем (черт. 321) $\frac{AM}{AC}=\frac{FN}{FB}$. Отсюда следует, что MN лежит в плоскости, параллельной AF и BC или плоскости FAD. Заметим, что отсюда следует, что $MN\perp AB$.



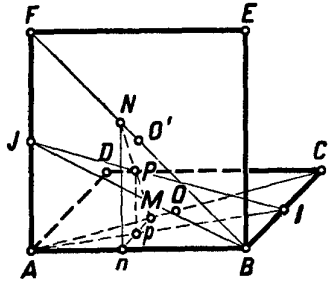
Черт. 320.



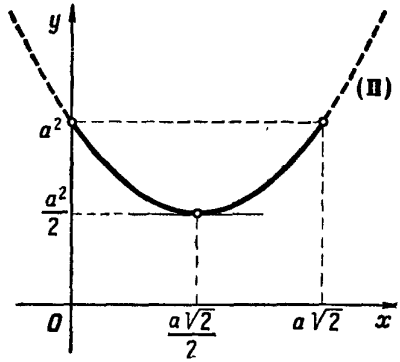
Черт. 321.

Геометрическое место середин *P* отрезка *MN*. Спроектируем MN ортогонально на плоскость $ABCD$ в Mn и пусть p — проекция середины P отрезка MN (черт. 322); Mn остается параллельной BC; значит, середина p отрезка Mn остается на прямой AI, соединяющей A с серединой I отрезка BC. Следовательно, точка p лежит в плоскости FAI. Проектируя ортогонально на плоскость $ABEF$, убедимся в том, что точка P лежит в плоскости CBJ, где J — середина AF. Геометрическое место точек P есть отрезок IJ, соединяющей середины отрезков BC и AF (черт. 322).

2°. **Величина** $\overline{MN}^2$: $y=\overline{MN}^2=x^2-ax\sqrt{2}+a^2$. График этой функции — дуга параболы с вершиной $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a^2}{2}\right)$ и граничными точками $(0, a^2)$ и $(a\sqrt{2}, a^2)$ (черт. 323). **Исследование случая, когда** $MN=l$. Если $l<\frac{a}{\sqrt{2}}$, решений нет;



Черт. 322.



Черт. 323.

если $l=\frac{a}{\sqrt{2}}$, имеется одно решение (MN совпадает с OO'); если $\frac{a}{\sqrt{2}}<l\leqslant a$, имеется два решения (в случае $l=a$ — два крайних случая); при $l>a$ нет решений.

3°. Вычисление α и β при условии, что MN минимально. В этом случае треугольники OAO' и OBO' равносторонние и, значит, $\alpha=\beta=60°$. **Общий случай.** Заметим, что $\overline{MB}^2=\overline{NA}^2=a^2+x^2-ax\sqrt{2}=\overline{MN}^2$; значит, треугольники MNA и MNB равнобедренные с вершинами N и M; значит, $\cos\alpha=\frac{AM}{2MN}=$ $=\frac{x}{2\sqrt{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}}$, $\cos\beta=\frac{BN}{2MN}=\frac{2\sqrt{2}-x}{2\sqrt{x^2-ax\sqrt{2}-a^2}}$; отсюда следует, что $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ одновременно в нуль не обращается. Значит, MN никогда не может быть перпендикулярна AC и FB. Это можно установить и геометрически: $MN\perp AB$; и, значит, если $MN\perp AC$, то MN будет перпендикулярна плоскости $ABCD$ и, значит, не будет перпендикулярна BF.

Значение $\cos 2\alpha$ при $x=\frac{a}{2}$. Если $x=\frac{a}{2}$, то $\cos 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}-29}{34}$.

П. 2. Параллелепипед

1. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$ $(45°<\alpha<135°)$. 2. $\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\alpha$, если $45°<\alpha\leqslant 90°$; $\cos\varphi=$ $=\sqrt{2}\cos(180°-\alpha)$, если $90°\leqslant\alpha<135°$. 3. $\frac{1}{3}l^3\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\varphi}{\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}}$. 4. $2\sqrt{2}d^2\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\cos(45°-\alpha)$. 5. $\cos x=\sin\alpha\sin\beta$. 6. Если $0°<\alpha<60°$, то существует только один параллелепипед, удовлетворяющий условию задачи. В двух противоположных вершинах этого параллелепипеда будут сходиться ребра, каждая пара которых образует угол α. Объем этого параллелепипеда равен $v=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$. Если $60°<\alpha<90°$, то, кроме указанного параллелепипеда, можно построить еще один: в двух противоположных вершинах этого параллелепипеда будут сходиться ребра, каждая пара которых образует угол $180°-\alpha$. Объем этого параллелепипеда равен $v=2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$. 7. $abc\sin\alpha\sin\beta$. 8. $\sqrt{ab(a+b\cos\alpha)(b+a\cos\alpha)}$. 12. Секущая плоскость должна быть параллельна большей диагонали основания и составлять с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 13. $\frac{pq}{a}\sin\alpha$.

П. 3. Призма

2. $a^2b\sin\alpha\sin\beta$. 7. $\frac{4\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}s$. 9. $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

10. $\frac{p^3\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{8\sin^6\left(45°+\frac{\alpha}{4}\right)}$. 12. $\frac{c^2\sqrt{3}(a_1+b_1+c_1)}{4}$.

П. 4. Треугольная пирамида

1. $\frac{1}{6}a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$. 2. $\frac{\sqrt{3}}{4}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. 3. $\frac{1}{3}$. 5. $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}$.

6. $v=\frac{b^3-a^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$. 7. $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\alpha$. 9. $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)}\operatorname{tg}\alpha$.

11. $\frac{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+30°\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-30°\right)\operatorname{ctg}^4\frac{\varphi}{2}}{9\pi\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. 12. $v=\frac{a^3}{12}\sin^2\varphi\operatorname{tg}t$,

$s=\frac{a^2\sin\varphi}{2\cos t}\left(1+\sin\frac{\varphi}{2}\sin t\right)$. 13. $\frac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

14. $\frac{d^3}{3}\operatorname{cosec}\frac{3\alpha}{2}$. 16. $\frac{\pi\sin^2\alpha}{6\sqrt{3}a\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. 17. $\frac{a^2}{2\sqrt{2}\sin\alpha}$.

18. $\frac{l^3}{3}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}$. 19. $\cos\varphi=\pm\frac{c\cdot\cos\beta-b\cos\gamma}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}$,

$d=\frac{bc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}{\sqrt{c^2\sin^2\beta+b^2\sin^2\gamma+2bc(\cos\gamma\cos\beta-\cos\alpha)}}$. 22. $\arccos\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

26. $\frac{abc}{3}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$.

П. 5. Многоугольные пирамиды

1. $\frac{4}{3}l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$. 2. $2h^2\operatorname{ctg}\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. 4. $\frac{a^2\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{3\alpha}{2}}$. 5. $\frac{\pi R\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left(2-\frac{\alpha}{30}\right)$

(α — в градусах). 6. $\frac{a^3\sin 2\alpha\cos\alpha\sin^3\beta}{\sqrt{2}\sin^3(\alpha+\beta)}$. 7. $\arccos\frac{m}{n\sqrt{2}}$, $0<\frac{m}{n}<\sqrt{2}$.

9. $\operatorname{arctg}\frac{n^2-2m^2}{2\sqrt{2}mn}$, если $n\geqslant m\sqrt{2}$; если $n<m\sqrt{2}$, решений нет. 10. $a^2\sin^3\alpha$, $45^\circ<\alpha<90^\circ$.

11. $\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{-\cos\alpha}\right)^2\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-\sqrt{-\cos\alpha}\right)}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sqrt{-\cos\alpha}\right)^2\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{-\cos\alpha}\right)}$. 12. $-\frac{l^2\cos\alpha\sin 2\alpha}{2\sin^2\alpha\cos 3\alpha}$. 13. $\frac{P^2\sin 2\alpha}{3\alpha}$.

14. $-\frac{2}{3}l^3\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}}$. 15. $\frac{4}{3}Q\sin\alpha\sqrt{Q\cos\alpha}$. 18. $\frac{1}{3}Q\sqrt{Q\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

20. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\sqrt{1+k^2}}$; $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{3(1+k^2)}{3+4k^2}}$. 21. $\frac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. 22. $2\operatorname{arctg}m-\frac{\pi}{2}$,

либо $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}m$. 23. $\frac{2\sqrt{s}}{3}(1+\cos\alpha)$. 24. $a^2\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$.

25. $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}{6\left(\operatorname{tg}\varphi\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\psi\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$,

— где φ — двугранный угол, образуемый основанием и плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и меньшую диагональ основания.

26. $\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-3\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(2\sqrt{3}\quad\beta\sin\frac{\alpha}{2}+3\cos\beta\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-3\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)}{6\left(\sqrt{3}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\beta\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-3\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2}$.

27. $a=\sqrt{2c^2\pm\sqrt{4c^4-8p^2}}$, $\cos\varphi=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{p^2}{2c^4}}}$. 28. $\frac{(a+b)^2}{24}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{a(a-2b)}$.

29. $\sin\frac{\theta}{2}=\cos\alpha\sin\frac{\pi}{n}$. 30. $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\pi}{n}$. 31. $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. 32. $\frac{n}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

33. $\frac{\pi R^3}{3\cos\frac{\pi}{n}}$. 34. $\frac{q\sqrt{4b^2-q^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{n}}}{2\left(q+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2-q^2}\right)}$. 35. $\frac{h^3(nd+2\pi)}{3\pi(k^2-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi^2}{2\pi+nd}$.

36. $\frac{nb^3\operatorname{tg}\alpha\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{(r+1)\pi}{n}}{48\sin^3\frac{(r+1)\pi}{n}}$. 37. $v=\frac{1}{24}\frac{na^2b}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\sqrt{1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{2\pi}{n}-}\rightarrow$

$\rightarrow\sqrt{-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\frac{2\pi}{n}}$.

П. 6. Цилиндр

1. $\sqrt{r^2 \sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha}$. 2. $\frac{h}{2\sin\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 3. $\sin x = \frac{\sqrt{ab}}{h}$, $ab \leqslant h^2$. 4. $\frac{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{2}$.
5. $2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2 + 4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$. Предела нет.

П. 7. Конус

1. 60°. 2. $\frac{\alpha^3 l^3\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{24\pi^3}$. 3. $2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$. 4. $2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$. 5. $\frac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. 6. $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi}\operatorname{ctg}\alpha}$, $h = \sqrt[3]{\frac{3v}{h}\operatorname{tg}^2\alpha}$. 7. $\pi s\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 8. $\frac{P\sin\alpha}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P\cos\alpha}{2\pi}}$. 9. $s = \frac{\pi Q}{\sin\alpha}$, $v = \frac{1}{3}\pi Q^{\frac{3}{2}}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$. 10. $\frac{\pi l^3}{12}\sin\alpha(1+2\sin^2\alpha)$. 11. $\cos\alpha = \frac{2n-1\pm\sqrt{4n(n-2)}}{4n+1}$.
14. $\frac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$. 15. $\arcsin\frac{3}{5}$. 16. $2\pi l^2\sin\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15°\right)$. 18. $\arccos\frac{m-n}{p}$.
19. $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{7}}{2}$. 22. $\frac{\pi h^2}{\cos\alpha}$. 26. $\sin\varphi = \sin\alpha\cos\theta$. 27. $\frac{\pi\sqrt{b^2-a^2}(b^2\operatorname{ctg}^2\alpha - a^2\operatorname{ctg}^2\beta)}{24(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}}$.
28. $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$. 29. $\frac{H\sin\beta\sin 2\alpha}{2(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)}$. 31. $\frac{a}{4}\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$, при $0<\beta<90°$ и $0<\alpha\leqslant\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta\right)$. 34. $\frac{r\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$. 35. $n\frac{\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi(1+\cos\alpha)}$.
36. $\frac{v}{4\pi}\frac{(ABCD)^{3/2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}$, где $A = \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$, $B = \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}$, $C = \sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$, $D = -\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$.
37. $n\left(\frac{2l\sin\alpha\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)$. 38. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

П. 8. Сфера в комбинации с многогранниками, цилиндром и конусом

5. 2. 6. $2\arcsin\left(\sqrt{2}-1\right)$. 7. $\frac{\pi R^2(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$. 8. $8l^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 9. $4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.
10. $\frac{\pi l^3\sin^3 2\alpha}{12}$. 11. $\frac{R}{2}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{4}}$. 14. $\frac{n}{\pi}\sec\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$.
15. $\frac{4}{3}R^3\frac{(1+\cos\varphi)^3}{\cos\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha}$. 16. $\frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}$. 18. $\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.
19. $\operatorname{arctg}2$. 24. $\operatorname{ctg}^6\frac{\alpha}{2}-1$. 25. $\frac{2\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos\alpha\sin 2\alpha}$. 27. $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2\sin^3\alpha}{2\sin^3\alpha}$.
28. $\sin x = 3-2\sqrt{2}$. 29. $2\arcsin\frac{5}{6}$ или $2\arcsin\frac{1}{6}$. 30. $v = \frac{2}{3}\pi R^3\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, $s = \frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$. 31. $s = \frac{2\sqrt{3}R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, $v = \frac{2}{\sqrt{3}}R^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 32. a или $\frac{13}{10}a$.
33. $\frac{4\pi}{n}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. 34. $\frac{\sqrt{3}}{2}R^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. 35. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.
36. $2\pi a\cdot\pi r^2$. 37. $s = \frac{\pi H^2\cos^2\beta}{\cos^4\frac{\beta}{2}}$, $v = \frac{\pi H^3\operatorname{ctg}^2\beta}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 39. 120°.

44. $4R\sqrt{\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 45. $\frac{a}{r\sqrt{3}}(2\sqrt{r^2-a^2}+\sqrt{3r^2-4a^2})$.

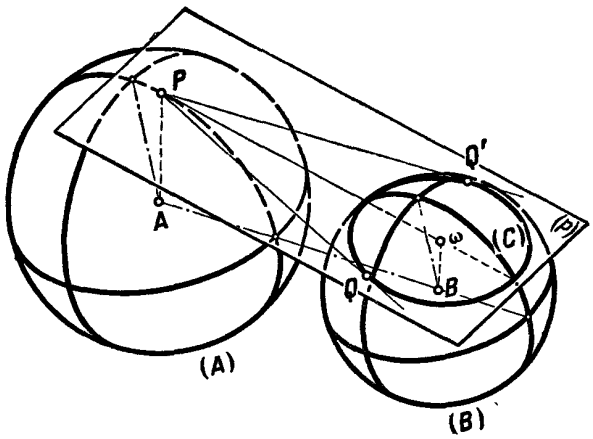
46. $8\pi a^2\cos^3 18^\circ = 5\pi a^2 \operatorname{tg} 54^\circ$. 47. πa^2. 48. $\frac{\pi d^3}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. 49. $\frac{v_1}{v_2}=\frac{1}{2\sin\alpha}$. 50. $\frac{\pi a^3\cos\alpha}{6}$.

53. 1°. I лежит на AC между A и C, причем $IA = r = \frac{bc}{a+c}$.

2°. Отношение нижней части к верхней равно $\frac{a+c}{a-c}=\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$.

3°. Отношение площади (I') к площади треугольника BCB' равно $\frac{\pi(a-c)^2x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\pi\frac{(a-c)^2}{a^2}\frac{\sin u}{\cos^2 u}$.

54. I. **Определение общих касательных к двум неравным сферам. 1°. Общие касательные к сферам (A) и (B), проходящие через точку P сферы (A).** Геометрическое место касательных к сфере (A) в точке P есть плоскость (p), перпендикулярная радиусу AP в точке P. Могут представиться три случая: а) Плоскость (p) пересекает (B) (черт. 324). Пусть (C) — окружность, по которой плоскость (p) пересекает сферу (B). Так как сфера (A) лежит вне сферы (B), точка P лежит вне окружности (C); в таком случае из точки P к окружности (C) можно провести две касательные — это и будут две общие касательные к сферам (A) и (B), проходящие через точку P. Для их построения достаточно построить в касательной плоскости к сфере (A) в точке P окружность на $P\omega$ как на диаметре; точки Q и Q' прикосновения общих касательных PQ и PQ' к сфере (B) будут точками пересечения построенной окружности и окружности (C). б) Плоскость (p) касается сферы (B). Пусть Q — точка касания, тогда PQ будет единственной общей касательной к сферам (A) и (B), проходящей через P. в) Плоскость (p) не пересекает сферы (B). В этом случае нет ни одной общей касательной к сферам (A) и (B), проходящей через точку P.

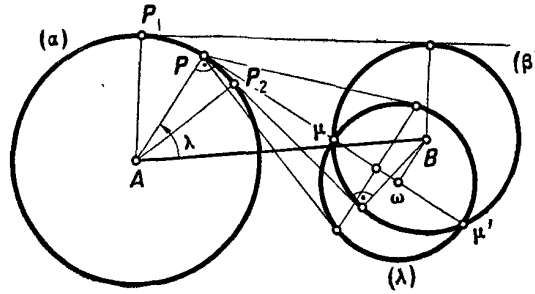


Черт. 324.

2°. Дуга полуокружности (α_1), через точки которой проходит, по крайней мере, одна касательная, общая сферам (A) и (B). Рассмотрим плоскость (v), проходящую через AB и пересекающую (A) и (B) соответственно по большим окружностям (α) и (β). Пусть P — точка полуокружности (α), ограниченная прямой AB. Плоскость, касательная в точке P к сфере (A), пересекает (v) по прямой, касательной к (α) в точке P. К сферам (A) и (B) можно провести две, одну или ни одной общей касательной, проходящей через P, если соответственно указанная касательная пересекает, касается или не пересекает (β). Дуга P_1P_2, для точек которой проходит, по крайней мере, одна общая касательная к сферам (A) и (B), заключена между точкой прикосновения P_1 общей внешней касательной к окружностям (α) и (β) и точкой прикосновения P_2 общей внутренней касательной. Обозначая угол от AB до AP через λ, найдем $\frac{a-b}{2d}\leqslant\cos\lambda\leqslant\frac{a+b}{2d}$.

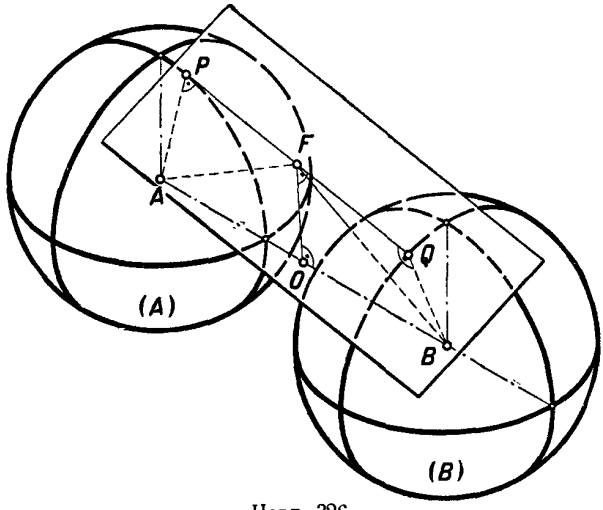
Построение общих касательных, проходящих через P. Если P совпадает с P_1 или P_2, то единственная общая касательная к сферам (A) и (B) есть касательная к (α) в точке P_1 или P_2. Если P лежит на дуге P_1P_2, касательная к (α) в P пересекает (β) в точках μ и μ'. В этом случае плоскость, касательная к сфере (A) в точке P, пересекает сферу (B) по окружности с диаметром $\mu\mu'$; если совместить эту окружность с плоскостью (v) поворотом вокруг $\mu\mu'$, то окружность сечения совместится с окружностью (λ), лежащей в плоскости (v) с диаметром $\mu\mu'$, а касательные к окружности сечения сферы (B) совместятся с касательными, проведенными к окружности (λ) из точки P. Отметим еще, что ортогональные проекции точек Q и Q' прикосновения общих касательных к сферам (A) и (B) на плоскость (v) будет точка пересечения $\mu\mu'$ с хордой, соединяющей точки прикосновения касательных, проведенных из точки P к окружности (λ) (черт. 325).

3°. Геометрическое место точек прикосновения общих касательных к сферам (*A*) и (*B*). Предыдущие рассуждения имеют место для всех плоскостей, проходящих через AB; значит, геометрическое место точек P есть шаровой пояс, полученный вращением дуги P_1P_2 вокруг AB. Этот пояс ограничен окружностями, по которым касаются со сферой (*A*) конусы, описанные вокруг сфер (*A*) и (*B*), вершины которых являются центрами внешнего и внутреннего подобия этих сфер. Эти конусы касаются сферы (*B*) по окружностям, которые ограничивают на сфере (*B*) шаровой пояс, являющийся геометрическим местом точек Q прикосновения к сфере (*B*) общих касательных к сферам (*A*) и (*B*). Высота шарового пояса сферы (*A*) равна $\frac{ab}{d}$, а его площадь $\frac{2\pi a^2 b}{d}$. Высота шарового пояса сферы (*B*) будет также $\frac{ab}{d}$, а его площадь $\frac{2\pi ab^2}{d}$.



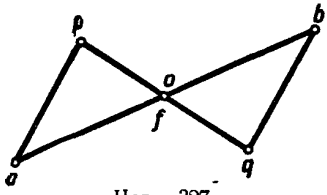
Черт. 325.

II. Случай равных сфер. 1°. Общий перпендикуляр к *AB* и *PQ*. Пусть F — ортогональная проекция середины O отрезка AB на касательную PQ, общую к сферам (*A*) и (*B*). Так как прямые AP, OF и BQ перпендикулярны одной и той же прямой PQ, то

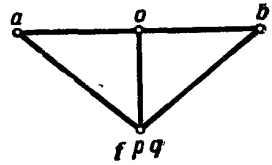


Черт. 326.

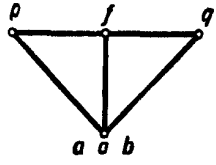
все они параллельны одной и той же плоскости (перпендикулярной PQ); значит, $1 = AO : OB = PF : FQ$, а потому $PF = FQ$, т. е. F — середина отрезка PQ; отсюда следует, что $\triangle APF = \triangle BQF$, так как (черт. 326) $\angle APF = \angle BQF = 90°$, $AP = BQ$ и $PF = FQ$; значит, $FA = FB$, поэтому точка F лежит в плоскости, проходящей



Черт. 327.



Черт. 328.



Черт. 329.

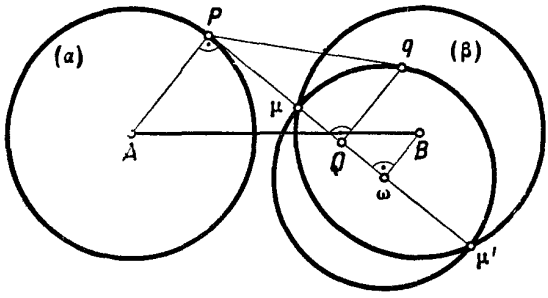
через точку O перпендикулярно отрезку AB. Отсюда и следует, что прямая FO есть общий перпендикуляр к AB и PQ.

Ортогональная проекция *AB*, *PQ*, *AP*, *OF*, *BQ*. Если плоскость проекции параллельна одновременно AB и PQ, то она перпендикулярна их общему перпен-

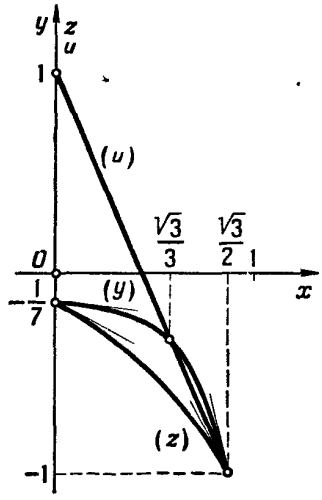
дикуляру OF. Отсюда следует, что проекции o и f точек O и F совпадают (черт. 327). Проекции ab и pq отрезков AB и PQ имеют общую середину o. Значит, проекция указанной конфигурации состоит из двух диагоналей параллелограмма и двух его параллельных сторон ($ap \parallel bq$). Заметим еще, что AB и PQ и угол между ними проектируются в истинную величину. Если плоскость проекции перпендикулярна PQ, три точки p, f, q совпадают (черт. 328). Отрезок OF проектируется в истинную величину of, а отрезок AB проектируется в отрезок ab, перпендикулярный of, причем точка o — середина ab; AP и BQ проектируются в истинную величину. Таким образом, проекция есть равнобедренный треугольник, причем $ap = bq = a$, а высота $h = OF$. Если плоскость проекции перпендикулярна AB, три точки a, o, b совпадают, OF проектируется в истинную величину of; PQ проектируется в отрезок pq с серединой f, причем $of \perp pq$. Проекция есть равнобедренный треугольник, стороны ap и bq равны, а высота $h = OF$ (черт. 329).

2°. **Значения для PQ, OF, y, z и u.** Выполняя построение, аналогичное черт. 329; однако для случая $a = b$ (черт. 330) найдем: $PQ = 2\sqrt{d(d - a\cos\lambda)}$, $OF = \sqrt{a(a - d\cos\alpha)}$, $y = \dfrac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2 - 2ad\cos\lambda}$, $u = 1 - \dfrac{2d\cos\lambda}{a}$, $z = \dfrac{a^2 - d^2 - ad\cos\lambda}{a^2 + d^2 - ad\cos\lambda}$. Если положить $\dfrac{a}{d} = m$, $\cos\lambda = x$, то $u = 1 - \dfrac{2x}{m}$, $y = \dfrac{m^2 - 1}{m^2 + 1 - 2mx}$, $z = \dfrac{m^2 - 1 - mx}{m^2 + 1 - mx}$ (черт. 331, где $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

III. **Случай неравных сфер. 1°. Геометрическое место вершин M равных конусов (M, A) и (M, B).** Пусть α — половина острого угла осевого



Черт. 330.

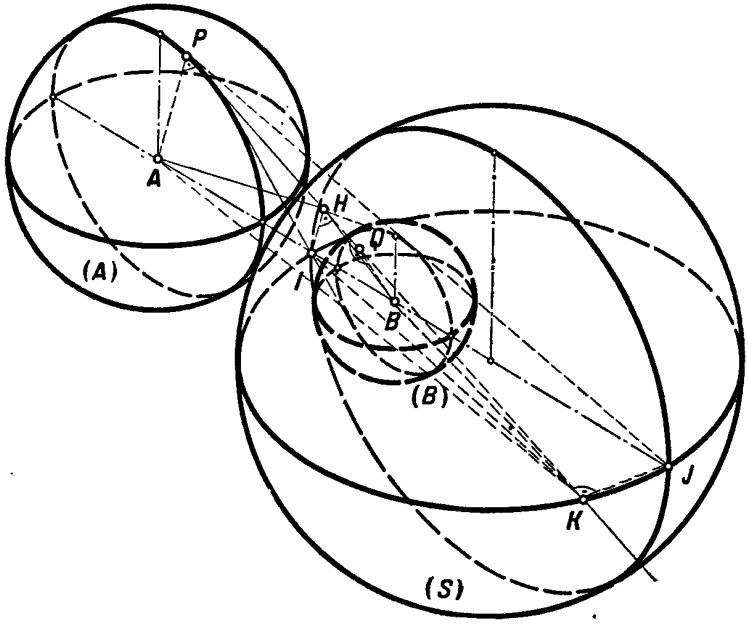


Черт. 331.

сечения конуса (M, A), описанного вокруг сферы (A) с вершиной M; тогда $\sin\alpha = \dfrac{a}{MA}$, аналогично $\sin\beta = \dfrac{b}{MB}$, где β — половина острого угла в осевом сечении конуса с вершиной M, описанного вокруг сферы (B). Так как конусы равны, то $\alpha = \beta$; значит, $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{a}{b}$. Геометрическое место точек M, удовлетворяющих этому условию, есть сфера (S), диаметр IJ которой лежит на прямой AB, причем $-\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \dfrac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = \dfrac{a}{b}$; I — это центр отрицательной гомотетии сфер (A) и (B); J — это центр положительной гомотетии тех же сфер. Так как сфера (B) лежит вне сферы (A) и $a > b$, то точки I и J лежат вне обеих сфер; сфера (S), следовательно, лежит вне сферы (A) и внутри ее лежит сфера (B). Все точки сферы (S) служат поэтому вершинами конусов, описанных вокруг сфер (A) и (B). Таким образом, геометрическое место вершин равных конусов, описанных вокруг сфер (A) и (B), есть вся сфера (S). В частности, если точка M совпадает или с I, или с J, эти конусы совпадают, причем они описаны одновременно вокруг сфер (A) и (B).

Проекции точек I и J на касательные, общие сферам (A) и (B). Пусть (черт. 332) общая касательная к сферам (A) и (B) касается этих сфер соответственно в точках P и Q. Обозначим через H и K ортогональные проекции точек I и J на PQ. Прямые AP, BQ, IH и JK, будучи перпендикулярны одной и той же прямой PQ,

параллельны одной и той же плоскости (перпендикулярной PQ). Значит, $-\frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{KQ}} = \frac{a}{b}$. Рассмотрим треугольники APH и BQH; они подобны, так как $\angle P = \angle Q = 90°$ и $\frac{HP}{HQ} = \frac{AP}{BQ} = \frac{a}{b}$, значит, $\frac{HA}{HB} = \frac{a}{b}$; следовательно, точка H лежит на сфере (S). Аналогично доказывается, что и точка K лежит на сфере (S). **Расположение *HI* относительно треугольника *AHB* и *KJ* относительно треугольника *KAB*.** Так как $\frac{HA}{HB} = \frac{a}{b} = \frac{IA}{IB}$, то HI есть биссектриса внутреннего угла A треугольника HAB; HJ — биссектриса внешнего угла A (ибо $\angle IHJ = 90°$). Аналогично доказывается, что KJ есть биссектриса внешнего угла A треугольника KAB, а KI — биссектриса внутреннего угла A того же треугольника.

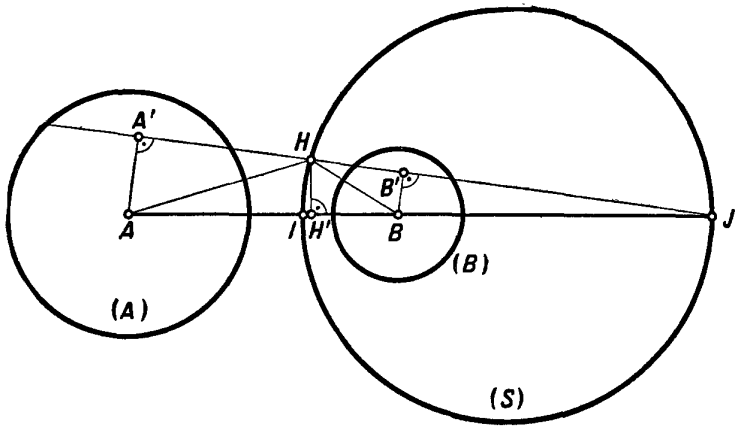


Черт. 332.

Центры гомотетии окружностей сечения сфер (A) и (B) плоскостью, перпендикулярной *IH* и проходящей через *H*. Плоскость, проходящая через точку H и перпендикулярная IH, пересекает плоскость AHB по прямой HJ, перпендикулярной HI. Пусть эта плоскость пересекает сферы (A) и (B) по окружностям (A') и (B'). Так как J есть центр положительной гомотетии для сфер (A) и (B), он будет тем же и для окружностей (A') и (B'). Обозначим через A' и B' центры окружностей (A') и (B'); точки A' и B' суть ортогональные проекции точек A и B на HJ. Так как четверка точек A, B, I, J — гармоническая, то и A', B' H, J — гармоническая четверка, а потому точка H, гармонически сопряженная с точкой J относительно A', B', есть центр отрицательной гомотетии окружностей (A') и (B'). Аналогично доказывается, что плоскость, перпендикулярная JK в точке K, пересекает сферы (A) и (B) по окружностям, для которых K — центр положительной гомотетии, а I — центр отрицательной гомотетии.

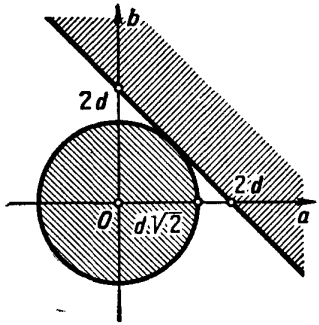
Геометрическое место ортогональных проекций точек *I* и *J* на общие касательные к сферам (A) и (B). Мы видели (III, 2°), что ортогональные проекции H и K точек I и J на касательные, общие к сферам (A) и (B), лежат на сфере (S). Обратно: пусть H — какая-нибудь точка сферы (S). Если плоскость, перпендикулярная IH и проходящая через H, пересекает сферы (A) и (B) по окружностям (A') и (B'), то эти сечения лежат одно вне другого так же, как и сферы (A) и (B); при этом точка H лежит вне этих сечений, так как она лежит и вне сферы (A), и вне сферы (B). Из точки H можно тогда провести две общие касательные к окружностям (A') и (B'), которые вместе с тем будут и общими касательными к сферам (A) и (B). Остается установить условие, при котором

плоскость, перпендикулярная отрезку IH и проходящая через точку H, пересекает сферы (A) и (B). Это будет так, если $AA' < a$. Далее (черт. 333), $\frac{IA}{a} = \frac{IB}{b} = \frac{2d}{a+b}$, $\frac{JA}{a} = \frac{JB}{b} = \frac{2d}{a-b}$, откуда $IJ = \frac{4abd}{a^2-b^2}$. Мы видели, что $\frac{AA'}{IH} = \frac{AJ}{JI}$. Пусть H' — проекция H на AB, тогда $IH = \sqrt{IH' \cdot IJ}$, $AA' = AJ\sqrt{\frac{IH'}{IJ}}$ и усло-



Черт. 333.

вие $AA' < a$ принимает вид $IH' < a^2 \frac{IJ}{AJ^2} = a^2 \frac{\frac{4abd}{a^2-b^2}}{\frac{4a^2d^2}{(a-b)^2}} = \frac{ab}{d}\frac{a-b}{a+b}$. Это соотношение показывает, что точка H должна лежать на сферическом сегменте (S) с вершиной I и высотой $h_H = \frac{ab}{d}\frac{a-b}{a+b}$. Этот сферический сегмент и есть геометрическое место точек H. Его площадь равна $4\pi\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$. Заметим, что предыдущее вычисление предполагает, что H отлично от I. Если H и I совпадают, существует бесконечное множество общих касательных к сферам (A) и (B), проходящих через H и образующих конус с вершиной H, описанной вокруг сфер (A) и (B). Если H лежит на указанном сферическом сегменте, то существуют две общих касательных к сферам (A) и (B), проходящих через H и перпендикулярных IH; если H лежит на граничной окружности этого сферического сегмента, существует лишь одна общая касательная к сферам (A) и (B), перпендикулярная IH. Аналогично доказывается, что геометрическое место точек K есть сферический сегмент сферы (S) с вершиной J, высота и площадь которого соответственно равны: $h_K = \frac{ab}{d}\frac{a+b}{a-b}$ и $s_K = \frac{4\pi a^2b^2}{(a-b)^2}$. Если точка K совпадает с J, имеется бесконечное множество общих касательных к сферам (A) и (B), проходящим через K. Эти касательные образуют конус с вершиной J, описанный вокруг сфер (A) и (B). Если точка K лежит на сферическом сегменте, определенном выше, то через нее проходят две касательные к (A) и (B), перпендикулярные JK; если точка K лежит на граничной окружности соответствующего сферического сегмента, через нее проходит лишь одна общая касательная к сферам (A) и (B), перпендикулярная JK. Для того чтобы два сферических сегмента имели общую часть, необходимо и достаточно, чтобы $h_H + h_K > IJ$ при условии, что это неравенство совместно с неравенством $a+b<2d$; но $h_H + h_K = 2\frac{ab}{d}\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; отсюда $a^2+b^2 > 2d^2$. Неравенства $a+b<2d$ и $a^2+b^2>2d^2$ совместны, что можно



Черт. 334.

установить графически (черт. 334); точки (a, b), удовлетворяющие неравенству $a^2 + b^2 > 2d^2$, лежат вне окружности радиуса $d\sqrt{2}$ с центром в начале координат, а точки (a, b), для координат которых $a + b < 2d$, лежат по одну сторону от прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки $2d$ (эта прямая касается указанной окружности). Отсюда следует, что точки, удовлетворяющие обоим неравенствам, всегда существуют. Итак, два указанных выше сферических сегмента имеют общую часть, если $a^2 + b^2 > 2d^2$.

Общие образующие конусов (M, A) и (M, B). Общие образующие конусов (M, A) и (M, B) суть общие касательные к сферам (A) и (B), проходящим через точку M. Обратно, всякая касательная, общая сферам (A) и (B), пересекает сферу (S) в точках H и K, являющихся ортогональными проекциями точек I и J на эту общую касательную, и конусы с вершиной в H (или K), описанные вокруг сфер (A) и (B), равны; для них эта общая касательная будет общей образующей. Таким образом, число общих касательных к сферам (A) и (B), проходящих через точку M сферы (S), совпадает с числом общих прямолинейных образующих конусов (M, A) и (M, B). Рассмотрим три случая: а) $a^2 + b^2 < 2d^2$. Геометрические места точек H и K суть два сферических сегмента сферы (S) без общих точек; обозначим их через S_H, S_K, а через S' — оставшийся шаровой пояс. Через I или J проходит бесконечное множество общих касательных к сферам (A) и (B); конусы совпадают. Если точка M принадлежит S_H или S_K (не совпадает с I и J), имеются две общие образующие. Если M лежит на поясе S', нет ни одной общей образующей, а если точка M лежит на граничной окружности сферического сегмента S_H или S_K, имеется лишь одна общая образующая, проходящая через I или J, по которой конусы касаются; б) $a^2 + b^2 > 2d^2$. Геометрическое место точек H и K суть также сферические сегменты S_H и S_K, но в этом случае они имеют общую часть S' — сферический пояс. Если M совпадает с I или J, эти конусы совпадают. Если M расположена на S_H или S_K, но не в их общей части, имеются две общие образующие; если точка M лежит на поясе S', имеются четыре общие образующие, и, наконец, если точка M лежит на граничной окружности одного из сегментов S_H или S_K, имеются три общие образующие, а по одной из них конусы касаются; в) $a^2 + b^2 = 2d^2$. Шарового пояса S' не существует. Если точка M лежит на S_H или S_K, но не совпадает с I, J и точками граничного круга, то имеются две общие образующие. Наконец, если точка M лежит на граничной окружности сферических сегментов S_H и S_K, то конусы (M, A) и (M, B) имеют две общие образующие, причем по каждой из них они касаются.

Петр Сергеевич Моденов

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО СПЕЦИАЛЬНОМУ КУРСУ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор *Е. А. Шарова*
Техн. редактор *С. С. Горохова*
Корректоры: *Н. С. Ткаченко* и *Т. С. Короткова*

Сдано в набор 10/II 1960 г.
Подписано к печати 4/XI 1960 г.
Бумага $70\times108^{1}/_{16} = 48$ п. л. $= 65{,}56$ усл. п. л.
$= 78{,}06$ уч-изд. л. Т-08975
Тираж 42 000. Заказ № 1143.
Цена 24 р. 40 к. С 1/I-61 г. 2 р. 44 к.

Государственное издательство «Высшая школа»
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 20.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза,
Ленинград, Измайловский пр., 29.